ISFA 2008-2009
Optimisation

Examen d'Optimisation -deuxième session-
Le lundi 22 mai de 8 heures 15 à 10 heures 45
Tous documents autorisés

Exercice 1 On se donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & \beta \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.
a) Pour quels valeurs de β la méthode itérative de Jacobi est-elle convergente ?
b) Même question pour la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Exercice 2 Résoudre, par la méthode du simplexe, le problème

$$\min(x_2 + x_3)$$

sous les contraintes $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$, $x_1 - 2x_2 - x_3 = -2$.
Vérifier, à l'aide du logiciel R, la solution trouvée.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose :
(i) $f \in C^2$;
(ii) f convexe ;
(iii) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que le problème $(P) f(x) = 0$ a au plus une solution x_*. Dans la suite, on suppose que (P) a effectivement une solution.
b) Mettre en œuvre la méthode de Newton, avec point intitial x^0, pour résoudre (P).
c) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $x^k \geq x_*$.
d) En déduire que la méthode converge.

Exercice 4 Étudier la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.