Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse | Année 2018-2019

Quelques exercices et questions de cours à préparer pour les contrôles #1 et terminal

Les exercices suivis de $*$ sont plus difficiles.

Exercice # 1. Soit $F \subset E$, avec $(E, \| \ \|)$ normé. Nier

1. « F est fermé ».
2. « F est borné ».

Exercice # 2. Soit $K \subset \mathbb{K}^n$. En utilisant la caractérisation des compacts de $(\mathbb{K}^n, \| \ \|)$, nier « K est compact ».

Même question dans un espace E de dimension finie.

Exercice # 3. Nous considérons : deux espaces normés $(E, \| \ \|)$, $(F, ||| \ |||)$, un compact $K \subset E$ et une fonction continue $f : K \to F$. En utilisant les caractérisations séquentielles des compacts et des fonctions continues, montrer que $f(K)$ est un compact.

Exercice # 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe de f est un compact de $\mathbb{R}^2$ (muni d'une norme).

Exercice # 5.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $L := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$.
   (a) Montrer que f est L-Lipschitzienne.
   (b) Montrer que L est la meilleure constante de Lipschitz de f, au sens suivant : si $M < L$, alors f n'est pas M-Lipschitzienne.
2. Montrer que la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne.
3. Montrer que la fonction $| \ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice # 6. Montrer que l'équivalence de deux normes sur un espace vectoriel (réel ou complexe) E est une relation d'équivalence.

Exercice # 7.

1. Montrer que les ensembles bornés de $\mathbb{K}^n$ ne dépendent pas du choix d'une norme. De manière équivalente : soient $\| \ \|$ et $||| \ |||$ deux normes sur $\mathbb{K}^n$ et soit $A \subset \mathbb{K}^n$. Alors A est borné pour $\| \ \|$ si et seulement si A est borné pour $||| \ |||$.
2. Même question dans un espace E de dimension finie.
3. Énoncer et prouver le résultat analogue dans un espace E quelconque (donc pas forcément de dimension finie).
4. Donner un exemple d'espace vectoriel E, de deux normes, $\| \ \|$ et $||| \ |||$, sur E, et d'une partie A de E tels que A soit borné pour $\| \ \|$ mais pas pour $||| \ |||$.

Exercice # 8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, avec les opérations usuelles sur les polynômes. Pour $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, soient

$$\|P\| := \sum_{j=0}^{n} |a_j|, \ |||P||| := \sum_{j=0}^{n} (j+1)|a_j|.$$

Montrer que

1. $\| \ \|$ et $||| \ |||$ sont des normes sur E.
2. Ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice # 9. Nous travaillons sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $(E, ||| \ |||)$ un espace normé. Soient F un espace vectoriel et $T : F \to E$ une application linéaire et *injective*. Posons $\|x\| := |||T(x)|||, \forall x \in F$. Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur F.
2. Soit E un espace vectoriel *de dimension finie*, n. En utilisant la question précédente avec $F = \mathbb{K}^n$ et T *bijective*, montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.

Exercice # 10. Soit $T : E \to F$ une application linéaire, avec $(E, \| \ \|)$ et $(F, ||| \ |||)$ espaces normés. En utilisant la caractérisation des T qui sont continues, montrer que

$$[T \text{ n'est pas continue }] \iff [\text{il existe } (x^j) \subset E \text{ telle que } \|x^j\| = 1, \forall j \text{ et } |||T(x^j)||| \to \infty].$$

Exercice # 11. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé de dimension finie, $(F, ||| \ |||)$ un espace normé et $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est continue. [Indication : on pourra montrer la continuité pour une norme particulière sur E.]

Exercice # 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit
$$\| \ \| : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{R}, \ \|P\| = |P(1)| + |P(2)| + \cdots + |P(n+1)|, \ \forall P \in \mathbb{C}_n[X].$$
Montrer que $\| \ \|$ est une norme.
2. Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ (qui peut dépendre de n) telle que
$$|P(0)| \le C(|P(1)| + |P(2)| + \cdots + |P(n+1)|), \ \forall P \in \mathbb{C}_n[X].$$

Exercice # 13. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

1. Soit $T : E \to \mathbb{R}$, $T(f) := \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$ (intégrale généralisée sur $]0,1]$). Montrer que
   (a) T est bien définie et linéaire.
   (b) T n'est pas continue.
2. Que pouvons-nous dire de la dimension de E ?

