Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse | Année 2018-2019

Quelques exercices et questions de cours à préparer pour le contrôle terminal

Exercice # 1. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Pour $0 < h < 1$, montrer que $g(h) + g(1-h) \leq g(0) + g(1)$.
2. On suppose g dérivable (à droite) en 0 et (à gauche) en 1. Montrer que $g'(0) \leq g'(1)$.

Exercice # 2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f' est croissante. [On pourra soit adapter la preuve de l'exercice précédent, soit considérer, pour tous $x, y \in I$ avec $x \leq y$, la fonction auxiliaire $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(x + t(y-x))$, $\forall\, t \in [0,1]$.]

Exercice # 3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec f' croissante. Montrer que f est convexe.

Exercice # 4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Pour tout $x \in I$, montrer que :

$$[x \text{ est un point de minimum de } f] \iff [f'(x) = 0].$$

Exercice # 6. (Dictionnaire pour les fonctions convexes) Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe. Pour $a, b \in U$, soit $g = g_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a + t(b-a))$, $\forall\, t \in [0,1]$.

1. Montrer que g est bien définie.
2. Montrer l'équivalence :

$$[f \text{ est convexe}] \iff [g_{a,b} \text{ est convexe}, \forall\, a, b \in U].$$

Exercice # 7. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Soient $x, y \in U$. Montrer que $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq 0$. On pourra utiliser la fonction auxiliaire $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(x + t(y-x))$, $\forall\, t \in [0,1]$.

Exercice # 8. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose que

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq 0, \ \forall\, x, y \in U.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice # 9. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si la matrice hessienne de f est positive en tout point $x \in U$.

Exercice # 10. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Pour tout $x \in U$, montrer que :

$$[x \text{ est un point de minimum de } f] \iff [\nabla f(x) = 0].$$

Exercice # 11. Soient $g, h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\partial_1 f(x,y) = x^2 - y^2 \text{ et } \partial_2 f(x,y) = g(x) + h(y), \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$