Chapitre 4

Ondes

L'opérateur des ondes est donné par $\Box u = \partial_{tt} u - \Delta_x u$, où $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Solution du problème de Cauchy dans l'espace

On s'intéresse ici au problème

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{4.1}$$

Rappelons la stratégie de résolution de (4.1) développée dans le Chapitre 1 : en prenant formellement la transformée de Fourier dans la variable x, on obtient

$$u(x,t) = F(\cdot,t) *_x f(x) + G(\cdot,t) *_x g(x), \quad \text{où } \mathscr{F}_x F(\xi,t) = \cos(t|\xi|), \mathscr{F}_x G(\xi,t) = \frac{\sin(t|\xi|)}{t}.$$

Il suffit alors de trouver F et G. On peut suivre cette démarche très facilement en dimension 1, plus difficilement en dimension 2. Au-delà, F et G ne sont plus des fonctions, et il faut se placer dans le cadre de la théorie des distributions. Plutôt que de développer cette approche, nous allons présenter la méthode des moyennes sphériques couplée à la méthode de descente, approche qui fonctionne en toute dimension.

Cas 1D : formule de d'Alembert

Rappelons la Proposition 1.2 : si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$, alors

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy \tag{4.2}$$

est solution de (4.1).

Moyennes sphériques

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Si $r > 0$, on pose (avec $S(x,r)$ la sphère $\{y \in \mathbb{R}^n ; |y - x| = r\}$)

$$U(x,t;r) = \fint_{S(x,r)} u(y,t)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) = \fint_{S(0,1)} u(x+ry,t)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y). \tag{4.3}$$

A partir de cette égalité, on voit que U s'étend (*via* la deuxième formule de (4.3)) pour $r \leq 0$, et que $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Par ailleurs, U est paire en r et on a

$$u(x,t) = U(x,t;0). \tag{4.4}$$

On définit, de même, pour tout r :

$$F(x;r) := \fint_{S(0,1)} f(x+ry)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y),\ G(x;r) := \fint_{S(0,1)} g(x+ry)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{4.5}$$

Cas 3D : formule de Kirchhoff

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. On fixe x et on pose $V(r,t) = rU(x,t;r)$, $F(r) = F(x;r)$, $G(r) = G(x;r)$.

4.1 Lemme. *Soit* $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ *solution de* (4.1). *Alors* $V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *satisfait*

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{rr} = 0 & \textit{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ V(r,0) = rF(r), & r \in \mathbb{R} \\ V_t(r,0) = rG(r), & r \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{4.6}$$

Démonstration. On vérifie aisément que $V \in C^2$ et que V vérifie les conditions initiales. Il suffit de vérifier l'équation satisfaite par V pour $r \neq 0$, et par imparité de V par rapport à r on se ramène à $r > 0$. On peut supposer $x = 0$. On a, avec $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x-y| < r\}$ et en utilisant le théorème flux-divergence :

$$\begin{aligned} U_r(r,t) &= \fint_{S(0,1)} y \cdot \nabla_y u(ry,t)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(0,r)} \frac{y}{r} \cdot \nabla_y u(y,t)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(0,r)} \Delta_y u(y,t)\, dy = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(0,r)} u_{tt}(y,t)\, dy. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Par ailleurs, on a clairement

$$4\pi r^2 U_{tt}(r,t) = \int_{S(0,r)} u_{tt}(y,t)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

d'où

$$\int_{B(0,r)} u_{tt}(y,t)\, dy = \int_0^r \int_{S(0,s)} u_{tt}(y,s)\, dy = 4\pi \int_0^r s^2 U_{tt}(s,t)\, ds. \tag{4.8}$$

En combinant (4.7) et (4.8), on obtient

$$U_r(r,t) = \frac{1}{r^2} \int_0^r s^2 U_{tt}(s,t)\, ds, \tag{4.9}$$

d'où (en dérivant (4.9))

$$V_{rr}(r,t) = (rU)_{rr}(r,t) = rU_{rr}(r,t) + 2U_r(r,t) = rU_{tt}(r,t) = V_{tt}(r,t). \qquad \square$$

On continue ainsi : à partir de (4.6), on trouve

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}V(r,t) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2r}((r+t)F(r+t)+(r-t)F(r-t)) + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} sG(s)\,ds\right). \tag{4.10}$$

En utilisant la parité de F et G, on trouve

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2r}((t+r)F(r+t)-(t-r)F(t-r)) + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} sG(s)\,ds\right) \\ &= \left(\frac{d}{dr}(rF(r))\right)(t) + tG(t), \end{aligned}$$

d'où la formule de Kirchhoff

$$u(x,t) = \fint_{S(x,t)} (f(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x) + tg(y))\,d\mathscr{H}^2(y) \tag{4.11}$$

(qu'il faut entendre, pour $t \le 0$, au sens de l'égalité (4.12) ci-dessous).

4.2 Théorème.
Hypothèses. $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$. $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *u donnée par* (4.11).
Conclusion. *u résout* (4.1).

