Licence Mathématiques et Gestion 2013–2014
Optimisation

Contrôle final du lundi 6 janvier 2014. Durée 120 minutes

Exercice 1. La méthode de la sur-relaxation (**7 p.**) Le but de cet exercice est de donner une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode de la sur-relaxation.

Rappelons qu'une méthode itérative pour la résolution de l'équation $Ax = b$ part d'une décomposition de la forme $A = M - N$, avec M inversible, et que la méthode associée à cette décomposition converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Rappelons aussi que toute matrice carrée se décompose comme $A = D + L + U$, avec D diagonale, L triangulaire inférieure stricte et U triangulaire supérieure stricte.

Partie I. Considérations générales. Dans cette partie, nous considérons une méthode itérative convergente (mais non spécifiée).

1. Montrer que $|\det(M^{-1}N)| < 1$. (Indication : quel rapport entre déterminant et valeurs propres ?)
2. En déduire que $|\det M| > |\det N|$.
3. Application : si la méthode repose sur le choix $M = \alpha D + L$, $N = \beta D - U$, montrer que :

3.a) Les éléments qui se trouvent sur la diagonale de A sont non nuls.

3.b) $\alpha \neq 0$.

3.c) $\alpha - \beta = 1$.

3.d) $|\alpha| > |\beta|$.

Partie II. Etude de la méthode de la sur-relaxation. Si $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, alors la méthode de la sur-relaxation (de paramètre ω) consiste à choisir

$$M = \frac{1}{\omega} D + L, \; N = \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D - U.$$

1. Montrer que, si la méthode converge, alors nécessairement :

1.a) Les éléments qui se trouvent sur la diagonale de A sont non nuls.

1.b) $\omega \in]0, 2[$.

2. Que devient cette méthode si $\omega = 1$?
3. Supposons A réelle, symétrique, définie positive. En s'inspirant de la méthode de Gauss-Seidel, montrer que la méthode de la sur-relaxation converge si et seulement si $\omega \in]0, 2[$.

Exercice 2. Autour de la méthode du gradient à pas constant (**11 p. + question bonus**)

Nous considérons le problème de minimisation $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Rappelons que la méthode du gradient à pas constant est la suivante : $\rho > 0$ est fixé, et nous définissons par récurrence (à partir de $x^0 \in \mathbb{R}^n$)

$$x^{k+1} = x^k - \rho \nabla f(x^k), \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Rappelons aussi le résultat suivant concernant la convergence de la méthode :
Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, et s'il existe $a, b > 0$ tels que

$$a \, \mathrm{I}_n \leq H_x f \leq b \, \mathrm{I}_n, \; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

alors la méthode du gradient à pas constant converge pour tout $\rho \in \left] 0, \frac{2}{b} \right[$, au sens où pour un tel ρ nous avons $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^*$, avec x^* l'unique point de minimum de f.

Dans ce qui suit, nous allons étudier de plus près la méthode du gradient à pas constant si $n = 1$.

Nous considérons une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que : il existe a, $b > 0$ tels que $a \leq f''(x) \leq b, \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Nous considérons la fonction auxiliaire

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \rho\ f'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ici, $\rho > 0$ est une constante (qui n'est pas fixée à l'avance).

Nous posons $\gamma = \max\{|1 - \rho b|,\ |1 - \rho a|\}$.

1. Trouver (soit en fonction de a et ρ, soit en fonction de b et ρ) la formule de γ respectivement dans les cas suivants :

1.a) $0 < \rho < \dfrac{1}{b}$.

1.b) $\dfrac{1}{b} \leq \rho \leq \dfrac{2}{a+b}$.

1.c) $\rho > \dfrac{2}{a+b}$.

(Un dessin peut aider.)

2. Montrer que $|t| \leq \gamma$, $\forall\, t \in [1 - \rho b, 1 - \rho a]$. (Une explication graphique suffit.)
3. En utilisant le théorème des accroissements finis (appliqué à la fonction g) et la question précédente, montrer que $|g(x) - g(y)| \leq \gamma |x - y|$, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$.
4. Combien vaut $g(x^*)$? Et $g(x^k)$?
5. Montrer que $|x^{k+1} - x^*| \leq \gamma |x^k - x^*|$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
6. En déduire une condition suffisante (portant sur γ) pour la convergence de la méthode du gradient à pas constant.
7. Retrouver le théorème rappelé au début de l'exercice : si $\rho \in \left]0, \dfrac{2}{b}\right[$, alors la méthode du gradient à pas constant converge.

Nous considérons, dans la dernière partie, la quantité $\lambda = \min\{|t|\,;\ t \in [1 - \rho b, 1 - \rho a]\}$.

8. Montrer que $|g(x) - g(y)| \geq \lambda |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
9. Si $\rho \geq \dfrac{2}{a}$, montrer que $\lambda \geq 1$.
10. En déduire que, si $\rho \geq \dfrac{2}{a}$, alors la méthode du gradient à pas constant ne converge pas.
11. (Question bonus) Dans la pratique, l'une des difficultés vient du fait que b n'est pas connu. Si tel est le cas, alors avant la mise en œuvre de l'algorithme du gradient à pas constant il faut commencer par trouver un ρ convenable.

   Dans ce qui suit, nous supposons que a et b ne sont pas connus, mais qu'en revanche nous disposons de l'information suivante : $b \leq 2a$.

   Nous considérons l'algorithme suivant, du type prédiction-correction, destiné à trouver une valeur convenable de ρ.

   Initialisation. Nous partons avec $\rho = 2$ et avec un $x^0 \in \mathbb{R}$ quelconque (par exemple $x^0 = 0$). La prédiction est que $\rho = 1$ est convenable. (Il n'y a pas de faute de frappe : la prédiction est la moitié du ρ initial.)

   Calculs. Nous calculons x^1 et x^2.

   Correction. Si $x_1 = x_0$, alors $x_0 = x^*$. Stop. Sinon : si $|x^2 - x^1| < |x^1 - x^0|$, alors la valeur $\dfrac{\rho}{2}$ convient pour la méthode du gradient à pas constant.

   Sinon, nous remplaçons ρ par $\dfrac{\rho}{2}$ et nous recommençons.

   Montrer que l'algorithme de prédiction-correction ne comporte qu'un nombre fini d'étapes, et que pour le ρ donné par cet algorithme la méthode du gradient à pas constant converge.

Exercice 3. Calcul de lagrangien (2 p.) Nous considérons le problème de minimisation
$\min(x^2 + y - z^3)$ sous les contraintes $x \geq 0,\ x^2 - y^2 = 1,\ y - z \leq 5$.

1. Ecrire le lagrangien du problème.
2. Si (x, y, z) est solution du problème de minimisation, écrire en détail le système d'équations satisfaites par le lagrangien. (On ne demande ni de calculer (x, y, z), ni de montrer son existence.)