Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^{e} année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle terminal – seconde chance –
– le 25 juin 2021 –
– durée 60 minutes –

Le barème indiqué entre parenthèses est indicatif.

Exercice # 1 (4 p.). Nous munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \|_1$. Soit

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) := (x + y, x + 2y),\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer la norme triple de T. (Nous admettons sans preuve que T est linéaire.)

Exercice # 2 (3 p.). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) := f(t^2, t^3),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g est dérivable et calculer g'.

Exercice # 3 (5 p.). Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{y}{(|x| + |y|)^a}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Ici, $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouver les valeurs de a telles que f soit continue.

Exercice # 4 (4 p.). Nous munissons $\mathscr{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ de la norme uniforme $\| \|_\infty$. Soit $g \in \mathscr{C}([0, 1]; \mathbb{R})$. Soit

$$T : \mathscr{C}([0, 1]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T(f) := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx,\ \forall\, f \in \mathscr{C}([0, 1]; \mathbb{R}).$$

Montrer que T est continu. (Nous admettons sans preuve que T est linéaire.)

Exercice # 5 (3 p.). Calculer le minimum sous contrainte

$$m := \min_{x+y+z=1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Nous admettons sans preuve que ce minimum est atteint.

Exercice # 6 (3 p.). Montrer que le minimum m de la question précédente est bien atteint. Indication : examiner ce qui se passe si, par exemple, $|x| > 1$.