ISFA 2011-2012
Optimisation

Examen d'Optimisation
Le jeudi 5 janvier 2012 de 10 heures 30 à 12 heures 30
Documents autorisés : notes et polycopiés du cours

Exercice 1 Résoudre, par la méthode du simplexe, le problème max $(5x_1 + 6x_2 + 6x_3)$ sous les contraintes $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 210$, $3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210$, $3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 210$.

Exercice 2 Dans cet exercice, la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$ est notée $|\ |$, et le produit scalaire standard $\cdot$.

Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire injective, que l'on identifie à une matrice $(a_{ij})_{i=1,\dots,p,\, j=1,\dots,n}$. On définit à l'aide de A la matrice $B = ({}^tA)A \in M_n(\mathbb{R})$.

Soit $b \in \mathbb{R}^p$ un vecteur fixé. On définit à l'aide de A et b le vecteur $c = {}^tAb$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}|Ax - b|^2$.

1. Montrer que B est symétrique et positive.
2. Montrer que B est définie positive.
   Dans la suite, on note $m > 0$ la plus petite valeur propre de B et $M > 0$ la plus grande valeur propre de B.
3. Montrer que $B - m\ \mathrm{Id} \geq 0$ et que $B - M\ \mathrm{Id} \leq 0$.
4. En déduire que $m|v|^2 \leq (Bv) \cdot v \leq M|v|^2$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$.
5. *(Question plus difficile)* Montrer que $m|v| \leq |Bv| \leq M|v|$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$.
6. Calculer $f(x)$ en fonction de B, b, c et x.
7. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_x f$ en fonction de B, c et x.
8. Montrer que f est convexe.
9. Montrer que f a exactement un point de minimum x_0. Exprimer x_0 en fonction de B et c.
10. On considère la méthode itérative suivante : on fixe $\rho > 0$. Pour $x^0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la suite $(x^k)_{k\geq 0}$ par la récurrence $x^{k+1} = x^k - \rho(Bx^k - c)$.
    Au vu de ce qui précède, de quel algorithme s'agit-il ?
11. Calculer x^{k+1} en fonction de x^k, B et x_0. En déduire l'identité suivante :
    $$|x^{k+1} - x_0|^2 = |x^k - x_0|^2 - 2\rho(B(x^k - x_0)) \cdot (x^k - x_0) + \rho^2|B(x^k - x_0)|^2. \tag{1}$$
12. En déduire que
    $$|x^{k+1} - x_0|^2 \leq (1 - 2m\rho + M^2\rho^2)|x^k - x_0|^2. \tag{2}$$
13. Trouver un intervalle $I \subset]0, +\infty[$ tel que la méthode itérative converge si $\rho \in I$. Y a-t-il un ρ qui semble idéal ?
14. Donner plusieurs tests raisonnables d'arrêt pour la méthode itérative.

Tournez la page svp →

Exercice 3 *(Positionnement optimal d'un produit sur le marché)*

Sur un marché, il existe déjà n consommateurs C_i, $i = 1, \ldots, n$, et m produits P_j, $j = 1, \ldots, m$.

Chaque produit P_j est jugé par les consommateurs par rapport à p caractéristiques, que l'on décrit à travers un vecteur à p coordonnées positives, $V^j = (V_1^j, \ldots, V_p^j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Par ailleurs, chaque consommateur se représente un produit idéal, dont les caractéristiques sont données par le vecteur à coordonnées positives $I^i = (I_1^i, \ldots, I_p^i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Parmi les produits présents sur le marché, le consommateur C_i choisit le produit P_k le plus proche de son produit idéal I^i, c'est-à-dire le produit qui réalise le minimum de $\min\limits_{j=1,\ldots,m} |I^i - P^j|$. (Ici, $|\ |$ désigne la distance euclidienne.)

Une entreprise désire définir un nouveau produit P, de caractéristiques données par le vecteur à coordonnées positives V. Par ailleurs, V doit satisfaire d'autres contraintes : $V \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ est connu.

Le coût de ce nouveau produit est donnée par une fonction $f(V)$. Le profit apporté à l'entreprise par le consommateur C_i est nul si C_i n'est pas plus attiré par P que par les produits déjà existants, et vaut $p_i > 0$ si le nouveau produit attire C_i.

Sachant que le but de l'entreprise est de maximiser son bénéfice, quel est le problème mathématique à résoudre ?

Barème indicatif. Exercice 1 : 6p., Exercice 2 : 11 p., Exercice 3 : 3 p.