Licence Mathématiques et Gestion
Mathématiques pour l'actuaire
Année 2013-2014

Feuille d'exercices no 4
Optimisation : méthodes itératives

Exercice 1. (*Méthode de Newton*) On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La méthode de Newton pour la résolution approchée de l'équation $f(x) = 0$ est la suivante : on part de $x^0 \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence x^{k+1} comme l'intersection de la tangente en x^k au graphe de f avec l'axe Ox.

1. Ecrire explicitement l'algorithme associé à cette méthode.
2. Etudier la convergence de l'algorithme, en précisant les hypothèses sur f et x^0.
3. Etudier la vitesse de convergence de l'algorithme.
4. Mettre en œuvre cet algorithme afin de résoudre l'équation $x = \sqrt{a}$ avec $a > 0$. On mettra cette équation sous la forme $x^2 - a = 0$.
   Application numérique : $a = 5$, $x^0 = 5$, erreur 10^{-6}.
5. Donner une estimation de nombre d'itérations nécessaires pour calculer $\sqrt{a}$ avec une erreur relative $< \varepsilon$.
6. Autre application : $f(x) = 2x - \cos x$, $x^0 = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Exercice 2. (*Dichotomie*) On considère la résolution de l'équation $f(x) = 0$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Rappeler la méthode de la dichotomie. Quelles est la condition nécessaire à sa mise en œuvre ? Quelle est la condition sur f qui assure la convergence de la méthode ?
2. Rappeler la méthode de Newton. On suppose que $f' > 0$. Dans ce cas, discuter la convergence de la méthode.
3. On suppose toujours $f' > 0$. Proposer un algorithme convergeant combinant les deux méthodes.
4. Programmer la méthode combinée Newton+dichotomie.

Exercice 3. (*Gradient à pas constant*) Programmer la méthode du gradient à pas constant $x^{k+1} = x^k - \rho f'(x^k)$. Tester cette méthode sur $f(x) = x^2 - \sin x$, avec des différents jeux de données.

Exercice 4. (*Gradient à pas optimal*) On cherche à trouver le minimum de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
La méthode du gradient à pas optimal est la suivante : on calcule la suite (x^k) par la récurrence $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$, où α^k est solution de

$$\min\{f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

1. On suppose f a – convexe, avec $a > 0$. Montrer la convergence de la méthode.
2. Quels sont les problèmes posés par la mise en œuvre numérique de la méthode ?
3. Proposer un algorithme basé sur la méthode du gradient à pas constant, consistant à poser $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$, où α^k est choisi dans une liste donnée à l'avance : $\alpha,\ \frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{4}, \dots,\ \frac{\alpha}{2^l}, \dots$