ISFA 206-2007
Optimisation

Examen de deuxième session
Le jeudi 28 juin 2007 de 14 heures à 15 heures 30

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^8 + 4x^2 + 2xy + 4y^2 - x$.
a) Montrer que f est coercive.
(On pourra établir l'inégalité $f(x,y) \geq 3\|(x,y)\|^2 - \|(x,y)\|$.)
b) Montrer que f est 6-convexe.

On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $g_a(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x,a)$ et $h_b(y) = f(b,y)$.

c) Montrer que g_a et h_b sont 8-convexes.
d) Proposer un algorithme pour trouver, à a fixé, un minimum approché de g_a. Expliquer pourquoi cet algorithme converge.

On se propose de trouver une solution approchée de
(P) $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

e) Montrer que (P) a exactement une solution.

On considère l'algorithme suivant :
Initialisation. On choisit un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Passage de (x_n, y_n) **à** x_{n+1}**.** Une fois le point (x_n, y_n) déterminé, on prend x_{n+1} solution de (P_x) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x, y_n)$.
Passage de x_{n+1} **à** y_{n+1}**.** Une fois x_{n+1} déterminé, on prend y_{n+1} solution de (P_y) $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} f(x_{n+1}, y)$.

f) Montrer que l'algorithme est correct, au sens où à chaque étape les points x_{n+1} et y_{n+1} existent.
g) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}, y_n) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0$.
h) En déduire que, si la suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point (x,y), alors (x,y) est solution de (P).
i) Montrer que la suite $(f(x_n, y_n))$ décroît, puis (en utilisant **e)**) qu'elle est convergente.

j) En utilisant **a)** et **i)**, montrer que la suite $((x_n, y_n))$ est bornée.
k) Montrer, en utilisant **c)** et **g)**, que

$$f(x_n, y_n) \geq f(x_{n+1}, y_n) + 4(x_{n+1} - x_n)^2 \geq f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 4(x_{n+1} - x_n)^2.$$

En déduire que $x_{n+1} - x_n \to 0$.
l) La suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, elle contient une sous-suite (x_{n_k}, y_{n_k}) qui converge vers un $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x_{n_{k+1}}, y_{n_k}) \to (a, b)$.
m) En déduire que $(a, b) = (x, y)$. Conclusion ?