Cours de topologie métrique

Petru Mironescu

2005

Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Norme, distance, topologie

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel (e. v.) réel. Une* **norme** *sur E est une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ telle que :*
(N1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
(N2) $|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ x \in E$;
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\ x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Exemple 1. *On rappelle que, dans $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ est une norme (la* **norme euclidienne standard***) ; ici, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Exemple 2. *On vérifie aisément que, dans $\mathbb{R}^n$, les formules $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ définissent des normes.*

Exemple 3. *Pour $1 < p < \infty$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ (pour $p = 2$, on retrouve le cas particulier de la norme euclidienne). $\| \ \|_p$ vérifie clairement (N1) et (N2). On peut montrer que $\| \ \|_p$ vérifie aussi (N3) ; c'est l'inégalité de*

Minkowski prouvée à la fin de ce chapitre. Par conséquent, $\| \ \|_p$ *est une norme. Plus généralement, si on a une norme* $\| \ \|_j$ *sur* E_j*,* $j = 1, \dots, n$*, alors* $\|x\|_p = \|(\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n)\|_p$*,* $1 \leq p \leq \infty$*, est une norme sur* $E = E_1 \times E_2 \times \dots E_n$*.*
Sur $\mathbb{R}$*, toutes les normes définies ci-dessus coïncident avec l'application* $x \mapsto |x|$*. Cette norme est la* **norme usuelle** *sur* $\mathbb{R}$*.*

Définition 2. *Un* **espace normé** *est un couple* $(E, \| \ \|)$*, où* $\| \ \|$ *est une norme sur* E*.*

Définition 3. *Soit* X *un ensemble non vide. Une* **distance (métrique)** *sur* X *est une application* $(x, y) \mapsto d(x, y)$ *de* $X \times X$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*
(D1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *;*
(D2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall\ x, y \in X$ *;*
(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall\ x, y, z \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 4. *Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé. On pose* $d(x, y) = \|x - y\|$*,* $\forall\ x, y \in X$*. Alors* d *est une distance sur* E*. En effet, (D1) découle de (N1). Pour vérifier (D2), on note que*

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Enfin, (D3) est une conséquence de (N3) :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Ainsi, toute norme définit une distance associée. La distance associée à la norme usuelle sur $\mathbb{R}$ *est la* **distance usuelle** *sur* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 5. *Sur tout ensemble non vide* X *on peut définir une distance. Par exemple, en posant* $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$*. C'est la* **distance triviale** *sur* X*.*

Définition 4. *Un* **espace métrique** *est un couple* (X, d)*, où* d *est une distance sur* X*.*

Définition 5. *Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r > 0$, on définit :*
a) la **boule ouverte de centre** x **et rayon** r *:* $B(x, r) = \{y \in X \; ; \; d(y, x) < r\}$ *;*
b) la **boule fermée de centre** x **et rayon** r *:* $\overline{B}(x, r) = \{y \in X \; ; \; d(y, x) \leq r\}$ *;*
c) la **sphère de centre** x **et rayon** r *:* $S(x, r) = \{y \in X \; ; \; d(y, x) = r\}$.

Exemple 6. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $B(1, 1) =]0, 2[$.*

Exemple 7. *Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \; \|_\infty$ et de la distance associée, $\overline{B}(0, 1) = [-1, 1]^2$.*

Définition 6. *Soit (X, d) un espace métrique. Par définition, une partie U de X est un* **ouvert** *si, pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.*

N. B. En principe, r dépend de x.

Exemple 8. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $U =]0, 1[$ est un ouvert. En effet, si on pose, pour $x \in U$, $r = \min\{x, 1 - x\}$, on vérifie aisément que $B(x, r) \subset U$.*

Définition 7. *Soit (X, d) un espace métrique. La* **topologie** *de (X, d) est*

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \; ; \; U \text{ est un ouvert}\}.$$

Définition 8. *Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble $F \subset X$ est* **fermé** *si son complémentaire F^c est ouvert.*

Exemple 9. *$\emptyset$ et X sont à la fois ouverts et fermés.*

Proposition 1. *a) Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $B(x, r)$ est un ouvert.*
b) Si U_i est un ouvert, $\forall \, i \in I$, alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_i est un ouvert, $i = 1, \ldots, n$, alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est un ouvert.

Démonstration. a) Soit $y \in B(x, r)$. On a $\rho = r - d(y, x) > 0$. On va prouver que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$. En effet,

$$z \in B(\rho, y) \Longrightarrow d(z, y) < \rho \Longrightarrow d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x) < \rho + d(y, x) = r \Longrightarrow z \in B(x, r$$

b) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0}$. Pour ce même r, on a $B(x,r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

c) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. On a $x \in U_i$, $i = 1, \dots, n$. Chaque U_i étant ouvert, il existe un $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Soit $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Alors $B(x,r) \subset B(x, r_i)$, $i = 1, \dots, n$, et donc $B(x,r) \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Il s'ensuit que $B(x,r) \subset U$. $\square$

Proposition 2. *a) Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $\overline{B}(x,r)$ est un fermé.*

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si F_i est un fermé, $i = 1, \dots, n$, alors $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé.

c) Si F_i est un fermé, $\forall\, i \in I$, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.

Démonstration. a) On doit montrer que $\overline{B}(x,r)^c$ est un ouvert. Soit $y \in \overline{B}(x,r)^c$; y satisfait donc $d(y,x) > r$. Soit $\rho = d(y,x) - r > 0$. On a

$$z \in B(y,\rho) \Longrightarrow d(z,x) \geq d(y,x) - d(z,y) > d(y,x) - \rho = r \Longrightarrow z \in \overline{B}(x,r)^c \; ;$$

autrement dit, on a $B(y,\rho) \subset B(x,r)^c$.
Les propriétés b) et c) s'obtiennent de b) et c) de la proposition précédente par passage au complémentaire. $\square$

Exemple 10. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, tout intervalle ouvert est ouvert, tout intervalle fermé est fermé. Un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ est fermé.*

En effet, $\mathbb{R}$ est ouvert. Un intervalle de la forme $]a, b[$, avec a, b finis, est une boule ouverte : $]a,b[= B(x,r)$, où $x = (a+b)/2$, $r = (b-a)/2$. De même, $[a,b]$ est une boule fermée. Par ailleurs, $]a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, a+n[$, et donc $]a, +\infty[$ est ouvert. Par le même raisonnement, $]-\infty, a[$ est ouvert. Il s'ensuit que $[a, +\infty[=]-\infty, a[^c$ est fermé, et, de même, $]-\infty, a]$ est fermé.

1.2 Intérieur, adhérence

Définition 9. *Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \subset X$, on définit l'***intérieur de** *A, $\overset{\circ}{A}$, par*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert},\ U \subset A} U$$

*et l'***adhérence de** *A, $\overline{A}$, par*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé},\ F \supset A} F.$$

Proposition 3. *a) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A.*
b) Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
a') $\overline{A}$ est un fermé contenant A.
b') Si F est un fermé et $F \supset A$, alors $F \supset \overline{A}$.
Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration. a) $\overset{\circ}{A}$ est une union d'ouverts contenus dans A, donc un ouvert contenu dans A. b) Par définition ! La preuve est identique pour a'), b'). □

Exemple 11. *On considère, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $A = [0, 1[$. Alors $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$ et $\overline{A} = [0, 1]$.*

En effet, $]0, 1[$ est un ouvert contenu dans A, $[0, 1]$ est un fermé contenant A, et donc $]0, 1[\subset \overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A} \subset [0, 1]$. On a donc soit $\overset{\circ}{A} = A$, soit $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$. Pour éliminer la première possibilité, on montre que A n'est pas un ouvert. Par l'absurde : sinon, il existe un $r > 0$ tel que $B(0, r) =]-r, r[\subset A$. Or, $-r/2 \in B(0, r)$, mais $-r/2 \notin A$. Contradiction. Pour $\overline{A}$, il y a aussi deux possibilités : $\overline{A} = [0, 1]$ ou $\overline{A} = A$. On n'est pas dans le deuxième cas, car A n'est pas fermé. Ceci revient à montrer que $A^c =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ n'est pas un ouvert et se démontre par l'absurde (il n'y a pas de $r > 0$ tel que $B(1, r) \subset A^c$).

