ISFA 2009-2010
Optimisation

Examen d'Optimisation, deuxième session
Le jeudi 24 juin de 9 heures 30 à 11 heures
Tous documents autorisés

Exercice 1

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{bmatrix}$$

On considère la décomposition $A = D - E - F$ donnée en cours (D diagonale, E triangulaire inférieure avec 0 sur la diagonale et F triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale). On considère la matrice de Jacobi notée J (respectivement la matrice de Gauss-Seidel notée G) associée à la méthode itérative de Jacobi (respectivement de Gauss-Seidel) pour la résolution du système linéaire

$$Ax = b.$$

Rappellons qu'on a $J = D^{-1}(E + F)$ et $G = (D - E)^{-1}F$.

a) Montrer que $\lambda \in C$ est une valeur propre de J si et seulement si elle satisfait

$$\det(\lambda D - E - F) = 0.$$

Montrer aussi que $\lambda \in C$ est une valeur propre de G si et seulement si elle satisfait $p(\lambda) = 0$, où on a noté

$$p(\lambda) = \det(\lambda(D - E) - F).$$

b) Pour quelles valeurs de b la méthode itérative de Jacobi est-elle convergente ?

c) Montrer que si $b \in]-\frac{1}{2}, 0[$ alors la méthode itérative de Gauss-Seidel est convergente.
Indication : Etudier les signes de $p(-1), p(0)$ *et* $p(1)$.