Exercice # 14. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Montrer qu'une boule ouverte de E est comme son nom l'indique : ouverte.

Exercice # 15. Soient $(E, \| \ \|)$, $(F, ||| \ |||)$ deux espace normés. Soit $T : E \to F$ une application linéaire et continue. Rappelons qu'il existe un $C \in [0, \infty[$ tel que

$$|||T(x)||| \le C\|x\|, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une plus petite constante C_0 vérifiant (1).
2. Si E est un espace *de dimension finie*, montrer que « C_0 est atteinte », au sens où il existe un $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $|||T(x)||| = C_0\|x\|$.
3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme
$$\|P\| := \sum_{j=0}^{n} |a_j|, \ \forall P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X].$$
Soit
$$T : E \to \mathbb{R}, \ T(P) := \frac{0}{1}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \cdots + \frac{n}{n+1}a_n, \ \forall P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in E.$$

(a) Montrer que T est linéaire et continue.

(b) Calculer C_0.

(c) Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $|T(P)| = C_0 \|P\|$.

Exercice # 16. $*$ Soient $K_0, K_1, \ldots, K_j, \ldots, \ldots$ des compacts de $\mathbb{K}^n$ tels que :

(a) $K_{j+1} \subset K_j$, $\forall j \geq 0$.

(b) K_j est non vide, $\forall j$.

Pour chaque j, soit $x^j \in K_j$.

1. Y a-t-il un tel x^j ?
2. Montrer que (x^j) contient une sous-suite convergente, disons $x^{j_k} \to x$.
3. Montrer que $x \in K_0$.
4. Montrer que $x \in K_j$, $\forall j$.
5. En déduire que, si (K_j) est une suite de compacts de $\mathbb{K}^n$ vérifiant a) et b), alors $\cap_{j \geq 0} K_j$ est non vide.
6. A-t-on utilisé l'hypothèse $K_j \subset \mathbb{K}^n$?

Exercice # 17. $*$ Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Soient $K, L \subset E$ deux compacts non vides. Nous munissons $E \times E$ de

$$|||(x,y)||| := \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in E.$$

1. Montrer que $||| \ |||$ est une norme sur $E \times E$.
2. Montrer que $K \times L$ est un compact de $E \times E$.
3. En supposant K et L *disjoints*, montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $\forall x \in K$, $\forall y \in L$.
4. Retrouver le résultat de la fonction précédente en considérant $f : E \times E \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \|x - y\|$, $\forall (x,y) \in E \times E$.
5. Montrer que l'ensemble $K + L$ est compact, où

$$K + L := \{x + y\,;\, x \in K,\, y \in L\}.$$

Exercice # 18. $*$ Soit K un espace métrique compact. [Si on n'est pas familier avec cette notion, on pourra considérer $(F, ||| \ |||)$ normé et $K \subset F$ compact.] Soit $E = \mathscr{C}^0(K, \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\,;\, x \in K\}$.

1. Montrer que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit $T : E \to \mathbb{R}$. On suppose T *linéaire* et *positive*, la deuxième propriété se traduisant ainsi :

$$[\forall f \in E, f \geq 0] \implies [Tf \geq 0].$$

Montrer que T est continue.

Exercice # 19. $*$ Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé *de dimension finie* et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous supposons f *coercive*, c'est-à-dire : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $R = R_A$ tel que $f(x) > A$ si $\|x\| > R$.

Montrer que f a un point de minimum. [Indication : considérer un point de minimum de f sur $\overline{B}(0,R)$, avec R « très grand ».]