Démonstration. En écrivant

$$u(x,t) = \fint_{S(0,1)} (f(x+ty) + t\nabla f(x+ty)\cdot y + tg(x+ty))\,d\mathscr{H}^2(y), \tag{4.12}$$

on voit aisément que $u \in C^2$ et que u vérifie les conditions initiales dans (4.1). [1] Il reste à vérifier que u est solution de $\Box u = 0$. Une possibilité est de vérifier cette égalité par un calcul direct basé sur le théorème flux-divergence [6, p. 77]. Voici un raisonnement indirect. Si $f, g \in C_c^\infty$, nous verrons dans la deuxième partie de ce cours que (4.1) a une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Il s'ensuit que cette solution est donnée par (4.11), car nous avons déduit la formule de u en supposant son existence. Soient maintenant $f \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$. En approchant f et g par des fonctions C_c^∞, on voit (à partir de (4.12)) que u vérifie encore $\Box u = 0$. Passons au cas général : on note que, au voisinage d'un point (x,t), la solution donnée par (4.11) ne dépend que des valeurs prises par f et g dans un compact. L'égalité $\Box u = 0$ étant à vérifier localement, on peut donc multiplier f et g par une fonction plateau convenable et les supposer à support compact. On conclut donc en se ramenant au cas $f \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$. □

Descente

La méthode de la descente consiste à résoudre une équation en dimension $m < n$ à partir de sa résolution en dimension n. Exemple : si on sait résoudre (4.1) en dimension n, soient $f, g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. On pose $\widetilde{f}(x', x_n) = f(x')$, $\widetilde{g}(x', x_n) = g(x')$, et on résout (4.1) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, avec données initiales $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$. Les données étant indépendantes de x_n, on espère [2] que la solution $\widetilde{u}$ trouvée ne dépend pas de x_n, et alors $u(x') = \widetilde{u}(x', 0)$ est solution de (4.1) dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

1. Au passage, on utilise l'Exercice 8.44.
2. Ce sera le cas pour l'équation des ondes.

Cas 2D : formule de Poisson

Soient $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. On définit $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ et $\widetilde{u}$ comme ci-dessus. Notons que $\widetilde{u}$ obtenue dans $\mathbb{R}^3$ ne dépend pas de x_3. En effet, $v^s(x,t) := \widetilde{u}(x', x_3 - s, t)$, $s \in \mathbb{R}$, est solution du même problème que $\widetilde{u}$, et donc coïncide avec $\widetilde{u}$. On trouve que $u(x_1, x_2, t) = \widetilde{u}(x_1, x_2, 0, t)$ est solution de (4.1) dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, d'où le résultat suivant.

4.3 Théorème.
Hypothèses. $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$. $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
Conclusion. *u donnée par*

$$u(x,t) = \frac{t}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} (f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x) + t g(y))\, dy \tag{4.13}$$

est solution de (4.1).

Ici, $B(x,t) = \{y \in \mathbb{R}^2 ; |y-x| < t\}$. Pour $t \le 0$, la formule (4.13) s'interprète comme étant le membre de droite de (4.14) ci-dessous.

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\widetilde{u}(x,0,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} (f(x+ty) + t\nabla f(x+ty) \cdot y + t g(x+ty))\, dy. \tag{4.14}$$

Avec $S(0,1)$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, (4.12) donne, en utilisant la paramétrisation

$$B(0,1) \ni y \mapsto \left(y, \pm\sqrt{1-|y|^2}\right) \in S(0,1) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,0,t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} (f(x+ty) + t\nabla f(x+ty) \cdot y + t g(x+ty))\, d\mathcal{H}^2(y,z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} (f(x+ty) + t\nabla f(x+ty) \cdot y + t g(x+ty))\, dy. \quad \square\end{aligned}$$

Dimension ≥ 4

On peut trouver la solution du problème (4.1) en toute dimension. Le point de départ est (4.7) (écrite en dimension quelconque), qui permet d'arriver à l'identité

$$U_r(r,t) = \sigma_n \int_0^r s^{n-1} U_{tt}(s,t)\, ds, \tag{4.15}$$

qui est l'analogue n-dimensionnel de (4.9). A partir de (4.15), on peut déduire, en dimension impaire, qu'une fonction auxiliaire construite à partir de U vérifie l'équation des ondes 1D. Exemple : en dimension 5 on pose (à x fixé) $V(r,t) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^3 U(x,t;r))$ et on vérifie par un calcul direct que V satisfait l'équation des ondes 1D avec des données initiales obtenues à partir de f et g. Puis on exprime U en fonction de f et g et on retrouve u à partir de l'égalité $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{V(r,t)}{r} = 3u(x,t)$, facilement vérifiée.

Le cas de la dimension 4 est obtenu à partir de celui de la dimension 5 par descente.

Cette méthode passe (avec comme seules différences la définition de V et la formule permettant d'obtenir u à partir de V) à toute dimension impaire. La méthode de descente permet de traiter les dimensions paires ; voir [6, pp. 74–80].

