Optimisation

Licence Mathématiques et Gestion 2013-2014

Problème

L'entreprise Doubeliou & father vend du pétrole et désire optimiser la gestion de son stock. La demande est de 300 barils par jour. Les Doubeliou honorent les demandes des clients sans les faire attendre. Les livraisons ordinaires ont lieu les lundis, au prix de 120 € par baril. En dehors de ce jour, le pétrole est surfacturé de 80 € par baril. Le coût du stockage est de 6 € par baril et par jour. Comment MM Doubeliou et père doivent-ils gérer leur entreprise afin d'optimiser les frais sur quatre semaines (du lundi au dimanche) ?

Solution

- Les inconnues sont : les quantités x_j livrées le jour j, avec $j \in [\![1, 28]\!]$
- Contraintes évidentes :
  $x_j \geq 0$, $j \in [\![1, 28]\!]$
  $\sum_{j=1}^{n} x_j \geq 300\, n$, $n \in [\![1, 28]\!]$ (on honore les commandes. On suppose qu'il n'y a pas de stock initial)
- Fonction objectif (qu'il s'agit de minimiser)

$$f(x) = \sum_{j=1,8,15,22} 120 x_j + \sum_{j \neq 1,8,15,22} 200 x_j + 6 \sum_{n=1}^{27} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 300\, n \right)$$

Modélisation

Dans un réseau routier reliant deux à deux n villes, déterminer le groupe de k villes qui génèrent le plus de traffic mutuel.

Solution

- On numérote les villes $V_1, \dots, V_n$
- Soit c_{ij} le trafic de la ville V_i vers la ville V_j, $i, j \in [\![1, n]\!]$. (Si on prend en compte le trafic intraurbain, alors $c_{ii} \neq 0$)
- Le inconnue est une partie A à k éléments de l'ensemble des villes, que l'on identifie à un ensemble de k indices i dans $[\![1, n]\!]$
- Problème de maximisation

$$\max \left\{ \sum_{i,j \in A} c_{ij} \; ; \; A \subset [\![1, n]\!], \; \#A = k \right\}$$

Modélisation

Début du problème

Sur un marché, il existe déjà n consommateurs C_i, $i = 1, \dots, n$, et m produits P_j, $j = 1, \dots, m$.
Chaque produit P_j est jugé par les consommateurs par rapport à p caractéristiques, que l'on décrit à travers un vecteur à p coordonnées positives, $V^j = (V_1^j, \dots, V_p^j)$, $j = 1, \dots, m$.
Par ailleurs, chaque consommateur se représente un produit idéal, dont les caractéristiques sont données par le vecteur à coordonnées positives $I^i = (I_1^i, \dots, I_p^i)$, $i = 1, \dots, n$.
Parmi les produits présents sur le marché, le consommateur C_i choisit le produit P_k le plus proche de son produit idéal I^i, c'est-à-dire le produit qui réalise le minimum de $\min_{j=1,\dots,m} |I^i - V^j|$.
(Ici, $| \ |$ désigne la distance euclidienne.)

Modélisation

-suite du problème-

Une entreprise désire définir un nouveau produit P, de caractéristiques données par le vecteur à coordonnées positives V. Par ailleurs, V doit satisfaire d'autres contraintes : $V \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ est connu.
Le coût de ce nouveau produit est donnée par une fonction $f(V)$. Le profit apporté à l'entreprise par le consommateur C_i est nul si C_i n'est pas plus attiré par P que par les produits déjà existants, et vaut $p_i > 0$ si le nouveau produit attire C_i.
Sachant que le but de l'entreprise est de maximiser son bénéfice, quel est le problème mathématique à résoudre ?

Solution

- La fonction suivante vaut 1 si P attire C_i, 0 sinon :

$$g_i(V) = \begin{cases} 1, & \text{si } |I^i - V| < |I^i - V^j|, \forall j \in [\![1, m]\!] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

  Le choix « $<$ » traduit le conservatisme des clients. S'ils sont attirés par la nouveauté, il faudrait remplacer par « $\leq$ »

- Le profit est (avec $n =$nombre de clients)

$$g(V) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, g_i(V) - f(V)$$

- On doit maximiser g sous les contraintes $V \in \mathcal{U}$ et $V > 0$