

ISFA 2011-2012
Optimisation

Examen d'Optimisation -deuxième session-
Le vendredi 22 juin de 9 heures 30 à 11 heures
Documents autorisés : notes de cours et TD

Exercice 1 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose :

- (i) $g \in C^2$;
- (ii) g convexe;
- (iii) $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer que le problème (P) $g(x) = 0$ a au plus une solution X . Dans la suite, on suppose que (P) a effectivement une solution X .
- b) Mettre en œuvre la méthode de Newton, avec point initial x^0 , pour résoudre (P) .
- c) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $x^k \geq X$.
- d) En déduire que la méthode converge.

Exercice 2 Étudier la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^6 + y^6 - 6xy$.

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

En utilisant la condition nécessaire et suffisante pour la convergence des méthodes itératives, donner les valeurs de α telles que

- a) La méthode itérative de Jacobi converge.
- b) La méthode itérative de Gauss-Seidel converge.

Exercice 4 Résoudre, par la méthode du simplexe, le problème $\min(x_1 + x_2)$ sous les contraintes $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_3 - 2x_1 - x_2 = -2$, $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$.