Autour du théorème de représentation de James

26 janvier 2023

Soit $(X, \| \ \|)$ un espace de Banach. Soit $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) := \|x\|$, $\forall\, x \in X$.

X est *uniformément convexe* s'il a la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$[x, y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1, \|x + y\| > 2 - \delta] \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

L'énoncé classique du théorème de représentation de James est le suivant :

Théorème. Soit X un espace de Banach non-trivial.

On suppose que :

1. F admet des dérivées directionnelles $\dfrac{\partial F}{\partial x}(u)$, $\forall\, x \in X$, en tout point $u \in X \setminus \{0\}$.[1]
2. X est uniformément convexe.

Si $f \in X'$, alors il existe $u \in X$ tel que

$$\|u\| = 1 \text{ et } f(x) = \|f\| \frac{\partial F}{\partial x}(u),\ \forall\, x \in X.$$

Pour la preuve, voir par exemple Willem [2, Chapitre IV, Section 14].

Nous présentons et prouvons ici un énoncé alternatif.

Théorème. Soit X un espace de Banach non-trivial.

On suppose que :

1. F admet des dérivées directionnelles en tout point $u \in X \setminus \{0\}$.

2'. Pour tout ensemble non-vide fermé convexe $C \subset X$, on peut définir une projection sur C, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in X,\ \exists\, y \in C \text{ tel que } \|x - y\| = d(x, C) := \inf\{\|x - z\|\, ;\, z \in C\}.$$

Si $f \in X'$, alors il existe $u \in X$ tel que

$$\|u\| = 1 \text{ et } f(x) = \|f\| \frac{\partial F}{\partial x}(u),\ \forall\, x \in X. \tag{1}$$

Remarque. En adaptant la preuve faite dans le cas des espaces L^p, $1 < p < \infty$, on peut montrer que l'hypothèse 2 implique l'hypothèse 2', et donc le deuxième énoncé implique le premier.

1. Un espace avec cette propriété est appelé *espace lisse*.

Preuve du théorème (deuxième forme). On peut supposer $f \neq 0$ (sinon, tout u convient). Soit

$$C := \{x \in X; f(x) = \|f\|\}.$$

Clairement, C est convexe (par linéarité de f), fermé (par continuité de f), et non-vide (car X est non-trivial). Par définition de $\|f\|$, d'une part

$$x \in C \implies \|f\| = f(x) \leq \|f\|\|x\| \implies \|x\| \geq 1, \tag{2}$$

d'autre part

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in C \text{ tel que } \|x\| < 1 + \varepsilon. \tag{3}$$

(Pour la deuxième propriété, prendre d'abord un $y \in X$ tel que $\|y\| = 1$ et $|f(y)| > \dfrac{\|f\|}{1+\varepsilon}$, puis $x := \dfrac{\|f\|}{f(y)} y$.)

De (2) et (3),

$$d(0, C) = \inf\{\|x\|\,;\, x \in C\} = 1.$$

L'hypothèse 2' implique l'existence d'un $u \in C$ tel que

$$\|u\| = 1 \text{ (et, comme } u \in C\text{, tel que } f(u) = \|f\|). \tag{4}$$

Montrons que u vérifie la deuxième partie de (1). Soit $x \in X$. Posons

$$g(t) := \|f\|\|u + tx\| - f(u + tx) = \|f\|F(u + tx) - f(u + tx).$$

Par définition de $\|f\|$ et la propriété (4), nous avons

$$g(t) \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \text{ avec égalité si } t = 0. \tag{5}$$

Par ailleurs, g est dérivable en 0, grâce à l'hypothèse 1. Nous obtenons

$$0 = g'(0) = \|f\| \frac{\partial F}{\partial x}(u) - f(x), \ \forall x \in X. \qquad \square$$

Remarque. Pour pouvoir appliquer ce théorème aux espaces L^p, $1 < p < \infty$, il faut vérifier, dans L^p, l'hypothèse 1. La preuve se fait par convergence dominée. Voir [2, Théorème 16.1, p. 69] ou Lieb et Loss [1, Theorem 2.6, p. 52]. (Les deux calculs sont essentiellement identiques, mais l'heuristique pour obtenir la domination n'est pas la même dans les deux textes.)

Références

[1] E. H. Lieb et M. Loss, Analysis, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, 2nd edition, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xxii+346 p.

[2] M. Willem, Analyse fonctionnelle élémentaire, Cassini, Paris, 2003, 136 p.