Proposition 4. *a) On a* $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ *et* $\overline{A} \subset \overline{B}$.
b) $x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists\, r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subset A$.
c) $\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{A^c}$ *et* $\overline{A} = X \setminus \overset{\circ}{A^c}$.
d) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall\, r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. a) Evident.
b) "$\Longrightarrow$" Si $x \in \overset{\circ}{A}$ (qui est un ouvert), il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$.
"$\Longleftarrow$" $B(x,r)$ est un ouvert contenu dans A, et donc $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Comme $x \in B(x,r)$, on a $x \in \overset{\circ}{A}$.
c) On prouve la première égalité, qui revient, après passage au complémentaire, à $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A^c}$. (Le raisonnement est le même pour la seconde égalité.) On a

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert},\ U \subset A} U \Longrightarrow X \setminus \overset{\circ}{A} = \bigcap_{U \text{ ouvert},\ U \subset A} U^c = \bigcap_{F \text{ fermé},\ F \supset A^c} F = \overline{A^c}.$$

d) On a, d'après c),

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A^c} \Longleftrightarrow \forall\, r > 0, B(x,r) \not\subset A^c \Longleftrightarrow \forall\, r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

□

Proposition 5. *a)* U *ouvert* $\Longleftrightarrow U = \overset{\circ}{U}$.
b) F *fermé* $\Longleftrightarrow F = \overline{F}$.
c) U *ouvert* $\Longleftrightarrow U$ *est une union de boules ouvertes.*

Démonstration. a) "$\Longleftarrow$" est claire, car $\overset{\circ}{U}$ est un ouvert. Réciproquement, si U est ouvert, alors le point b) de la proposition précédente implique $U \subset \overset{\circ}{U}$. Par ailleurs, on a toujours $U \supset \overset{\circ}{U}$, d'où l'égalité voulue.
b) Par passage au complémentaire de a) : F fermé $\Longleftrightarrow F^c$ ouvert $\Longleftrightarrow F^c = \overset{\circ}{F^c} = X \setminus \overline{F} \Longleftrightarrow F = \overline{F}$.

c) "$\Longrightarrow$" Pour tout $x \in U$, il existe un $r_x > 0$ tel que $\{x\} \subset B(x, r_x) \subset U$. Alors

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B(x, r_x) \subset U.$$

"$\Longleftarrow$" Une boule ouverte étant un ouvert, une union de boules ouvertes est un ouvert. $\square$

Proposition 6. *a) Un ensemble fini est fermé.*
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. *En général, l'inclusion est stricte.*
d) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
e) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. *En général, l'inclusion est stricte.*

Démonstration. a) $\{x\} = \overline{B}(x, 0)$, et donc un singleton est fermé. Une union finie de fermés étant un fermé, un ensemble fini est fermé.
b) $A \subset A \cup B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; de même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et par conséquent $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$ et donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
c) Comme $A \cap B \subset A$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$; de même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, d'où $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Un exemple d'inclusion stricte : dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on prend $A = [0, 1[$, $B =]1, 2]$. On a vu que $\overline{A} = [0, 1]$; par le même raisonnement, $\overline{B} = [1, 2]$. Alors $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, mais $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.
d) Comme dans c), on a $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Par ailleurs, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.
e) L'inclusion se montre comme dans b).
Un exemple d'inclusion stricte : on prend A, B comme dans c). Alors (pourquoi ?) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} =]0, 2[$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0, 2[\setminus \{1\}$. $\square$

1.3 Suites

Si (x_n) est une suite, on notera une suite extraite (=sous-suite) soit par (x_{n_k}), soit par $x_{\varphi(n)}$. Dans le premier cas, $n_0, n_1, \ldots$, est une suite strictement croissante

d'entiers ; dans le second, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
Par abus de notation, si tous les termes d'une suite (x_n) appartiennent à un ensemble X, on écrit $(x_n) \subset X$.

Définition 10. *Soit (X, d) un espace métrique. Si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors, par définition, $x_n \to x$ ((x_n)* **converge** *vers x) si et seulement si $d(x_n, x) \to 0$. Une suite (x_n) est convergente s'il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. On écrit alors $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Traduction de $x_n \to x$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.
Il est évident, à partir de la définition, que si $(x_n) \to x$ et si (x_{n_k}) est une sous-suite, alors $x_{n_k} \to x$.
Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, cette définition coïncide avec la définition usuelle de la convergence.

Définition 11. *Soit (X, d) un espace métrique. Si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors, par définition, x est une* **valeur d'adhérence** *de la suite (x_n) s'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$.*

Exemple 12. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de (x_n), car $x_{2n} \to 1$.*

Proposition 7. *Si $x_n \to x$, alors x est la seule valeur d'adhérence de la suite (x_n). En particulier, la limite d'une suite convergente est unique.*

Démonstration. x est une valeur d'adhérence, car la suite extraite (x_n) converge vers x. Soit y une valeur d'adhérence de (x_n). Il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to y$. Par ailleurs, on a aussi $x_{n_k} \to x$. On suppose par l'absurde $y \neq x$. Alors $d(x, y) > 0$. Posons $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$. Comme $x_{n_k} \to x$, il existe un k_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k \geq k_1$; de même, il existe un k_2 tel que $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ si $k \geq k_2$. Alors, pour $k = \max\{k_1, k_2\}$, on a $d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$, ce qui est absurde. $\square$

1.4 Caractérisation des ensembles à l'aide des suites

Proposition 8. *On a*

$$\overline{F} = \{x \in X \ ; \ \exists \ (x_n) \subset F \text{ telle que } x_n \to x\}.$$

Démonstration. "$\supset$" On considère un x appartenant à l'ensemble de droite. Soit $r > 0$. Il existe n_0 tel que $d(x_n, x) < r$, $n \geq n_0$. En particulier, $x_{n_0} \in B(x, r) \cap F$, et donc $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$, d'où $x \in \overline{F}$.
"$\subset$" Soit $x \in \overline{F}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère un $x_n \in F \cap B(x, 1/(n+1))$. Alors $(x_n) \subset F$, $d(x_n, x) < 1/(n+1)$ et donc $x_n \to x$. □

Proposition 9. *F est un fermé $\Longleftrightarrow$ pour toute suite convergente $(x_n) \subset F$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" Si x est tel qu'il existe une suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$, alors $x \in \overline{F} = F$.
"$\Longleftarrow$" Si $x \in \overline{F}$, il existe une suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$. Par conséquent, $x \in F$, et donc $\overline{F} \subset F$. Comme on a toujours $F \subset \overline{F}$, on trouve $F = \overline{F}$, et donc F est fermé. □

1.5 Sous-espaces

Si (X, d) est un espace métrique et si $A \subset X$, alors la restriction de d à $A \times A$ est une distance sur A ; c'est la **distance induite** sur A. Par abus de notation, on désigne cette restriction encore par d, et on note l'espace métrique correspondant (A, d) ; c'est un **sous-espace** de (X, d). On peut considérer, dans ce nouveau espace métrique, des ouverts (fermés), appelés les ouverts (fermés) de A.

Proposition 10. *a) V est un ouvert de $A \Longleftrightarrow$ il existe un ouvert U (de X) tel que $V = U \cap A$.*
a) G est un fermé de $A \Longleftrightarrow$ il existe un fermé F (de X) tel que $G = F \cap A$.
c) Si A est un ouvert (de X), alors V est un ouvert de $A \Longleftrightarrow V \subset A$ et V est un

ouvert (de X).
c) Si A est un fermé (de X), alors G est un fermé de $A \Longleftrightarrow G \subset A$ et G est un fermé (de X).

Démonstration. a) Si $x \in A$ et $r > 0$, soit $B_A(x,r) = \{y \in A\,; d(y,x) < r\}$. Il est évident que $B_A(x,r) = B(x,r) \cap A$. "$\Longrightarrow$" Si $x \in V$, il existe un $r_x > 0$ tel que $\{x\} \subset B_A(x,r_x) \subset V$. On a donc

$$V = \bigcup_{x\in V}\{x\} \subset \bigcup_{x\in V} B_A(x,r_x) = \left(\bigcup_{x\in V} B(x,r_x)\right) \cap A \subset V,$$

d'où $V = U \cap A$, avec $U = \bigcup\limits_{x\in V} B(x,r_x)$ ouvert de X.
"$\Longleftarrow$" Soit $x \in V$. On a $x \in U$; il existe donc un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. Il s'ensuit que $B_A(x,r) \subset U \cap A = V$.
b) Par passage au complémentaire de a) : G fermé de $A \Longleftrightarrow A \setminus G$ ouvert de $A \Longleftrightarrow$ il existe un ouvert U de X tel que $A \setminus G = U \cap A \Longleftrightarrow$ (en posant $F = U^c$) il existe un fermé F de X tel que $G = F \cap A$.
c) "$\Longrightarrow$" Si V est un ouvert de A, il existe un ouvert U de X tel que $V = U \cap A$ et alors clairement $V \cap A$ et V est un ouvert de X.
"$\Longleftarrow$" On a $V = V \cap A$, et donc V est un ouvert de A.
La preuve de d) est identique à celle de c). $\square$

Proposition 11. *Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}$. Si F est majoré (respectivement minoré), alors $\sup F \in F$ (respectivement $\inf F \in F$).*

Démonstration. On suppose, par exemple, F majoré. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in F$ tel que $\sup F - 1/(n+1) < x_n \leq \sup F$. Il s'ensuit que $x_n \to F$, et donc $\sup F \in F$. $\square$

1.6 Equivalence

Définition 12. *Soit E un e. v. réel. Deux normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ sur E sont* **équivalentes** $\Longleftrightarrow \exists\, C_1, C_2 > 0$ *telles que* $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall\, x \in E$.

