Examen d'Optimisation

ISFA 2011-2012

Corrigé

Exo 1. On met le problème sous la forme

$$- \min (-5x_1 - 6x_2 - 6x_3) \quad \text{sous}$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 210 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 210 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 210 \end{cases}$$

La base $\{4, 5, 6\}$ est admissible.

	1	2	3	4	5	6		
4	1	3	3	1	0	0	210	210
5	$\boxed{3}$	1	3	0	1	0	210	70
6	3	3	1	0	0	1	210	70
	−5	−6	−6	0	0	0	0	

	1	2	3	4	5	6		
4	0	8/3	2	1	−1/3	0	140	105/2
1	1	1/3	1	0	1/3	0	70	210
6	0	$\boxed{2}$	−2	0	−1	1	0	0
	0	−13/3	−1	0	5/3	0	350	

	1	2	3	4	5	6		
4	0	0	$\boxed{14/3}$	1	1	$-4/3$	140	30
1	1	0	$4/3$	0	$1/2$	$-1/6$	70	$105/2$
2	0	1	-1	0	$-1/2$	$1/2$	0	∞
	0	0	$-16/3$	0	-1	$13/6$	350	

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	$3/14$	$3/14$	$-2/7$	30
1	1	0	0	$-2/7$	$5/14$	$3/14$	30
2	0	1	0	$3/14$	$-2/7$	$3/14$	30
	0	0	0	$8/7$	$1/7$	$\frac{9}{14}$	510

Le maximum vaut 510. Une solution optimale est $(30,30,30)^T$.

$\boxed{\text{Exo 2.}}$ 1. ${}^tB = {}^t({}^tA\,A) = {}^tA\,{}^t{}^tA = {}^tA\,A = B.$

$$(Bx)\cdot x = ({}^tA\,A\,x)\cdot x \underset{\uparrow}{=} (Ax)\cdot({}^t{}^tA\,x) = (Ax)\cdot(Ax) = |Ax|^2$$

identité de Lagrange

2. Si $x \neq 0$, $Ax \neq 0$ (car A injective) $\Rightarrow |Ax|^2 > 0 \Rightarrow$ $(Bx)\cdot x > 0$.

3. Soient $\lambda_1 = m \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = M$ les valeurs propres de B. Alors les valeurs propres de $B - m\,Id$

sont $\lambda_1 - m \geq 0, \dots, \lambda_n - m \geq 0$, d'où $B \geq m\,Id$. De même les valeurs propres de $B - M\,Id$ sont ≤ 0, d'où $B \leq M\,Id$.

4. On a $((B - m\,Id)v) \cdot v \geq 0$, d'où $(Bv) \cdot v \geq m|v|^2$.

De même, $((B - M\,Id)v) \cdot v \leq 0 \Longrightarrow (Bv) \cdot v \leq M|v|^2$.

5. On a $B = RDR^{-1}$, avec R orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si $v \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|Dv|^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 v_j^2 \geq \sum_{j=1}^{n} m^2 v_j^2 = m^2|v|^2,$$ et de même

$|Dv|^2 \leq M^2|v|^2$. On trouve :

$$|Bv| = |RDR^{-1}v| \underset{\uparrow}{=} |DR^{-1}v| \geq m|R^{-1}v| \underset{\uparrow}{=} m|v|$$

Car R isométrie

et de même $|Bv| \leq M|v|$.

6. $f(x) = \frac{1}{2}(Ax - b) \cdot (Ax - b) = \frac{1}{2}(Ax) \cdot (Ax) - \frac{1}{2}(Ax) \cdot b$

$$- \frac{1}{2} b \cdot (Ax) + \frac{1}{2}|b|^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}({}^tA A x) \cdot x - ({}^tA b) \cdot x + \frac{1}{2}|b|^2 \Longrightarrow$$

identité de Lagrange

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(Bx) \cdot x - c \cdot x + \frac{1}{2}|b|^2.}$$

7. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j,k} b_{jk} x_j x_k\Big) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j,k} c_j x_j\Big)$

$$= \frac{1}{2}\sum_k b_{ik} x_k + \frac{1}{2}\sum_j b_{ji} x_j - c_i$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_k b_{ik} x_k - c_i = (Bx)_i - c_i.$$

par symétrie de B

On trouve $\boxed{\nabla f(x) = Bx - c}$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_k b_{ik} x_k - c_i\right) = b_{ij}, \text{ d'où}$$

$$\boxed{H_x f = B}$$

8. On a $H_x f = B \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

9. On a $\nabla f(x_0) = 0 \iff Bx_0 - c = 0 \iff \boxed{x_0 = B^{-1} c}$

Comme f est convexe, on a x_0 point de minimum $\iff$ $\nabla f(x_0) = 0$, d'où la conclusion.

10. De la question 7., on a $x^{k+1} = x^k - \rho \nabla f(x^k)$.

C'est la méthode du gradient à pas fixe.

11. De la question 9., on a $c = Bx_0$. Donc :

$$\boxed{x^{k+1} = x^k - \rho B(x^k - x_0)}$$

On trouve

$$|x^{k+1} - x_0|^2 = |\underbrace{x^k - x_0}_{\alpha} - \underbrace{\rho B(x^k - x_0)}_{\beta}|^2 = |\alpha|^2 - 2\beta\cdot\alpha + |\beta|^2$$

ce qui donne l'identité demandée.

12. De la question 4., on a $(B(x^k - x_0))\cdot(x^k - x_0) \geq m|x^k - x_0|^2$

De la question 5., on a $|B(x^k - x_0)|^2 \leq M^2 |x^k - x_0|^2$.

On conclut en insérant ces deux inégalités dans l'identité de la question 11.

13. La méthode converge si $1-2m\rho+M^2\rho^2<1$, c'est-à-dire si $\rho<\frac{2m}{M^2}$. $\boxed{I=]0,\frac{2m}{M^2}[}$ convient.

La convergence semble la plus rapide lorsque la quantité $1-2m\rho+M^2\rho^2$ atteint son minimum, ce qui suggère

$\boxed{\rho_{opt}=\frac{m}{M^2}}$.

14. $|Bx^k-c|\leq\varepsilon$, ou $|Bx^k-c|\leq\varepsilon|c|$, ou $|x^{k+1}-x^k|\leq\varepsilon$, ou $|x^{k+1}-x^k|\leq\varepsilon|c|$.

$\boxed{\text{Exo 3.}}$ Nous donnerons plusieurs solutions (équivalentes).

#1. Soit $I=\{i\in\{1,\dots,n\} ;\ |V-I^i|\leq|V^j-I^i|, 1\leq j\leq m\}$.

Les indices $i\in I$ donnent les clients C_i attirés par le produit P. A noter que I dépend de P. On a alors à résoudre

$$\max\left(\sum_{i\in I}p_i-f(V)\right)$$

sous $V\in\mathbb{R}^r$, $V\geq0$, $V\in\mathcal{U}$.

#2. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=\begin{cases}1, & \text{si } t\geq0\\ 0, & \text{si } t<0\end{cases}$.

Alors C_i est attiré par $P \iff g\left(\min_{1\leq j\leq m}|V^j-I^i|-|V-I^i|\right)=1$

On a à résoudre (sous les mêmes contraintes que ci-dessus)

$$\max\left(\sum_{i=1}^n p_i\, g\left(\min_{1\leq j\leq m}|V^j-I_i|-|V-I_i|\right)-f(V)\right).$$