Cône de dépendance

En dimension 3, on voit qu'à l'instant $t > 0$ et au point x, la solution ne dépend que des valeurs des données initiales sur la sphère $S(x,t)$.[3] Si on écrit la "vraie" équation des ondes (faisant intervenir la vitesse c du son), alors $u(x,t)$ ne dépend que des données sur $S(x,ct)$. C'est le *principe de Huyghens* : si un son est émis à l'instant $t_0 = 0$ à distance d, alors on l'entend à l'instant $\frac{d}{c}$; ni avant, ni après. *A contrario*, en 2D $u(x,t)$ dépend des données dans $B(x,ct)$. Donc on entend le son *ad vita æternam* (mais de moins en moins fort) à partir de l'instant $\frac{d}{c}$. On peut voir ce fait dans l'autre sens : un son émis en x_0 est entendu dans le cône creux $\{(x,t); t \in \mathbb{R}, |x - x_0| = |t|\}$ en 3D, et dans le cône plein $\{(x,t); t \in \mathbb{R}, |x - x_0| \le |t|\}$ en 2D.

Une autre occasion de retrouver le cône (plein) de dépendance, donné pour $T > 0$ par

$$K(x,T) := \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; 0 \le t \le T, |x - y| \le T - t\}, \tag{4.16}$$

est le résultat suivant, valable dans un domaine.

4.4 Proposition. *Si $u \in C^2(K(x,T))$ vérifie, dans $K(x,T)$, l'équation $\Box u = 0$ et les conditions initiales $u = u_t = 0$ à $t = 0$, alors $u = 0$ dans $K(x,T)$.*

Démonstration. On multiplie l'équation de u par u_t et on trouve, après application de la première formule de Green :

$$\int_{B(x,T-t)} u_t u_{tt} - \int_{S(x,T-t)} u_t \nabla_x u \cdot \nu_x + \int_{B(x,T-t)} \nabla_x u \cdot \nabla_x u_t = 0. \tag{4.17}$$

Par ailleurs, si $f \in C^1(K(x,T))$, alors

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{B(x,T-t)} f\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^{T-t} \int_{S(x,r)} f\, dr\right) = -\int_{S(x,T-t)} f + \int_{B(x,T-t)} f_t, \tag{4.18}$$

d'où (4.17) devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{B(x,T-t)} |\nabla u|^2\right) = \int_{S(x,t)} \left(u_t \nabla_x u \cdot \nu_x - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right). \tag{4.19}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le membre de droite de (4.19) est ≤ 0. On trouve que $\int_{B(x,T-t)} |\nabla u|^2$ (qui est positive et vaut 0 en $t = 0$) décroît avec t, d'où u constante, d'où $u = 0$. $\Box$

Formule de Duhamel

Comme pour l'équation de la chaleur, pour F assez régulière on peut calculer la solution de

$$\begin{cases} \Box u = F(x,t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.20}$$

3. Enfin, presque : la solution fait aussi intervenir les dérivées de f sur $S(x,r)$, qui dépendent des valeurs de f dans un voisinage de $S(x,r)$.

à partir de la solution u^s du problème

$$\begin{cases} \Box u^s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u^s(x,s) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u^s_t(x,s) = F(x,s) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{4.21}$$

qui elle-même s'obtient par une translation dans le temps des solutions de (4.1). Plus précisément, on a

$$u(x,t) = \int_0^t u^s(x,t)\,ds. \tag{4.22}$$

Le cas d'un domaine

C'est à nouveau la théorie de Hille-Yosida qui fournit des réponses, mais le meilleur cadre fonctionnel n'est pas celui des fonctions de classe C^k. Donnons tout de même un résultat dans ce cadre.

4.5 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \in C^\infty$ *borné.* $f, g \in C^\infty(\overline{\Omega})$. $\Delta^k f = \Delta^k g = 0$ *sur* $\partial\Omega$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Conclusion. Le problème

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \textit{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u_{|t=0} = f & \textit{dans } \Omega \\ u_{t|t=0} = g & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.23}$$

a une (et une seule) solution $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Commentaires

Pour la méthode des moyennes sphériques, j'ai suivi [4, VI, §12] et son avatar [6, pp. 74-80].

Les premiers à avoir explicitement noté la différence entre propagation dans des cônes creux et cônes pleins selon la dimension sont Volterra et Tedone, vers 1890. Herglotz et surtout Petrowski ont montré que ces propriétés s'étendent à des opérateurs plus généraux ; voir l'article de Gårding [9] à ce sujet.

L'idée d'utiliser la méthode d'énergie pour l'unicité (idée qui fonctionne aussi pour Δ et L) remonte à Zaremba. On peut montrer la Proposition 4.4 directement à partir des formules explicites ; son intérêt réside dans la preuve, qui s'applique aussi à l'équation $u_{tt} - \operatorname{div}(A\nabla u) = 0$, pour laquelle on ne dispose pas de formule de résolution.

Il y a une formule de la moyenne pour l'équation des ondes, mais elle est moins utile que pour Δ ou L ; c'est la formule d'Asgeirsson, voir [4, pp. 744-747].

Il y a aussi des estimations dispersives pour l'équation des ondes : il s'agit des fameuses estimations de Strichartz, qui sont difficiles à établir [18, Chapter IV].