Définition 13. *Soit X un ensemble non vide. Deux distances d_1, d_2 sur X sont* **équivalentes** $\Longleftrightarrow \exists\, C_1, C_2 > 0$ *telles que* $C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$.

Il est facile de vérifier que l'équivalence des normes ou distances est, comme son nom l'indique, une relation d'équivalence.
Le résultat suivant est évident :

Proposition 12. *Soit $\| \|_1$, $\| \|_2$ deux normes équivalentes sur l'e. v. réel E. Alors les distances associées à $\| \|_1$, $\| \|_2$ sont équivalentes.*

Proposition 13. *Soit d_1, d_2 deux distances équivalentes sur l'ensemble X. Alors :*
a) $x_n \to x$ dans $(X, d_1) \Longleftrightarrow x_n \to x$ dans (X, d_2) ;
b) les fermés de (X, d_1) et de (X, d_2) coïncident ;
c) les ouverts de (X, d_1) et de (X, d_2) coïncident.

Démonstration. a) Exercice ! b) C'est une conséquence de a) et de la caractérisation des fermés à l'aide des suites. c) Par passage au complémentaire de b). □

On montrera plus tard le résultat fondamental suivant :

Théorème 1. *Soit E un e. v. réel* **de dimension finie**. *Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Il s'ensuit que, pour ce qui concerne les ouverts, fermés, suites convergentes, le choix de la norme sur un tel espace est immatériel. En particulier, on ne précisera pas la norme sur E. Par exemple, "Dans $\mathbb{R}^n$, ..." sous-entend "Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme (et de la distance associée), ...".
Dans un produit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ d'espaces normés, on vérifie aisément que les normes $\| \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont équivalentes. "Dans E, ..." sous-entend "Dans E muni d'une de ces normes, ...".

1.7 Espaces produit

Soient (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, k espaces métriques. Sur $X = X_1 \times \ldots X_d$, les formules

$$D_p(x, y) = \|(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_k(x_k, y_k))\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

définissent des distances ; ici, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
On vérifie aisément que ces distances sont équivalentes. Par conséquent, les suites convergentes, les topologies et les fermés coïncident pour D_p, $1 \leq p \leq \infty$. Cette unique topologie sur X est la **topologie produit**. On appellera chacune des distances introduites ci-dessus **une distance produit**. Quand on étudie une propriété qui ne change pas quand on passe d'une distance à une distance équivalente (convergence, intérieur, adhérence, etc.), on se servira indistinctement de l'une de ces distances.

Exemple 13. *Si $X_1 = \ldots = X_k = \mathbb{R}$ avec la distance usuelle, alors D_p est la distance associée à la norme $\| \|_p$ sur $\mathbb{R}^k$.*

Proposition 14. *Soient $(x^n) \subset X$, $x \in X$. On a $x^n \to x \iff x_j^n \to x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Ici, $x^n = (x_1^n, \ldots, x_k^n)$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" On considère par exemple la distance D_∞ sur X. Alors

$$x^n \to x \Longrightarrow 0 \leq d_j(x_j^n, x_j) \leq \max\{d_1(x_1^n, x_1), \ldots, d_k(x_k^n, x_k)\} = D_\infty(x^n, x) \to 0, \quad j = 1, .$$

d'où $d_j(x_j^n, x_j) \to 0$, ce qui implique $x_j^n \to x_j$, $j = 1, \ldots, k$.

"$\Longleftarrow$" On considère la distance D_1. On a $0 \leq D_1(x^n, x) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} d_j(x_j^n, x_j) \to 0$, d'où $x^n \to x$. □

Proposition 15. *a) Si U_j est un ouvert de (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, alors $\displaystyle\prod_{j=1}^{k} U_j$ est un ouvert de X.*

b) Si F_j est un fermé de (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, alors $\displaystyle\prod_{j=1}^{k} F_j$ est un fermé de X.

Démonstration. a) Soit U_j un ouvert de (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \prod_{j=1}^{k} U_j$. Alors $x_j \in U_j$, $\forall\, j$, et donc il existe un $r_j > 0$ tel que $\{y_j \in X_j\,; d_j(y_j, x_j) < r_j\} \subset U_j$, $\forall\, j$. Soit $r = \min\{r_1, \ldots, r_j\}$. On a clairement $\{y_j \in X_j\,; d_j(y_j, x_j) < r\} \subset U_j$, $\forall\, j$, et donc

$$\{y \in X\,; D_\infty(y, x) < r\} \subset \prod_{j=1}^{k} U_j.$$

b) Soit F_j un fermé de (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$. Soit $F = \prod_{j=1}^{k} F_j$. Si $(x^n) \subset F$ et $x_n \to x$, alors $x_j^n \to x_j$, $j = 1, \ldots, k$. Par conséquent, $x_j \in F_j$, $j = 1, \ldots, k$, et donc $x \in F$. $\square$

1.8 Compléments

Proposition 16. *(***Inégalité de Young***) Si $a, b \geq 0$ et si $1 < p, q < \infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.1}$$

Démonstration. On fixe b. La fonction $a \mapsto f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$, $a \geq 0$, atteint son minimum pour $a_0 = b^{1/(p-1)}$ et on vérifie facilement que $f(a_0) = 0$ (on utilise l'égalité $\frac{p}{p-1} = q$). $\square$

Proposition 17. *(***Inégalité de Hölder***) Si $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et si $1 < p, q < \infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \|a\|_p \|b\|_q \left(= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} \right). \tag{1.2}$$

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité suit trivialement. Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Dans ce cas, $\alpha = \|a\|_p > 0$ et $\beta = \|b\|_q > 0$. Soit $A > 0$ à déterminer ultérieurement. Pour chaque i, on a

$$|a_i b_i| = (A|a_i|)\left(\frac{|b_i|}{A}\right) \leq \frac{A^p |a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{A^q q}.$$

En sommant ces inégalités pour $i = 1, \ldots, n$, on trouve, à l'aide de l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{A^p \alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{A^q q}.$$

On choisit maintenant A de sorte que $A^p \alpha^p = \dfrac{\beta^q}{A^q}$; alors $A = \dfrac{\beta^{q/(p+q)}}{\alpha^{p/(p+q)}} = \dfrac{\beta^{1/p}}{\alpha^{1/q}}$ (car $\dfrac{p}{p+q} = \dfrac{1}{q}$ et $\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{1}{p}$). En remplaçant dans l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \frac{\alpha\beta}{p} + \frac{\alpha\beta}{q} = \alpha\beta = \|a\|_p \|b\|_q.$$

$\square$

Proposition 18. (**Inégalité de Minkowski**) *Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $1 < p < \infty$, alors*

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p. \tag{1.3}$$

Démonstration. Si $a + b = 0$, c'est immédiat. Supposons $a + b \neq 0$ et posons $\alpha = \|a + b\|_p > 0$. Soit $1 < q < \infty$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (autrement dit, $q = \dfrac{p}{p-1}$). On a, de l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{i=1}^n |a_i||a_i+b_i|^{p-1} = \left|\sum_{i=1}^n |a_i||a_i+b_i|^{p-1}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{(p-1)/p} = \alpha^{p-1}\|a\|_p$$

(car $q(p-1) = p$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p}$) et, de même, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \le \alpha^{p-1}\|b\|_p$.
En sommant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i||a_i+b_i|^{p-1} \le \sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)|a_i+b_i|^{p-1} \le \alpha^{p-1}(\|a\|_p+\|b\|_p)\,;$$

l'inégalité de Minkowski s'obtient de cette dernière inégalité en simplifiant par α^{p-1}.
□

Proposition 19. *Si $(x_n) \subset X$, avec (X, d) métrique, alors*

$$\{x\ ; x \textit{ valeur d'adhérence de la suite } (x_n)\} = \bigcap_{n\ge 0} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}.$$

