ISFA 2007-2008
Optimisation

Examen d'Optimisation
Le vendredi 16 mai de 8 heures à 10 heures
Tous documents autorisés

Exercice 1 Résoudre le problème

$$\begin{cases} \max\ (2x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 - 2x_1 \geq -4 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 2 Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m \sin x$ est-elle a-convexe pour un $a > 0$ convenable ?

Exercice 3 Modéliser mathématiquement le problème suivant [1] :
Un investisseur a deux paquets d'actions à vendre. Il a acheté le premier 150 K €, le second 200 K €. À la revente, il ne veut perdre de l'argent sur aucun paquet et il veut que le prix total de la vente des deux paquets soit au minimum supérieur de 25 % au prix total d'achat.
Par ailleurs, la plus-value réalisée à la vente est taxée à 32 % pour le premier paquet et à 38 % pour le second.
Quel prix de vente doit demander l'investisseur afin de maximiser son bénéfice après impôt ?

Exercice 4 Dans cet exercice, nous nous proposons d'établir la convergence de l'algorithme du gradient à pas optimal sous des hypothèse légèrement plus faibles que celles considérées en cours.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que :
$(H1)$ f est **coercive**, c'est-à-dire $\lim\limits_{\|x\|_2 \to \infty} f(x) = +\infty$.[2]

[1] Que l'on ne demande pas de résoudre.
[2] Rappel : si f est coercive et si la suite $(f(x_k))$ est majorée, alors la suite (x_k) est bornée.

$(H2)$ f est a-**convexe sur les compacts**, c'est-à-dire : pour tout $R > 0$, il existe $a > 0$ (qui en principe dépend de R) tel que $H_f(x) \geq a \text{ Id}$ pour tout $x \in \overline{B}(0,R)$.[3]
On pourra utiliser sans preuve la forme suivante de la formule de Taylor : si $H_f(x) \geq a \text{ Id}, \; \forall \, x \in \overline{B}(0,R)$, alors

$$(T) \quad f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x)) \cdot (y - x) + \frac{a}{2}\|y - x\|_2^2, \; \forall \, x, y \in \overline{B}(0,R).$$

Rappelons l'algorithme du gradient à pas optimal :
Initialisation. On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on pose $d_0 := -\nabla f(x_0)$.
Passage de k à $k+1$. On choisit α_k solution de $\min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x_k + \alpha d_k)$ et on pose $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$ et $d_{k+1} := -\nabla f(x_{k+1})$.

On se propose de montrer que, sous les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$, l'algorithme converge, c'est-à-dire $x_k \to x_*$, où x_* est l'unique point de minimum de f. Dans toutes les questions suivantes, on suppose que $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaites et (x_k) désigne la suite de l'algorithme.
On admet sans preuve que, sous les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$, on peut passer de k à $k+1$ dans l'algorithme, c'est-à-dire que, pour chaque k, le minimum $\min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x_k + \alpha d_k)$ est atteint.

1. Montrer que f a au plus un point de minimum.[4]
2. Montrer que f a exactement un point de minimum. Par la suite, on notera ce point x_*.
3. Montrer que la suite (x_k) est bornée.
4. Montrer que la suite $(f(x_k))$ est convergente.
5. Montrer que $x_{k+1} - x_k \to 0$.
6. Montrer que $\nabla f(x_k) \to 0$.
7. Conclure.
8. **(Question difficile)** Montrer que, pour $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la propriété $(H2)$ suit de la propriété plus faible $(H3)$: pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $H_f(x) > 0$.[5]

---

[3] C'est-à-dire $H_f(x)v \cdot v \geq a\|v\|_2^2$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 \leq R$.
[4] On pourra utiliser (T).
[5] On pourra utiliser les faits suivants : **Fait # 1 :** Si A est une matrice symétrique, alors $A \geq a \text{ Id}$ si et seulement si $Av \cdot v \geq a$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_2 = 1$. **Fait # 2 :** une fonction continue sur compact atteint son minimum.