ISFA 206-2007
Optimisation

Corrigé de l'examen

a) On a $f(x,y) \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \iff x^4+y^4-2x^2y^2+8x^2+8y^2-8xy \geq 0 \iff (x^2-y^2)^2+4(x-y)^2+4x^2+4y^2 \geq 0$, et la dernière inégalité est clairement vraie.
Il s'ensuit que $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) \geq \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 = \infty$, d'où la coercivité de f.
b) Les points critiques de f sont solutions de $\begin{cases} x^3+2x=y \\ y^3+2y=x \end{cases}$. Si on retranche les deux équations, on trouve $(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=0$. La seconde parenthèse est $\neq 0$ (si on résout l'équation en x ou y, le discriminant est négatif). Il reste $x=y$. En revenant à la première équation, on trouve $x=0$, d'où le point de minimum est $(0,0)$ et le minimum est 0.
c) f est coercive et continue, $D_{a,b}$ est fermé.
d) Dans ce cas, $(0,0) \in D_{a,b}$, donc $(0,0)$ est la solution de (P).
e) On a $(x,y) \in D_{a,b} \iff (-x,-y) \in D_{-b,-a}$; de plus, $f(-x,-y)=f(x,y)$. Donc $f(-x_0,-y_0) = f(x_0,y_0) = \min\limits_{(x,y)\in D_{a,b}} f(x,y) = \min\limits_{(-x,-y)\in D_{-b,-a}} f(x,y) = \min\limits_{(-x,-y)\in D_{-b,-a}} f(-x,-y) = \min\limits_{(x,y)\in D_{-b,-a}} f(x,y)$.
f) Si (x_0,y_0) est à l'intérieur de $D_{a,b}$, alors (x_0,y_0) est point critique de f. Or, le seul point critique de f est $(0,0)$ et il n'appartient pas à $D_{a,b}$.
g) Il y a un seul multiplicateur de Lagrange, λ, et le système est $\begin{cases} 4x^3+8x-4y=\lambda \\ 4y^3+8y-4x=\lambda \\ x+y=a \end{cases}$.
Comme dans la question b), en retranchant on obtient $x=y$. D'où $x=y=a/2$.
i) On trouve que soit $(x_0,y_0)=(a/2,a/2)$, soit $(x_0,y_0)=(b/2,b/2)$. Pour trancher, on compare les deux valeurs respectives de f. Comme $\dfrac{a^4}{8}+a^2 < \dfrac{b^4}{8}+b^2$, on trouve $(x_0,y_0)=(a/2,a/2)$. Le minimum de f sur $D_{a,b}$ est $\dfrac{a^4}{8}+a^2$.
j) On doit montrer que $A(x,y) := Hf(x,y) - 4\,\mathrm{Id} \geq 0$, c'est-à-dire que les valeurs propres de $A(x,y)$ sont positives, ou encore que sa trace et son déterminant sont positifs. On a $A(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+4 & -4 \\ -4 & 12y^2+4 \end{pmatrix}$. La trace est $12x^2+12y^2+8>0$, le déterminant $144x^2y^2+48x^2+48y^2 \geq 0$.
k) Par l'absurde. S'il y en a deux, (x_1,y_1) et (x_2,y_2), on prend dans l'inégalité de convexité stricte $t=1/2$. On trouve $f((x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2) <$

$\frac{1}{2}f(x_1,y_1)+\frac{1}{2}f(x_2,y_2) = f(x_1,y_1)$. Comme $((x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2) \in d_a$ (c'est le milieu du segment entre (x_1,y_1) et (x_2,y_2)), on contredit le fait que (x_1,y_1) est un minimum.
l) f est continue et coercive, d_a est fermée. Il y a donc un point de minimum de f sur d_a. De ce qui précède, il est unique.
m) Si $(x,y) \in d_a$, alors on a aussi $(y,x) \in d_a$. De plus, on a $f(x,y) = f(y,x)$. Donc : si (x_1,y_1) est un point de minimum, alors (y_1,x_1) l'est aussi. Par unicité, on a $(x_1,y_1) = (y_1,x_1)$, d'où $x_1 = y_1$. On trouve $x_1 = y_1 = a/2$. On finit comme dans la question i).
n) $L(x,y,p_1,p_2) = x^4+y^4+4x^2+4y^2-4xy-p_1(x+2y-a)+p_2(x+2y-b)$
$x,y \in \mathbb{R}$, $p_1,p_2 \in [0,\infty[$.
o) À p_1,p_2 fixés, on résout $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} L(x,y,p_1,p_2)$.
Si $(x(p_1,p_2),y(p_1,p_2))$ est la solution du premier problème, on pose $H(p_1,p_2) = L(x(p_1,p_2),y(p_1,p_2),p_1,p_2)$. On résout $\max_{p_1,p_2\geq 0} H(p_1,p_2)$.
Les deux problèmes ont une solution (et la solution du second donne la solution de (P')) car f est 4-convexe et les contraintes donnant $E_{a,b}$ sont affines.
p) Comme dans la question f), le minimum n'est pas à l'intérieur de $E_{a,b}$.
q) On peut paramétrer la droite e_a par $x = a-2y$, $y = y$. Ainsi, trouver le minimum de f sur e_a revient à trouver le minimum de $y \mapsto g(y) := f(a-2y,y)$ sur $\mathbb{R}$. On peut envisager la méthode de Newton combinée avec la dichotomie. Cette méthode va converger si g est α-convexe pour un $\alpha > 0$. Or, $g''(y) = 12(a-2y)^2+12y^2+25 \geq 25$; on peut donc bien appliquer cette méthode.
r) On trouve (par exemple par la méthode ci-dessus) le minimum approché de (P') sur e_a et, par la même méthode, sur e_b. Puis on compare les deux valeurs et on prend la plus petite.