Démonstration. "$\subset$" Soit x une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un k_0 tel que $n_k \ge n$, $\forall\ k \ge k_0$. Alors $(x_{n_k})_{k\ge k_0}$ est une sous-suite de (x_{n_k}), contenue dans $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, et qui converge vers x. Par conséquent, $x \in \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, et donc $x \in \displaystyle\bigcap_{n\ge 0} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$.
"$\supset$" Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\ge 0} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$. En particulier, $x \in \overline{\{x_0, x_1, \ldots\}}$, et donc $B(x, 1) \cap \{x_0, x_1, \ldots\} \ne \emptyset$. Il existe donc un n_0 tel que $x_{n_0} \in B(x, 1)$. On construit par récurrence une suite strictement croissante (n_k) d'entiers tels que $x_{n_k} \in B(x, 1/(k+1))$. En supposant n_{k-1} déjà construit, on part de $x \in \overline{\{x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \ldots\}}$. On a donc $B(x, 1/(k+1)) \cap \{x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \ldots\} \ne \emptyset$; par conséquent, il existe un $n_k \ge n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in B(x, 1/(k+1)$. La suite extraite (x_{n_k}) satisfait $d(x_{n_k}, x) < 1/(k+1)$, d'où $x_{n_k} \to x$ et x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n). □

Proposition 20. *U est un ouvert de l'espace métrique $(X, d) \iff$ pour tout $x \in U$ et pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \to x$, il existe un rang n_0 tel que $x_n \in U$, $\forall\ n \ge n_0$.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" Si $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Si $x_n \to x$, il existe un n_0 tel que $d(x_n, x) < r$, $\forall\, n \geq n_0$. On a donc $x_n \in U$, $\forall\, n \geq n_0$.
"$\Longleftarrow$" Par l'absurde. On suppose que U n'est pas ouvert. Il existe donc un $x \in U$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \not\subset U$, ou encore $B(x, r) \cap U^c \neq \emptyset$. Pour $r = 1/(n+1)$, on déduit l'existence d'un $x_n \in B(x, 1/(n+1)) \cap U^c$. Donc $x_n \notin U$, $d(x_n, x) < 1/(n+1)$; en particulier, $x \in U$, $x_n \to x$, et $x_n \notin U$, $\forall\, n$, contradiction. $\square$

Définition 14. *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est* **dense** *dans $X \Longleftrightarrow \overline{A} = X$.*

Traduction : pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$. On notera que, si on remplace une distance par une distance équivalente, les ensembles denses restent les mêmes.

Exemple 14. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses.*

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $r > 0$. Alors $B(x, r) =]x-r, x+r[$. On rappelle qu'entre deux réels distincts il y a toujours un nombre rationnel et un nombre irrationnel ; ce qui implique $B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. On trouve $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $x \in \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 2

Continuité

2.1 Caractérisations de la continuité

Définition 1. *Soient* (X, d)*,* (Y, D) *deux espaces métriques. Une application* $f : X \to Y$ *est* **continue au point** $a \in X$ *si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $D(f(x), f(a)) < \varepsilon$ *dès que* $d(x, a) < \delta$*. On dit aussi que* a *est un* **point de continuité de** f*.*
f *est* **continue** *si* f *est continue en tout point de* X*.*
L'ensemble des fonctions continues de (X, d) *vers* (Y, D) *est noté* $C((X, d), (Y, D))$ *ou tout simplement* $C(X, Y)$*.*

La notion de continuité n'ayant un sens que pour une application agissant entre deux espaces métriques, on écrit, par abus de notation et lorsqu'il s'agit d'étudier la continuité, $f : (X, d) \to (Y, D)$.
Il est clair que le caractère continu d'une fonction ne change pas si on remplace d ou D par des distances équivalentes.

Définition 2. $f : (X, d) \to (Y, D)$ *est* k**-lipschitzienne** *si* $D(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$*,* $\forall\ x, y \in X$*.* f *est* **lipschitzienne** *s'il existe un* $k > 0$ *tel que* f *soit* k*-lipschitzienne.*

Une fonction lipschitzienne est continue. En effet, étant donnés un $a \in X$ et un $\varepsilon > 0$, on peut prendre $\delta = \varepsilon/K$.

Exemple 1. *Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé. Alors* $x \mapsto \|x\|$ *est 1-lipschitzienne de* E *vers* $\mathbb{R}$.
En effet, on a $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$, *et donc* $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.
De même, si $a \in X$, *alors* $x \mapsto d(x,a) : (X,d) \to \mathbb{R}$ *est 1-lipschitzienne.*

Proposition 1. *a)* f *est continue en* $a \iff$ *pour toute suite* $(x_n) \subset X$ *telle que* $x_n \to a$ *on a* $f(x_n) \to f(a)$.
b) f *est continue* $\iff$ *pour toute suite convergente* $(x_n) \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
c) f *est continue* $\iff$ *pour tout ouvert* U *de* Y, $f^{-1}(U)$ *est un ouvert de* X.
d) f *est continue* $\iff$ *pour tout fermé* F *de* Y, $f^{-1}(F)$ *est un fermé de* X.

Démonstration. a) "$\Longrightarrow$" Soit $\varepsilon > 0$. Pour le δ correspondant, il existe un n_0 tel que $d(x_n, a) < \delta$, $n \geq n_0$. Alors $D(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, $n \geq n_0$; d'où $f(x_n) \to f(a)$.
"$\Longleftarrow$" Par l'absurde : si f n'est pas continue en a, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe un x tel que $d(x,a) < \delta$ mais $D(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$. Pour $\delta = 1/(n+1)$, on trouve un x_n tel que $d(x_n, a) < 1/(n+1)$ et $D(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. On a donc $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to f(a)$, contradiction.
b) Conséquence immédiate de a).
c) "$\Longrightarrow$" Soit U un ouvert de Y et soit $a \in f^{-1}(U)$. Comme $f(a) \in U$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset U$. Avec le δ correspondant dans la définition de la continuité en a, on a

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow D(f(x), f(a)) < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \in U \Longrightarrow x \in f^{-1}(U),$$

et donc $B(a, \delta) \subset f^{-1}(U)$.
"$\Longleftarrow$" Soient $a \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert contenant a ; il existe donc un $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, ce qui se traduit par

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow x \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \Longrightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \Longrightarrow D(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

d) Par passage au complémentaire de c).

$\square$

Exemple 2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on retrouve la définition usuelle de la continuité. Ainsi, toutes les fonctions "usuelles" sont continues.*

Proposition 2. *Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces normés. Pour une application* **linéaire** *$f : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) f continue ;
b) f continue en 0 ;
c) il existe un $C > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, $\forall \ x \in E$.
Si, **de plus**, *E est* **de dimension finie**, *alors toute application linéaire $f : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$ est continue.*

Démonstration. "a)$\Longrightarrow$b)" Evident. "b)$\Longrightarrow$c)" Il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x - 0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(0)\|_F < 1$. Si $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\|y\|_E < \delta$, où $y = \dfrac{\delta}{2\|x\|_E} x$. Donc $\|f(x)\|_F = \dfrac{2\|x\|_E}{\delta}\|f(y)\|_F \leq \dfrac{2}{\delta}\|x\|_E$. Cette égalité étant clairement vérifiée si $x = 0$, on retrouve c) avec $C = \dfrac{2}{\delta}$.
"c)$\Longrightarrow$a)" On a $\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq C\|x-y\|_E$; f est C-lipschitzienne, donc continue.
Pour la dernière propriété, on fixe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Si $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$, on vérifie aisément que $x \to \|x\|_1 = |x_1| + \ldots |x_n|$ est une norme sur E. Il suffit de vérifier la continuité par rapport à cette norme. On a

$$\|f(x)\|_F = \|f(x_1e_1 + \ldots x_ne_n)\|_F \leq |x|_1\|f(e_1)\|_F + \ldots |x_n|\|f(e_n)\|_F \leq C\|x\|_1,$$

où $C = \max\{\|f(e_1)\|_F, \ldots, \|f(e_n)\|_F\}$. □

Proposition 3. *Si $f : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$ est linéaire et continue, alors il existe une* **plus petite constante** *$C \geq 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, $\forall \ x \in E$. De plus, on a*

$$C = \sup \underbrace{\{\|f(x)\|_F \ ; \|x\|_E \leq 1\}}_{A_1} = \sup \underbrace{\{\|f(x)\|_F \ ; \|x\|_E = 1\}}_{A_2} = \sup \underbrace{\left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \ ; x \in E \setminus \{0\right.}_{A_3}$$

