Licence Mathématiques et Gestion 2012-2013
Optimisation

Examen d'Optimisation -deuxième session-
Le lundi 24 juin 2013. Durée 90 minutes
Documents autorisés : notes de cours et de TD

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + 5xy + 13y^2$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Trouver le plus grand a et le plus petit b tels que $a\,\mathrm{I}_2 \leq H_{(x,y)}f \leq b\,\mathrm{I}_2$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Pour ce choix de f :
   - Ecrire explicitement les itérations de l'algorithme du gradient à pas constant.
   - Donner explicitement le plus grand intervalle théorique $J \subset \mathbb{R}$ tel que, si le paramètre ρ de l'algorithme du gradient à pas constant se trouve dans J, alors la méthode converge.
   - Montrer que, si ρ n'appartient pas à l'intervalle J de la question précédente, alors l'algorithme du gradient à pas constant ne converge pas.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
En utilisant la condition nécessaire et suffisante pour la convergence des méthodes itératives, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α et β de sorte que
1. La méthode itérative de Jacobi converge,
respectivement
2. La méthode itérative de Gauss-Seidel converge.

Exercice 3. Résoudre, par la méthode du simplexe, le problème max $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ sous les contraintes $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_2 + x_3 \leq 7$, $x_3 + x_4 \leq 9$.