Exercice # 20. $*$ Soit $(F, \| \ \|)$ un espace normé et soit E un sous-espace strict et de *de dimension finie* de F. Soit $y \in F \setminus E$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \|y - x\|$ a un point de minimum sur E. Indication : exercice précédent.
2. Si x est un point de minimum comme au point précédent, soit $v := y - x$. Montrer que :
   (a) $v \notin E$.
   (b) $\|v - z\| \geq \|v\|$, $\forall\, z \in E$.
3. (Lemme de Riesz) Montrer qu'il existe un $e \in F \setminus E$ avec les propriétés suivantes :
   (a) $\|e\| = 1$.
   (b) $\|e - z\| \geq 1$, $\forall\, z \in E$.

   Indication : on pourra se servir du v du point précédent.

Exercice # 21. $*$

1. Soit $(F, \| \ \|)$ un espace normé *de dimension infinie* (c'est-à-dire, tel qu'il existe une suite libre $(f_j)_{j\geq 0}$). Montrer qu'il existe une suite $(e_j)_{j\geq 0}$ telle que
   (a) $\|e_j\| = 1$, $\forall\, j$.
   (b) $\|e_j - e_k\| \geq 1$, $\forall\, j \neq k$.
   (c) En particulier, la suite (e_j) est dans la boule unité $\overline{B}(0,1)$, mais ne contient aucune sous-suite convergente.
2. (Théorème de Riesz) Soit $(F, \| \ \|)$ un espace normé. Alors $\overline{B}(0,1)$ est compacte si et seulement si F est de dimension finie.

Exercice # 22. $*$ Soit E un espace vectoriel réel.

1. Soit $\| \ \|$ une norme sur E et $U = B(0,1)$ la boule unité ouverte de $(E, \| \ \|)$.
   (a) Montrer que $0 \in U$.
   (b) Montrer que U est convexe.
   (c) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un $\varepsilon = \varepsilon(x) \in]0, \infty[$ tel que
   $$\{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, \lambda x \in U\} =]-\varepsilon, \varepsilon[.$$
2. « Réciproquement », soit $U \subset E$ un ensemble avec les propriétés (a)–(c). Nous nous proposons de montrer qu'il existe une norme $\| \ \|)$ sur E telle que pour cette norme on ait $U = B(0,1)$. Posons $\|0\| = 0$ et, si $x \neq 0$, $\|x\| := 1/(\varepsilon(x))$.

   Montrer que $\| \ \|$ est une norme et que $U = B(0,1)$.
3. Montrer que si deux normes ont la même boule unité ouverte, alors elles coïncident.

Question de cours # 1. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire (respectivement hermitien) sur l'espace réel (respectivement complexe) E. Soit $\| \ \|$ la norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|,\ \forall\, x, y \in E,$$

respectivement complexe

$$|\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle| \leq 2\|x\|\,\|y\|,\ \forall\, x, y \in E.$$

Question de cours # 2.

1. Définir le conjugué de p, où $1 \leq p \leq \infty$.
2. Énoncer et montrer l'inégalité de Young.

Question de cours # 3. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Montrer que $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, est Lipschitzienne par rapport à la norme $\| \ \|_1$.

Question de cours # 4. Soient $\| \ \|$, $|\!|\!| \ |\!|\!|$ deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E. Si $(x^j) \subset E$ et $x \in E$, montrer que $x^j \to x$ pour la distance induite par $\| \ \|$ si et seulement si $x^j \to x$ pour la distance induite par $|\!|\!| \ |\!|\!|$.

Question de cours # 5. Soit $(E, |\!|\!| \ |\!|\!|)$ un espace normé. Soient F un espace vectoriel et $T : F \to E$ une application linéaire et *bijective*. Posons $\|x\| := |\!|\!|T(x)|\!|\!|, \forall x \in F$. Nous admettons le fait que $(E, \| \ \|)$ soit un espace normé. Montrer que :

1. $T : F \to E$ et $T^{-1} : E \to F$ sont continues.
2. Si $A \subset F$, alors A est fermé (respectivement ouvert ou borné ou compact) si est seulement si $T(A)$ est fermé (respectivement ouvert ou borné ou compact).

Question de cours # 6. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé de dimension finie. Soit $K \subset E$. Montrer l'équivalence [K est compact] $\Longleftrightarrow$ [K est fermé et borné].