Démonstration. Soit $F = \{K \geq 0 \,; \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E, \ \forall\ x \in E\}$. Clairement, F est non vide, fermé (on le vérifie aisément avec des suites) et minoré par 0. Par conséquent, $C = \inf F \in F$. Il est immédiat que cette constante C est la constante désirée.
On a $A_2 \subset A_1$, et donc $\sup A_2 \leq \sup A_1$. Si $\|x\|_E \leq 1$, alors $x = \lambda y$ pour un $\lambda \in [0,1]$ et un y tel que $\|y\|_E = 1$ (si $x \neq 0$, prendre $\lambda = \|x\|_E$ et $y = \dfrac{1}{\|x\|_E}x$; si $x = 0$, $\lambda = 0$ et n'importe quel y conviennent). On a donc $\|f(x)\|_F = \lambda\|f(y)\|_F \leq \sup A_2$. Par passage au sup, on trouve $\sup A_1 \leq \sup A_2$; d'où $\sup A_2 = \sup A_1$.
Par ailleurs, si $x \neq 0$, alors $\|y\|_E = 1$, où $y = \dfrac{1}{\|x\|_E}x$. Comme $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \dfrac{\|f(y)\|_F}{\|y\|_E}$, on a $A_3 \subset A_2$. Comme on a aussi $A_2 \subset A_3$, on trouve que $A_2 = A_3$. Il s'ensuit que $\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3$.
Si $x \neq 0$, on a $\|f(x\|_F = \|x\|_E \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup A_3 \|x\|_E$; cette inégalité est encore valable si $x = 0$. On obtient $C \leq \sup A_3$. Par ailleurs, on a $\|f(x)\|_F \leq C$ si $\|x\|_E = 1$; par passage au sup, on trouve $\sup A_2 \leq C$. Finalement, $C = \sup A_j$, $j = 1, 2, 3$. □

Définition 3. *Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces normés. On note*

$$\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F \ ; f \ \textit{linéaire et continue}\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, la constante C de la proposition précédente est notée $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, ou tout simplement $\|f\|$. Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on écrit E' au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$; E' est le **dual** *de E. Si $f \in E'$, on appelle f une* **forme linéaire continue sur** $\mathbb{R}$.

Le résultat suivant est immédiat :

Proposition 4. *$\mathcal{L}(E,F)$ est un e. v. réel et $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.*

Les résultats suivants sont des généralisations faciles des résultats précédents. Les preuves sont laissées comme exercice.

Proposition 5. *Soient* $(E_j, \| \ \|_j)$, $j = 1, \dots, k$, $(F, \| \ \|_F)$ *des espaces normés et soit* $f : E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k \to F$ *une application* k**-linéaire**. *On munit* E *de l'une des normes produit. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) f *continue ;*
b) f *continue en* 0 *;*
c) il existe un $C > 0$ *tel que* $\|f(x)\|_F \leq C \prod_{j=1}^{k} \|x_j\|_{E_j}$, $\forall\ x = (x_1, \dots, x_n) \in E$.
Si, **de plus**, *les* E_j *sont* **de dimension finie**, *alors toute application* k*-linéaire* $f : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$ *est continue.*

Proposition 6. *L'espace des applications* k*-linéaires et continues de* E *dans* F, *noté* $\mathcal{L}_k(E, F)$, *est un espace vectoriel. L'application* $f \mapsto \|f\|$, *où*

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_F \ ; \ \|x_j\|_{E_j} = 1, j = 1, \dots, k\},$$

est une norme sur $\mathcal{L}_k(E, F)$.

Proposition 7. *Soient* (X, d), (Y_j, d_j), $j = 1, \dots, k$, *des espaces métriques et* $f_j : X \to Y_j$, $j = 1, \dots, k$. *On munit* $Y = \prod_{j=1}^{k} Y_j$ *d'une distance produit et on pose* $f = (f_1, \dots, f_n)$. *Alors*

$$f \text{ continue } \iff f_j \text{ continue }, \quad j = 1, \dots, k.$$

Cas particulier : si $\mathbb{C} (= \mathbb{R}^2)$ *est muni d'une norme, alors* $f : (X, d) \to \mathbb{C}$ *est continue* $\iff \mathrm{Re} f$ *et* $\mathrm{Im} f$ *sont continues.*

Démonstration. Soient $(x_n) \subset X$, $x \in X$, tels que $x_n \to x$. Alors $f(x_n) \to f(x) \iff f_j(x_n) \to f_j(x)$, $j = 1, \dots, k$; d'où l'équivalence à prouver. □

2.2 Opérations avec les fonctions continues

Proposition 8. *Si* $f : (X, d) \to (Y, D)$ *et* $g : (Y, D) \to (Z, \Delta)$ *sont continues, alors* $g \circ f : (X, d) \to (Z, \Delta)$ *est continue.*

Démonstration. Soit U un ouvert de Z. Alors $g^{-1}(U)$ est un ouvert de Y et donc $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ est un ouvert de X. $\square$

Proposition 9. *Soient (X, d) un espace métrique et $(E, \| \ \|)$ un espace normé.*
a) Si $f_1, f_2 : (X, d) \to (E, \| \ \|)$ sont continues, alors $f_1 + f_2$ est continue.
b) Si $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ et $g : (X, d) \to (E, \| \ \|)$ sont continues, alors fg est continue. Cas particulier : si $g : (X, d) \to (E, \| \ \|)$ est continue et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λg est continue.

Démonstration. a) On munit $E \times E$ de la norme $\| \ \|_1$. L'application $G : E \times E \to E$, $G(y, z) = y + z$ est linéaire et continue, car $\|G(y, z)\| \leq \|(y, z)\|_1$. On a $f_1 + f_2 = G \circ F$, où $F = (f_1, f_2) : (X, d) \to E \times E$ est continue ; il s'ensuit que $f_1 + f_2$ est continue.
b) $H : \mathbb{R} \times E \to E$, $H(\lambda, x) = \lambda x$, est bilinéaire et continue, car $\|H(\lambda, x)\| = |\lambda| \|x\|$. Comme $fg = H \circ K$, où $K : (X, d) \to \mathbb{R} \times E$, $K = (f, g)$, on trouve que fg est continue. $\square$

Proposition 10. *Soient E un e. v. de dimension finie, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\| \ \|$ une norme sur E. Si $f : (E, \| \ \|) \to (X, d)$, on définit une nouvelle application, $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to (X, d)$, par $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 e_1 + \ldots x_n e_n)$. Alors f continue$\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$ continue.*

Autrement dit, vérifier la continuité d'une application définie sur un espace de dimension finie revient à vérifier la continuité d'une application définie sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $T : \mathbb{R}^n \to (E, \| \ \|)$, $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$. Alors T est linéaire, donc continue. T est bijective ; son inverse est linéaire, donc continue. On a $\tilde{f} = f \circ T$, d'où f continue$\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ continue. De même, $f = \tilde{f} \circ T^{-1}$, et donc $\tilde{f}$ continue$\Longrightarrow$ f continue. $\square$

Le résultat suivant est évident

Proposition 11. *Si $f : (X, d) \to (Y, D)$ est continue et $A \subset X$, alors $f_{|A} : (A, d) \to (Y, D)$ est continue.*

2.3 Exemples d'applications continues

Exemple 3. *Si* (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, *sont des espaces métriques et* $X = \prod_{j=1}^{k} X_j$ *est muni d'une distance produit, alors* $\pi_j : X \to (X_j, d_j)$, $\pi_j(x) = x_j$, *est continue.*

En effet, id$= (\pi_1, \ldots, \pi_k) : X \to X$ est clairement continue, et donc π_j l'est aussi.

Exemple 4. *Une fonction polynômiale* P *est continue dans* $\mathbb{R}^n$.

En effet, P est de la forme $P = \sum_{finie} a_{d_1,\ldots,d_n} x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n}$. Il suffit de montrer que chaque monôme $x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n}$ est continu, ce qui suit de l'égalité $x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n} = \pi_1(x)^{d_1} \cdot \ldots \cdot \pi_n(x)^{d_n}$.

Définition 4. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. *On pose* $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ ; \ a \in A\}$ *(la* **distance du point** x **à l'ensemble** A*).*

On remarque que $d(x, A)$ est bien définie et ≥ 0. De plus, $d(x, A) = 0$ si $x \in A$.

Proposition 12. *a)* $x \mapsto d(x, A)$ *est 1-lipschitzienne.*
b) $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
c) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Démonstration. a) Soient $x, y \in A$. Pour tout $a \in A$ on a

$$-d(x, y) + d(y, a) \leq d(x, a) \leq d(y, a) + d(x, y).$$

Par passage à l'inf, on trouve $-d(x, y) + d(y, A) \leq d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y)$, d'où $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
b) Clairement, si $A \subset B$, alors $d(x, A) \geq d(x, B)$. En particulier, $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $b \in \overline{A}$ tel que $d(x, b) < d(x, \overline{A}) + \varepsilon/2$. Il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \to b$. Comme $y \mapsto d(x, y)$ est continue sur X, on trouve $d(x, a_n) \to d(x, b)$. Il existe donc un n_0 tel que $d(a_{n_0}, b) < \varepsilon/2$. Il s'ensuit que

$$d(x, A) \leq d(x, a_{n_0}) \leq d(x, b) + d(b, a_{n_0}) < d(x, \overline{A}) + \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, on trouve $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.
c) "$\Longrightarrow$" Si $d(x, A) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. Pour $\varepsilon = 1/(n+1)$, on trouve une suite $(a_n) \subset A$ telle que $d(x, a_n) < 1/(n+1)$. On a donc $a_n \to x$, et par conséquent $x \in \overline{A}$.
"$\Longleftarrow$" Si $x \in \overline{A}$, alors $0 = d(x, \overline{A}) = d(x, A)$. $\square$

2.4 Convergence uniforme

Définition 5. *Soient $f_n, f : (X, d) \to (Y, D)$. La suite (f_n)* **converge uniformément** *vers $f \iff \exists\ \alpha_n \geq 0$ tels que $D(f_n(x), f(x)) \leq \alpha_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x \in X$ et $\alpha_n \to 0$.*
On écrit alors $f_n \overset{u}{\to} f$.

