ISFA 2007-2008
Optimisation

Examen d'Optimisation -deuxième session-
Le vendredi 26 juin de 14 heures à 15 heures 45
Calculatrice et tous documents autorisés

Exercice 1 Résoudre le problème

$$\begin{cases} \min\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 4x_4 - 3x_3 + x_5 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases} .$$

[Indication : on pourra considérer des variables supplémentaires afin d'obtenir une base admissible de départ.]

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose :
$(H1)$ f est de classe C^2 ;
$(H2)$ f est convexe ;
$(H3)$ $f'(0) > 0$.
Pour $\varepsilon > 0$, on considère $F_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x^2$.

1. Question préliminaire : si $g \in C^2(\mathbb{R})$ est a-convexe pour un $a > 0$ et si $g'(b) > 0$, comment est situé le point de minimum de g par rapport à b ?
2. Si f a un point de minimum x_0, quel est son signe ?
3. Montrer que F_ε est a-convexe pour un $a = a(\varepsilon) > 0$ que l'on précisera.
4. Montrer que F_ε a exactement un point de minimum, que l'on désignera par la suite par x_ε.
5. Montrer que $x_\varepsilon < 0$.
6. Montrer que la fonction $]0, +\infty[\ni \varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ est décroissante.

Tournez la page, svp

On pose $l := \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} x_\varepsilon$, de sorte que $l \in \mathbb{R}$ ou $l = -\infty$.

7. On suppose l réel. Montrer que l est un point de minimum de f.
8. On suppose $l = -\infty$. Montrer que f n'admet pas de point de minimum.
9. Proposer un algorithme "d'ingénieur" pour tester concrètement si f a un point de minimum ou non.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := (Ax) \cdot x + b \cdot x$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$.
[En particulier, il existe, dans $\mathbb{R}^n$, une base orthonormale de vecteurs propres de A, de valeurs propres associées réelles.]

1. Si f a une valeur propre strictement négative, montrer que $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\infty$.
2. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, montrer que f a un point de minimum et un seul.
3. **(Question difficile**) On suppose que les valeurs propres de A sont négatives ou nulles. Montrer que f a un point de minimum si et seulement si $b \perp \operatorname{Ker} A$.

[Indication pour la dernière question : décomposer $b = c + d$, avec $c \in \operatorname{Ker} A$ et $d \perp \operatorname{Ker} A$.]