OPTIMISATION

LICENCE MATHÉMATIQUES ET GESTION 2013-2014

Informations pratiques

Petru Mironescu
Professeur, Institut Camille Jordan
Mél mironescu@math.univ-lyon1.fr
Tél 04 72 44 81 13
Page web http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/
Page web du cours http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/optimisation_l3.html

Organisation
8 séances de cours magistral
6 séances de TD/TP

Contrôle des connaissances
Projet en C (une note en C++, une note en optimisation) : 25%
Une interrogation écrite le 17 octobre : 25 %
Examen final (en janvier) : 50 %

Projet
D'après le livre
Michel Bierlaire
Introduction à l'optimisation différentiable
Editions PPUR 2006

Objectifs
Modélisation des problèmes d'optimisation
Résolution exacte dans quelques cas simples (par la méthode des multiplicateurs)

Programmation linéaire : aspects théoriques (simplexe), et pratiques (utilisation de R)
Méthodes approchées : aspects théoriques (convergence) et pratiques (programmation)
Inversion des matrices : méthodes exactes et approchées. Aspects théoriques (convergence) et pratiques (programmation)

Références

* Jean-Christophe Culioli, Introduction à l'optimisation, Ellipses, 1996
* Michel Bierlaire, Introduction à l'optimisation différentiable, Editions PPUR 2006
* Alain Billionnet, Optimisation discrète, Dunod, 2007
* Une question ? http://fr.wikipedia.org

Plan général

* **Modélisation**
* **Programmation linéaire**
* **Calcul différentiel**
* **Analyse matricielle**
* **Optimisation nonlinéaire**

Modélisation

Modélisation

But du jeu

Reformuler en termes mathématiques (et non pas résoudre) les problèmes suivants.

Exercice 1

L'opérateur téléphonique historique Jaune et Rouge veut installer une antenne téléphonique pour desservir quatre nouveaux clients. Ceux-ci ont les caractéristiques suivantes :

Client	Coordonnées (en km)	Heures de communication/jour
1	$(5, 10)$	200
2	$(10, 5)$	150
3	$(0, 12)$	200
4	$(12, 0)$	300

Par ailleurs, la loi interdit d'installer une nouvelle antenne à moins de 10 km des antennes déjà existantes, qui sont aux points $(-5, 10)$ et $(5, 0)$. Quel sera l'emplacement final de l'antenne ?

Exercice 2

Le Château Optimhome peut acheter une quantité de pinot ne dépassant pas une tonne, au prix de 3 euros le kg. Ce raisin peut être vinifié pour obtenir soit du rosé (coût de la vinification : 2 euros par kg), soit du rouge (coût : 3,5 euros). Un kg de raisins donne 750 ml de vin. Les grandes surfaces offrent des prix dégressifs à l'achat : le litre de rosé est acheté 15 euros, moins un euro par hectolitre produit. De même, le rouge est acheté à 23 euros par litre, moins 2 euros par hectolitre. Comment le château doit-il organiser sa production ?

Exercice 3

M. J. Phelps a comme mission impossible le sauvetage du monde. En aura-t-il les moyens, sachant que : • une bombe nucléaire a été amorcée par le dictateur du Propan au bord d'un yacht amarré à 50 mètres du rivage ; • M. Phelps se trouve à 100 m du point de la plage le plus proche du yacht. Il (M. Phelps, pas le yacht) court sur la plage à 18 km/h et nage à 10 km/h ; • la bombe est programmée pour exploser dans 65 secondes, alors qu'il en faut 30 pour la désamorcer.

Exercice 4

M. I. Jones, qui déteste les serpents venimeux, doit, dans sa quête pour retrouver la croix de Coloradulte, éviter une salle remplie de ceux-ci. Cette salle est longue de 10 m et haute de 5. Pour y parvenir, M. Jones veut se servir d'une échelle appuyée contre le mur et allant du mur droit au mur gauche de la salle. Quelle est la longueur minimale de l'échelle ?

Exercice 5

L'entreprise Geppetto & Cie est un spécialiste mondialement reconnu des pantins et trains en bois. Chaque pantin lui rapporte, à la vente, 3 €, et chaque train 2 €. Pour produire un pantin, il faut une heure de menuiserie et deux heures de finissage. Pour un train, il en faut une heure et une heure. M. Geppetto emploie deux menuisiers et deux spécialistes du finissage, qui travaillent 40 heures par semaine. Il passe lui-même 20 heures par semaine à des travaux de finissage. Les trains ont beaucoup de succès, et il sait qu'il pourra vendre toute sa production. Par contre, il ne peut vendre plus de 40 pantins par semaine. Que doit faire M. Geppetto pour optimiser son revenu ?

Exercice 6

La banque Silverman Trumpet veut investir un million d'euros dans des obligations, prêts immobiliers, leasings ou prêts personnels. Les rendements annuels de ces investissements sont respectivement de 6 %, 10 %, 8 % et 13 %. Afin de limiter les risques, la banque s'impose : • d'allouer au prêts personnels au plus la moitié de ce qui est investi en obligations ; • d'investir en prêts immobiliers au plus autant qu'en leasings ; • de ne pas dépasser 20 % de prêts personnels. Quelle doit être la stratégie de la banque ?

Exercice 7

L'entreprise Doubeliou & father vend du pétrole et désire optimiser la gestion de son stock. La demande est de 300 barils par jour. Les Doubeliou honorent les demandes des clients sans les faire attendre. Les livraisons ordinaires ont lieu les lundis, au prix de 120 € par baril. En dehors de ce jour, le pétrole est surfacturé de 80 € par baril. Le coût du stockage est de 6 € par baril et par jour. Comment MM Doubeliou et père doivent-ils gérer leur entreprise afin d'optimiser les frais sur quatre semaines (du lundi au dimanche) ?

Exercice 8

Dans un réseau routier reliant deux à deux n villes, déterminer le groupe de k villes qui génèrent le plus de traffic entre elles.

Exercice 9

Sur un marché, il existe déjà n consommateurs C_i, $i = 1, \ldots, n$, et m produits P_j, $j = 1, \ldots, m$.

Chaque produit P_j est jugé par les consommateurs par rapport à p caractéristiques, que l'on décrit à travers un vecteur à p coordonnées positives, $V^j = (V_1^j, \ldots, V_p^j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Par ailleurs, chaque consommateur se représente un produit idéal, dont les caractéristiques sont données par le vecteur à coordonnées positives $I^i = (I_1^i, \ldots, I_p^i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Parmi les produits présents sur le marché, le consommateur C_i choisit le produit P_k le plus proche de son produit idéal I^i, c'est-à-dire le produit qui réalise le minimum de $\min\limits_{j=1,\ldots,m} |I^i - V^j|$. (Ici, $|\ |$ désigne la distance euclidienne.)

Une entreprise désire définir un nouveau produit P, de caractéristiques données par le vecteur à coordonnées positives V. Par ailleurs, V doit satisfaire d'autres contraintes : $V \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} \subset (\mathbb{R}_+)^p$ est connu.

Le coût de ce nouveau produit est donnée par une fonction $f(V)$. Le profit apporté à l'entreprise par le consommateur C_i est nul si C_i n'est pas plus attiré par P que par les produits déjà existants, et vaut $p_i > 0$ si le nouveau produit attire C_i.

Sachant que le but de l'entreprise est de maximiser son bénéfice, quel est le problème mathématique à résoudre ?