Théorème 2. *Si les fonctions f_n sont* **continues** *pour tout n et si $f_n \overset{u}{\to} f$, alors f est continue.*

Démonstration. Soient $a \in X$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $D(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3$, $x \in X$. Il existe un $\delta > 0$ tel que $d(x, a) < \delta \Longrightarrow D(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon/3$. On trouve que
$d(x, a) < \delta \Longrightarrow D(f(x), f(a)) \leq D(f(x), f_{n_0}(x)) + D(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + D(f_{n_0}(a), f(a)) < \varepsilon$. $\square$

2.5 Homéomorphismes

Définition 6. *Une application $f : (X, d) \to (Y, D)$ est un* **homéomorphisme**$\iff$ *f continue, bijective et f^{-1} continue.*
On dit alors que (X, d) et (Y, D) sont **homéomorphes**.

Exemple 5. *Comme on l'a déjà vu, si $T : (E, \|\ \|_E) \to (F, \|\ \|_F)$ est linéaire et bijective et si E est de dimension finie, alors T est un homéomorphisme.*

Le résultat suivant est immédiat

Proposition 13. *La relation "(X,d) est homéomorphe avec (Y,D)" est une relation d'équivalence.*

Chapitre 3

Espaces complets

3.1 Complétude

Définition 1. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une suite* $(x_n) \subset X$ *est* **de Cauchy** $\iff \forall\ \varepsilon > 0$*, il existe un* n_0 *tel que* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *dès que* $n, m \geq n_0$*.*

Il est facile à voir que les suites de Cauchy le restent si on remplace d par une distance équivalente.

Proposition 1. *a) Si* (x_n) *converge, alors* (x_n) *est une suite de Cauchy.*
b) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.
c) Une suite de Cauchy converge$\iff$ *elle a une valeur d'adhérence.*
d) On considère une suite de réels strictement positifs, $a_k \to 0$*. Si* (x_n) *est une suite de Cauchy, il existe une suite extraite* (x_{n_k}) *telle que* $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < a_k$*,* $\forall\ k$*.*

Démonstration. a) Si $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $\varepsilon > 0$, il existe un n_0 tel que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$. Si $m, n \geq n_0$, on trouve alors $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon$.
b) Soient $a, b \in X$ tels que, pour deux sous-suites, $(x_{\varphi(n)})$ et $(x_{\psi(n)})$, on ait $x_{\varphi(n)} \to a$ et $x_{\psi(n)} \to b$. On suppose par l'absurde $a \neq b$ et soit $\varepsilon = d(a, b) > 0$. Il existe trois entiers, n_0, n_1, n_2, tels que : $d(x_n, x_m) < \varepsilon/3$ si $n, m \geq n_0$, $d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon/3$ si $n \geq n_1$, $d(x_{\psi(n)}, b) < \varepsilon/3$ si $n \geq n_2$. Par ailleurs, on a $\varphi(n) \to \infty$ et $\psi(n) \to \infty$, et donc il existe un n_3 tel que $n_3 \geq n_1$ et $\varphi(n_3) \geq n_0$, respectivement un n_4 tel que

$n_4 \geq n_2$ et $\psi(n_4) \geq n_0$. On obtient la contradiction

$$\varepsilon = d(a,b) \leq d(x_{\varphi(n_3)}, a) + d(x_{\varphi(n_3)}, x_{\psi(n_4)}) + d(x_{\psi(n_4)}, b) < \varepsilon.$$

c) "$\Longrightarrow$" Une suite convergente a une valeur d'adhérence. "$\Longleftarrow$" Si a est une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $x_{\varphi(n)} \to x$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_1 tel que $d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon/2$ si $n \geq n_1$. Avec le n_0 correspondant à $\varepsilon/2$ dans la définition d'une suite de Cauchy, il existe un $n_2 \geq n_1$ tel que $\varphi(n_2) \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on trouve $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{\varphi(n_2)}) + d(x_{\varphi(n_2)}, a) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.
d) Pour chaque k, il existe un n_k tel que $d(x_n, x_m) < a_k, \forall\ n, m \geq n_k$. Comme cette propriété reste vraie en remplaçant n_k par un nombre supérieur à n_k, on peut supposer $n_0 < n_1 < \ldots$. Donc (x_{n_k}) est une sous-suite et la propriété demandée est vérifiée par construction. $\square$

La réciproque de a) est fausse :

Exemple 1. *Dans $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n) définie par $x_n = E(2^n\sqrt{2})/2^n$ est de Cauchy, mais ne converge pas.*

En effet, on a $(2^n\sqrt{2} - 1)/2^n < x_n \leq \sqrt{2}$, d'où $x_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy. Par ailleurs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'unicité de la limite implique que (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Définition 2. *Si (X, d) est un espace métrique,*
a) une partie A de X est **bornée** *s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que $d(a, x) \leq r$, $\forall\ x \in A$;*
b) une suite $(x_n) \subset X$ est **bornée** *s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que $d(a, x_n) \leq r$, $\forall\ n$.*

Exercice. Si a) ou b) sont vraies pour un $a \in X$ et un r, elles sont vraies pour tout $b \in X$, quitte à changer r.

Proposition 2. *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. On fixe un $a \in X$. Il existe un n_0 tel que $d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq n_0$. Si $n \geq n_0$, on trouve $d(a, x_n) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq d(a, x_{n_0}) + 1$. Finalement, $d(a, x_n) \leq r$, $\forall\ n$, où $r = \max\{d(a, x_0), \ldots, d(a, x_{n_0-1}), d(a, x_{n_0}) + 1\}$. $\square$

Â¿ nouveau, la réciproque est fausse :

Exemple 2. *Dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n), $x_n = (-1)^n$, est bornée, mais pas de Cauchy.*

En effet, $d(0, x_n) \leq 1$, $\forall\ n$. Comme 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de (x_n), cette suite n'est pas de Cauchy.

Définition 3. *Un espace (X, d) est* **complet**$\Longleftrightarrow$ *toute suite de Cauchy $(x_n) \subset X$ est convergente.*
Un espace normé $(E, \|\ \|)$ est **de Banach**$\Longleftrightarrow$ *E est complet pour la distance associée à $\|\ \|$.*

Exemple 3. *$\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$ n'est pas complet, car il existe dans $\mathbb{Q}$ une suite de Cauchy non convergente.*

Théorème 3. *$\mathbb{R}$ est complet.*

Remarque 1. *On admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés algébriques usuelles et l'axiome de la borne* sup.

Démonstration. Soient $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots, \}$, $a_n = \inf A_n$, $b_n = \sup A_n$. On a $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, car A_n est borné. Clairement, $a_n \leq b_n$, (a_n) est croissante, (b_n) décroissante. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ si $n, m \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $A_n \subset [x_{n_0} - \varepsilon/2, x_{n_0} + \varepsilon/2]$, ce qui implique $x_{n_0} - \varepsilon/2 \leq a_n \leq b_n \leq x_{n_0} + \varepsilon/2$; d'où $b_n - a_n \leq \varepsilon$. Il s'ensuit que les suites (a_n), (b_n) sont adjacentes. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$, $b_n \to b$. Comme $a_n \leq x_n \leq b_n$, on trouve $x_n \to a$. $\square$

Proposition 3. *Soient (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, des espaces complets. Alors $X = \prod_{j=1}^{k} X_j$ muni d'une distance produit est complet.*

Démonstration. On muni X de la distance D_∞. Si (x^n) est une suite de Cauchy dans X, (x_j^n) l'est aussi dans X_j. Si $x_j^n \to x_j$ dans X_j, alors $x^n \to (x_1, \ldots, x_k)$ dans X. □

Corollaire 1. $\mathbb{R}^n$ *muni d'une norme produit est complet.*

Définition 4. *Si* (X, d), (Y, D) *sont des espaces métriques,* $f : X \to Y$ *est* **bornée** *si son image* $f(X)$ *est bornée.*
$C_b(X, Y) = \{f : (X, d) \to (Y, D)\ ; f$ **continue** *et* **bornée**$\}$.
Si f, $g \in C_b(X, Y)$, *on pose* $\delta(f, g) = \sup\{D(f(x), g(x))\ ; x \in X\}$.

