

ISFA 2010-2011
Optimisation

Examen de deuxième session
Le mercredi 22 juin 2011 de 13 heures 30 à 15 heures
Tous documents autorisés

Exercice 1

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

avec n naturel, $n \geq 2$.

a) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ le nombre réel

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \quad (1)$$

est une valeur propre de A avec vecteur propre associé $v^k \in \mathbb{R}^n$ dont la j -ème composante est donnée par

$$v_j^k = \sin \left(\frac{jk\pi}{n+1} \right).$$

- b) Montrer que les seules valeurs propres de la matrice A sont celles données par (1).
- c) On considère la décomposition $A = D + L + U$ donnée en cours. On considère la matrice de Jacobi notée J associée à la méthode itérative de Jacobi pour la résolution du système linéaire

$$Ax = b. \quad (2)$$

Rappelons qu'on a $J = -D^{-1}(L + U)$.

Ecrire la matrice J comme une expression de I_n et de A , où I_n désigne la matrice identité en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- d) Montrer la convergence de la méthode itérative de Jacobi pour la résolution numérique de (2).
- e) Montrer la convergence de la méthode itérative de Gauss-Seidel pour la résolution numérique de (2).

Exercice 2 Trouver, par la méthode du simplexe à une phase, la quantité $\max(2x_1 + 3x_2 + 5x_3)$ sous les contraintes

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5, x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4, 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12.$$

Donner aussi la solution optimale.

Exercice 3 Montrer que $\min(x^2 + y^2)$ sous la contrainte $x^2 + y^2 - 2x - 4y \geq 4$ est atteint. Trouver la valeur du minimum.