ISFA 206-2007
Optimisation

Examen
Le jeudi 26 avril 2007 de 14 heures à 16 heures

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2 - 4xy$.
a) Montrer que f est coercive.
(On pourra établir l'inégalité $f(x,y) \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2$.)
b) Trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ et le(s) point(s) de minimum de f.
(On pourra retrancher les équations satisfaites par les points critiques.)

Dans la suite, on pose $d_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x+y=a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) et, pour $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $D_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x+y \leq b\}$.
On considère le problème (P) $\min\limits_{(x,y)\in D_{a,b}} f(x,y)$.
c) Montrer que le minimum de (P) existe.

On notera dans la suite (x_0,y_0) une solution de (P).
d) Trouver (x_0,y_0) si $a \leq 0$ et $b \geq 0$.

Il nous reste à regarder les autres cas, c'est-à-dire $a,b>0$ ou $a,b<0$.
e) Montrer que (x_0,y_0) est solution de (P) dans le domaine $D_{a,b}$ si et seulement si $(-x_0,-y_0)$ est solution de (P) dans $D_{-b,-a}$. Ainsi, il suffit de résoudre (P) si $a,b>0$.

Dans la suite, on suppose $a,b>0$.
f) Montrer que (x_0,y_0) ne se trouve pas à l'intérieur de $D_{a,b}$. Donc soit $(x_0,y_0) \in d_a$, soit $(x_0,y_0) \in d_b$.
g) Si, par exemple, $(x_0,y_0) \in d_a$, écrire le système vérifié par x_0, y_0 et le(s) multiplicateur(s) de Lagrange associé(s).
h) En retranchant les deux premières équations du système précédent, montrer que $x_0 = y_0$.
i) Trouver la solution de (P).

On se propose de retrouver, par une autre méthode, le résultat de i).
j) Montrer que f est 4-convexe.
On admet dans la suite le fait que, si f est a-convexe ($a>0$), alors :
$f(tx_1+(1-t)y_1, tx_2+(1-t)y_2) < tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2), \quad \forall\ t \in]0,1[, \forall\ (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$.
(on dit alors que f est strictement convexe.)

k) Montrer que, sur d_a, f a au plus un point de minimum, (x_1, y_1).
l) En déduire que, sur d_a, f a exactement un point de minimum (x_1, y_1).
m) En partant de l'égalité $f(x,y) = f(y,x)$, montrer que $(x_1, y_1) = (a/2, a/2)$. Conclure.

On s'intéresse maintenant au problème (P') $\min\limits_{(x,y)\in E_{a,b}} f(x,y)$, où cette fois-ci $E_{a,b} = \{(x,y) \; ; \; a \leq x + 2y \leq b\}$ (avec $a < b$).
n) Écrire le lagrangien du problème.
o) Écrire les problèmes à résoudre en utilisant la méthode duale. Cette méthode donne-t-elle la solution de (P') ?
p) Montrer que, si $a, b > 0$ (ce que l'on suppose par la suite), alors une solution (x_0, y_0) de (P') est soit sur e_a, soit sur e_b, où e_a est la droite d'équation $x+2y = e_a$.
q) Donner un algorithme pour trouver une solution approchée du minimum de f sur e_a et expliquer pourquoi cet algorithme converge.
r) Décrire un algorithme qui tient compte des informations données par les questions p) et q) pour trouver une solution approchée de (P').