Exercice. a) $\delta(f, g) < \infty$.
b) $\delta(f_n, f) \to 0 \iff f_n \xrightarrow{u} f$.

Proposition 4. *Si* (Y, D) *est* **complet**, *alors* $C_b(X, Y)$ *est complet.*

Démonstration. Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $C_b(X, Y)$, alors, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans Y. On pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $\delta(f_n, f_m) < \varepsilon/2$, $n, m \geq n_0$. Pour tout $x \in X$, on a alors $D(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$; ceci s'obtient en faisant $m \to \infty$ dans l'inégalité précédente (on utilise la continuité de $y \mapsto D(a, y)$). On trouve $\delta(f_n, f) < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Il s'ensuit que $\delta(f_n, f) \to 0$, ce qui revient à $f_n \xrightarrow{u} f$. Par conséquent, f est continue. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un $a \in Y$ et un $r > 0$ tels que $(D(a, f_{n_0}(x)) \leq r$, $x \in X$. On a alors $D(a, f(x)) \leq D(a, f_{n_0}(x)) + D(f_{n_0}(x), f(x)) \leq r + 1$. Il s'ensuit que $f \in C_b(X, Y)$. □

Proposition 5. *Si* (X, d) *est un espace métrique et* $(E, \|\ \|_E)$ *est un espace* **de Banach**, *alors* $C_b(X, E)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $C_b(X, E)$ est un espace vectoriel, les autres propriétés découlant de la proposition précédente. Si $f, g \in C_b(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est continue. Par ailleurs, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $\|f(x)\|_E \leq r_1$, $\|g(x)\|_F \leq r_2$, $x \in X$. Il s'ensuit que $\|(\lambda f + g)\|_F \leq |\lambda| r_1 + r_2$, $x \in X$. □

Proposition 6. *Si $(E, \| \ \|_E)$ est un espace normé et $(F, \| \ \|_F)$ un espace* **de Banach**, *alors $\mathcal{L}(E,F)$ est une espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n) \subset \mathcal{L}(E,F)$ une suite de Cauchy. Pour tout $x \in E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon/(\|x\|_E + 1)$ si $n, m \geq n_0$. Pour des tels n, m, on a alors

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_F = \|(f_n - f_m)(x)\|_F \leq \|f_n - f_m\| \|x\|_E < \varepsilon.$$

On pose, pour $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Alors f est linéaire. En effet,

$$f(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n(x)+f_n(y)) = \lambda f(x)+f(y), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x,y \in E\ ;$$

(on se sert de la continuité des applications $(a,b) \mapsto a+b$ dans $F \times F$ et $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$ dans $\mathbb{R} \times F$).
Il existe un $r > 0$ tel que $\|f_n\| \leq r$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\|f(x)\|_F = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\|_F \leq r\|x\|_E$, $x \in E$, d'où f continue.
Enfin, on montre que $f_n \to f$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$ si $n, m \geq n_0$. En particulier, si $\|x\|_E \leq 1$, alors $\|f_n(x) - f_m(x)\|_F < \varepsilon/2$. Comme dans la preuve de la proposition précédente, on trouve $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$ et $\|x\|_E \leq 1$. Par passage au sup, on obtient $\|f_n - f\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. □

Une adaptation évidente de la preuve précédente donne le résultat suivant, laissé comme exercice :

Proposition 7. *Soient $(E_j, \| \ \|_j)$, $j = 1, \ldots, k$, des espaces normés et $(F, \| \ \|_F)$ un espace* **de Banach**. *Si on munit $E = \prod_{j=1}^{k} E_j$ d'une norme produit, alors $\mathcal{L}_k(E,F)$ est un espace de Banach.*

Proposition 8. *$\ell^\infty = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R}\ ; (x_n)$ bornée$\}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est un espace de Banach.*

Démonstration. On munit $\mathbb{N}$ de la distance triviale d. Si $(a_k) \subset \mathbb{N}$, on a $a_k \to a \iff$ il existe un rang k_0 tel que $a_k = a$ pour $k \geq k_0$. "$\Longleftarrow$" est claire. Pour "$\Longrightarrow$", $\exists\, k_0$ tel que $d(a_k, a) < 1/2$ si $k \geq k_0$; il s'ensuit que $a_k = a$ si $k \geq k_0$. Conséquence : toute application $f : (\mathbb{N}, d) \to (Y, D)$ est continue, quel que soit l'espace métrique (Y, D). On trouve que $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty) = C_b((\mathbb{N}, d), (\mathbb{R}, | \ |))$. □

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Proposition 9. *a) Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X.*
b) Si (X, d) est complet et A est un fermé de X, alors (A, d) est complet.

Démonstration. a) Soient $(x_n) \subset A$ et $a \in X$ tels que $x_n \to a$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente (dans A) vers un $b \in A$. L'unicité de la limite (dans X) implique $a = b \in A$. Il s'ensuit que $\overline{A} \subset A$, d'où A fermé.
b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans A. Alors il existe un $a \in X$ tel que $x_n \to a$. Il s'ensuit que $a \in A$, et donc (x_n) converge dans A. □

Corollaire 2. *Dans un espace métrique complet, A complet$\iff$ A fermé.*

Proposition 10. *Soit (X, d) un espace métrique. Si toutes les parties* **fermées** *et* **bornées** *de X sont complètes, alors X est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X. Alors (x_n) est bornée, et donc $(x_n) \subset \overline{B}(a, r)$ pour un $a \in X$ et un $r > 0$. $\overline{B}(a, r)$ étant un fermé borné, (x_n) converge dans $\overline{B}(a, r)$, et donc dans X. □

3.2 Théorème du point fixe

Définition 5. *Une application $f : (X, d) \to (Y, D)$ est* **contractante** *s'il existe un $k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Définition 6. *Si $f : X \to X$, un* **point fixe** *de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.*

Théorème 4. *(***Théorème du point fixe de Picard***) Soient* (X,d) *un espace métrique* **complet** *et* $f:(X,d)\to(X,d)$ **contractante**. *Alors :*
a) f *a exactement un point fixe* a *;*
b) pour tout $x_0\in X$*, la suite* (x_n)*,* $x_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\ fois}(x_0)$*, converge vers* a *;*
c) de plus, si $k<1$ *est tel que* f *soit* k*-lipschitzienne, alors on a* $d(x_n,a)\leq \dfrac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)$.

Démonstration. a) Soit $0<k<1$ tel que f soit k-lipschitzienne. f a au plus un point fixe : si, par l'absurde, a et b sont des points fixes et $a\neq b$, on aboutit à la contradiction $0<d(a,b)=d(f(a),f(b))\leq kd(a,b)<d(a,b)$.
L'existence de a suit de b) : si la suite (x_n) converge et si a est tel que $x_n\to a$, alors $x_{n+1}=f(x_n)\to f(a)$, d'où $f(a)=a$.
b) On a, pour tout n, $d(x_{n+1},x_n)\leq k^n d(x_1,x_0)$ (par récurrence sur n). Par conséquent, si $m\geq n$, alors
(1)
$$d(x_m,x_n)\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\ldots+d(x_{m-1},x_m)\leq \frac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)=Ck^n.$$

Comme $Ck^n\to 0$, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un n_0 tel que $Ck^n<\varepsilon$ si $n\geq n_0$. Il s'ensuit que $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ si $m,n\geq n_0$. La suite (x_n) étant de Cauchy, elle converge vers un $a\in X$. De ce qui précède, a est l'unique point fixe de f.
c) Comme $x_m\to a$, la conclusion s'obtient en faisant tendre $m\to\infty$ dans (1). □

Exemple 4. *Trouver le nombre des solutions de l'équation* $\cos x=x$.

On a $\cos x=x\implies x\in[-1,1]$. Soit $f:X=[-1,1]\to X$, $f(x)=\cos x$. $[-1,1]$ est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a $|f'(x)|\leq\sin 1<1$, $x\in X$. Le théorème des accroissements finis implique $|f(x)-f(y)|\leq\sin 1|x-y|$, $x,y\in X$. Il s'ensuit que l'équation $\cos x=x$ a exactement une solution.

3.3 Séries

Définition 7. *Soient* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé et* $(x_n) \subset E$. *La série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *est* **convergente**$\Longleftrightarrow$ *la suite* $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ *est convergente. On pose* $\sum_{n\geq 0} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Définition 8. *La série* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *est* **absolument convergente**$\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ *est convergente.*

Traduction : $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ convergente $\Longleftrightarrow$ il existe un $M > 0$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \leq M$ pour tout n.

