Licence Mathématiques et Gestion
Mathématiques pour l'actuaire
Année 2013-2014

Feuille d'exercices no 2
Programmation linéaire. Calcul différentiel

Exercice 1. Résoudre les problèmes suivants :

1. $\min(2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4)$ sous les contraintes $x_1, \dots, x_4 \geq 0$, $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 7$, $-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 1$, $3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 9$.
2. $\max(x_1+x_2+x_3+x_4)$ sous les contraintes $x_1, \dots, x_4 \geq 0$, $x_1+2x_2+x_3 = 2$, $x_1+x_2+5x_3 = 12$, $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 13$.

Exercice 2. Montrer les formules de Taylor à l'ordre 2 pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On se ramenera à l'étude de la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f((1-t)x + ty)$.

Exercice 3. Trouver la nature des points critiques des fonctions suivantes :

1. y
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 4. Décider si les fonctions suivantes sont coerci(ti)ves :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 \pm y^2$.
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |Ax - b|$, avec $A \in M_{m,n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 5. Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour montrer l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}, \ \forall\, x_1, \dots, x_n > 0.$$

Exercice 6. Que dit la méthode du multiplicateur de Lagrange dans $\mathbb{R}$?