Licence Mathématiques et Gestion
Mathématiques pour l'actuaire
Année 2013-2014

Feuille d'exercices no 3
Analyse matricielle

Toutes les matrices considérées dans cette feuille sont carrées, de taille n.

Rappels. 1. La notation $A > 0$ signifie que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique et que $\sigma(A) \subset (0, \infty)$.
2. Si A est symétrique, alors nous avons le *critère de Laplace*

$$A > 0 \iff \det(a_i^j)_{1\leq i\leq l}^{1\leq j\leq l} > 0,\ \forall\, l \in [\![1, n]\!].$$

3. Toute matrice A est trigonalisable sous la *forme de Jordan*. En particulier, il existe P inversible et T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$, avec :
a) Sur la diagonale de T, on ait les valeurs propres de A (multiplicité comprise).
b) Si $j \neq i$ et $j \neq i + 1$, alors $t_i^j = 0$.
c) On ait $t_i^{i+1} \in \{0, 1\}$, $\forall\, i \in [\![1, n-1]\!]$.
4. Le *rayon spectral* d'une matrice est

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Exercice 1. La matrice A admet une factorisation LU si on peut écrire $A = LU$, avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

1. Montrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de factorisation LU.
2. Soit $A > 0$. Montrer, par récurrence sur n, que A admet une factorisation LU. [On pourra utiliser le critère de Laplace.]
   Si, de plus, on exige $l_i^i = 1$, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, alors la factorisation est unique.
3. Expliquer comment résoudre le système $Ax = b$ à partir de la factorisation $A = LU$.
4. Ecrire, sous R, un programme pour résoudre le système $Uy = c$.

Exercice 2.

1. Rappeler le procédé de Gramm-Schmidt dans $\mathbb{R}^n$. Quelles sont ses entrées ? Ses sorties ? Peut-on le modifier afin que la sortie soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$?
2. En appliquant le procédé de Gramm-Schmidt modifié aux colonnes de A, montrer que toute matrice A a une factorisation $A = QR$, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure.
3. Résoudre $Ax = b$ à partir de la factorisation QR.

Exercice 3. Soit $A > 0$.

1. Montrer, par récurrence sur n, que A admet une factorisation de Cholesky $A = R^* R$, avec R triangulaire supérieure. [On pourra utiliser le critère de Laplace.]
2. Si, de plus, on exige $r_i^i > 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$, alors R est unique.

Exercice 4. Trouver « les » factorisations $A = LU$, $A = QR$ et $A = R^* R$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (*Formule du rayon spectral*) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $\| \ \|$ (ou $| \ |$) une norme sur $\mathbb{R}^n$. Nous notons encore $\| \ \|$ (ou $| \ |$) la norme matricielle subordonnée.

1. Si $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\|A^n\| \geq |\lambda|^n$.
2. En déduire que $\rho(A) \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|$ (à supposer que la limite existe).
3. On suppose vrai le résultat suivant : (P) si on se donne $\varepsilon > 0$, alors il existe une norme $| \ |$ telle que $|A| \leq \rho(A) + \varepsilon$. Montrer la formule
$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \text{ (quelle que soit la norme).} \tag{A}$$
4. Soit $\delta > 0$. Montrer que A s'écrit sous la forme $A = PTP^{-1}$, avec T triangulaire supérieure, et $|t_i^j| < \delta$ si $j > i$. [On pourra s'inspirer de la forme de Jordan.]
5. Avec $P = \mathrm{col}\,(f_1, \ldots, f_n)$ comme dans la question précédente, examiner $\|A\|$ pour la norme $\left\| \sum_{j=1}^n x_j f_j \right\| := \max_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$.
6. Conclure.

Exercice 6. Soit $A > 0$.

1. Trouver les valeurs de α telles que la méthode itérative *de Richardson*, consistant à prendre $M = \alpha I_n$, converge.
2. Y a-t-il un α qui semble meilleur que les autres ?

Exercice 7. Mettre en œuvre, sous R, la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 8. Etudier la méthode itérative *des relaxations successives* : on décompose $A > 0$ sous la forme $A = D + L + U$ (comme dans la méthode de Gauss-Seidel), puis on considère la méthode itérative

$$\begin{cases} x^{k+1} = \alpha y^{k+1} + (1-\alpha) x^k \\ D y^{k+1} + L x^{k+1} = -U x^k + b \end{cases}.$$