Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^{e} année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2022–2023

Propriétés des noyaux de Dirichlet et Fejér

–Résumé–

Hypothèses sur la fonction f. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction :

1. Mesurable.
2. 2π-périodique.
3. (Lebesgue) Intégrable sur $]0, 2\pi[$.

Notations.

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{\imath nx},\ \forall\, N \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$T_N(f)(x) := \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_N(f)(x)}{N+1},\ \forall\, N \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{\imath nx}\ \ (N^{\text{e}} \text{ noyau de Dirichlet}), \tag{4}$$

$$F_N(x) := \frac{D_0(x) + \cdots + D_N(x)}{N+1} = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{\imath nx}\ \ (N^{\text{e}} \text{ noyau de Fejér}). \tag{5}$$

Propriétés générales.

$$\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\, dy,\ \forall\, a \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\text{Si } f(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{\imath nx}, \text{ alors } S_N(f) = f, \tag{7}$$

$$c_n(f(\cdot + h)) = e^{\imath nh} c_n(f),\ \forall\, h \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Liens entre sommes et noyaux.

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, F_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_N(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Propriétés des noyaux de Dirichlet.

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin(Ny)\ \operatorname{cotan}(y/2) + \cos(Ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\int_0^{\pi} D_N(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} D_N(y)\, dy = \pi, \tag{12}$$

$$\|D_n\|_{L^1} \le 1 + \ln \pi + \ln(n + 1/2),\ \forall\, n \ge 0. \tag{13}$$

Propriétés des noyaux de Fejér.

$$F_N(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(N+1)y/2]}{(N+1)\,\sin^2(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \tag{14}$$

$$F_N(y) \geq 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, N \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$\int_0^{\pi} F_N(y)\,dy = \int_{-\pi}^{0} F_N(y)\,dy = \pi, \tag{16}$$

$$\|F_N\|_1 = 1, \tag{17}$$

Pour tout $0 < \delta < \pi$, $F_N \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ quand $N \to \infty$, (18)

$$F_N(y) \leq \begin{cases} \dfrac{\pi^2(N+1)}{4}, & \text{si } 0 < |y| \leq \dfrac{2}{N+1} \\ \dfrac{\pi^2}{(N+1)y^2}, & \text{si } \dfrac{2}{N+1} \leq |y| \leq \pi \end{cases}. \tag{19}$$

Module de continuité. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique, son *module de continuité* ω est défini par

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\, x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{20}$$

Propriétés du module de continuité.

Dans (20), le $\sup$ est un $\max$, (21)

ω est continue et croissante. (22)

Fonctions α-hölderiennes. Si $0 < \alpha < 1$, $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est α-hölderienne s'il existe une constante finie, C, telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha},\ \forall\, x, y \in [0, 2\pi]. \tag{23}$$

La plus petite des constantes vérifiant (23) est notée $|f|_{C^\alpha}$.

Propriété du module de continuité des fonctions α-hölderiennes. Si $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est α-hölderienne et $f(0) = f(2\pi)$, alors le prolongement par 2π-périodicité de f vérifie

$$\omega(\delta) \leq 2\,|f|_{C^\alpha}\delta^{\alpha},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{24}$$