Proposition 11. *Dans un* **espace de Banach**, *une série* **absolument convergente** *est convergente.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$. Il existe un n_0 tel que $|T_m - T_n| < \varepsilon$ si $m, n \geq n_0$. Si $m \geq n \geq n_0$, on a $\|S_m - S_n\| \leq T_m - T_n < \varepsilon$; la suite (S_n) est de Cauchy, donc convergente. □

Exemple 5. *Si* E *est un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E)$, $\|T\| < 1$, *alors* $Id - T$ *et bijectif, avec un inverse linéaire et bijectif.*

Posons $x_n = T^n$, $n \geq 0$. Alors $x_n \in \mathcal{L}(E)$ (pourquoi ?). On remarque que, si $T, S \in \mathcal{L}(E)$, alors $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. En effet,

$$\|TS\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|TSx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|T\|\|Sx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|T\|\|S\|\|x\|}{\|x\|} = \|T\|\|S\|.$$

Il s'ensuit que $\|x_n\| \leq \|T\|^n$, et donc la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, car absolument convergente. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $S = \sum_{n\geq 0} x_n \in \mathcal{L}(E)$. On a

$TS_n = \mathrm{Id} - T^{n+1}$, d'où $TS = \mathrm{Id}$, par passage à la limite. De même, $ST = \mathrm{Id}$. On trouve que $S = T^{-1}$ et $S \in \mathcal{L}(E)$.

Chapitre 4

Compacité

Définition 1. *Un espace métrique* (X, d) *est* **compact**$\Longleftrightarrow$ *toute suite* $(x_n) \subset X$ *admet une sous-suite convergente.*

Reformulation : toute suite $(x_n) \subset X$ a au moins une valeur d'adhérence. On remarque que la propriété d'un espace d'être compact ne change pas si on remplace la distance par une distance équivalente.

Théorème 5. *(***Lebesgue***) Soit* (X, d) *compact. On suppose* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$*, avec* U_i *ouvert,* $i \in I$ *(on appelle* $(U_i)_{i\in I}$ *un* **recouvrement ouvert** *de* X*). Alors il existe un* $r > 0$ *tel que, pour tout* $x \in X$*,* $B(x, r)$ *soit contenue dans* U_i *pour un certain* i *(dépendant de* x*, en principe).*

(r est **la constante de Lebesgue** du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.)

Démonstration. Par l'absurde : pour tout $r > 0$, il existe un $x \in X$ tel que $B(x, r)$ ne soit contenue dans aucun U_i. Pour $r = 1/(n + 1)$, on trouve un x_n tel que $B(x_n, 1/(n+1))$ ne soit contenue dans aucun U_i. On considère une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un $x \in X$. Il existe un i tel que $x \in U_i$, et donc un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Il existe un k_0 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ si $k \geq k_0$. Il existe un k_1 tel que $1/(n_k + 1) < \varepsilon/2$ si $k \geq k_1$. Si $k = \max\{k_0, k_1\}$, alors $z \in B(x_{n_k}, 1/(n_k + 1) \Longrightarrow d(z, x) \leq d(z, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, et donc $B(x_{n_k}, 1/(n_k + 1)) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i$, contradiction. $\square$

Proposition 1. *Soient* (X, d) *compact et* $r > 0$*. Alors il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *tels que* $X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r)$.

Démonstration. Par l'absurde : sinon, pour tout $x_1 \in X$ on a $B(x_1, r) \neq X$. Soit $x_2 \notin B(x_1, r)$. Alors $B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq X$. Soit $x_3 \notin B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq X$, etc. Par récurrence, on trouve une suite (x_n) telle que $x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, r)$. Il s'ensuit que $d(x_n, x_m) \geq r$, $\forall\ m, n$. Une telle suite ne peut pas avoir de sous-suite convergente (contradiction qui finit la preuve). En effet, si, par l'absurde, $x_{n_k} \to x$, alors $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq r$ si $k \neq l$. En faisant d'abord $l \to \infty$, ensuite $k \to \infty$, on trouve $d(x, x) \geq r$, contradiction. □

Proposition 2. *Soit* (x_n) *une suite sans valeur d'adhérence de* (X, d)*. Alors, pour tout* $x \in X$*, il existe un* $r > 0$ *tel que* $B(x, r)$ *ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite.*

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 19 du Chapitre 1, mais on présente une preuve directe. Par l'absurde : il existe $x \in X$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ contienne une infinité de termes de la suite. On prend $r = 1$. Alors $B(x, 1)$ contient une infinité de termes de la suite ; en particulier, on trouve un n_0 tel que $d(x_{n_0}, x) < 1$. Par récurrence, en prenant $r = 1/(k + 1)$, on trouve un $n_k > n_{k-1}$ tel que $d(x_{n_k}, x) < 1/(k + 1)$. Il s'ensuit que (x_{n_k}) est une sous-suite de la suite initiale et que $x_{n_k} \to x$, contradiction. □

Théorème 6. *(***Borel-Lebesgue***)* (X, d) *compact* $\Longleftrightarrow$ *de tout recouvrement ouvert* $(U_i)_{i \in I}$ *de* X *on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire il existe une famille* **finie** $J \subset I$ *telle que* $X = \bigcup_{j \in J} U_j$.

Démonstration. "$\Longrightarrow$" Soit r la constante de Lebesgue du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r)$. Pour $j = 1, \ldots, n$, il existe un

$i_j \in I$ tel que $B(x_j, r) \subset U_{i_j}$. Alors $X = \bigcup_{k \in J} U_k$, où $J = \{i_j \ ; \ j = 1, \ldots, n\}$.

"$\Longleftarrow$" Par contraposée : si (X, d) n'est pas compact, il existe une suite $(x_n) \subset X$ sans valeur d'adhérence. Pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite. Clairement, $(B(x, r_x))_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Si on considère une famille finie $J \subset X$, alors l'union de la famille $(B(x, r_x))_{x \in J}$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite. En particulier, cette famille ne couvre ni la suite (x_n), ni X. □

Par passage au complémentaire, on trouve

Corollaire 3. *Soit (X, d) un espace compact.*
a) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, alors il existe une famille **finie** *$J \subset I$ telle que $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$.*
b) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ pour toute famille **finie** *$J \subset I$, alors $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

Proposition 3. *Un espace* **compact** *est* **complet**.

Démonstration. Soit (X, d) un espace compact. Alors toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence ; elle est donc convergente ; par conséquent, (X, d) est complet. □

Proposition 4. *Soient (X, d) une espace* **compact** *et $A \subset X$. Alors A compact$\Longleftrightarrow$ A fermé dans X.*

Démonstration. Si A est compact, alors A est complet, donc fermé dans X. Réciproquement, si (x_n) est une suite de A, alors (x_n) a une valeur d'adhérence dans X ; A étant fermé, cette valeur d'adhérence appartient à A, et donc (x_n) a une valeur d'adhérence dans A. □

Proposition 5. *Un produit d'espaces compacts est compact.*

Démonstration. Soient (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, k$, des espaces compacts et $X = \prod_{j=1}^{k} X_j$ muni d'une distance produit. Soit $(x^n) \subset X$ une suite de X. Il existe une suite extraite $(x_1^{\varphi_1(n)})$ convergente vers un $x_1 \in X_1$. La suite $(x_2^{\varphi_1(n)})$ de X_2 contient une suite extraite $(x_2^{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$ convergente vers un $x_2 \in X_2$, etc. Finalement, avec $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k$, on trouve que $(x^{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (x^n) ayant comme limite $(x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

4.1 Fonctions continues sur un compact

Proposition 6. *Soit $f \in C((X,d), \mathbb{R})$, avec (X,d)* **compact**. *Alors* $\sup f$ *et* $\inf f$ *sont finis et il existe $a, b \in X$ tels que $f(a) = \inf f$ et $f(b) = \sup f$.*

(Une fonction continue réelle sur un compact est bornée et ses bornes sont atteintes.)

Démonstration. On considère le sup ; le raisonnement est similaire pour l'inf. Soit $M = \sup f$; il existe une suite $(x_n) \subset X$ telle que $f(x_n) \to M$. Il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un $b \in X$. Alors $f(x_{n_k}) \to f(b)$, d'où $M = f(b)$. En particulier, M est fini. $\square$

Proposition 7. *Tout espace* **compact** *est* **borné**.

Démonstration. Soit (X,d) compact. On fixe un $a \in X$ et on considère la fonction continue $f : (X,d) \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,a)$. Alors f est bornée ; en particulier, il existe un $r > 0$ tel que $f(x) \leq r$, $x \in X$, ou encore $X = \overline{B}(a,r)$. $\square$

Proposition 8. *Soit $f \in C((X,d),(Y,D))$, (X,d) étant* **compact**. *Alors $f(X)$ est un compact.*

Démonstration. Soit $(f(x_n))$ une suite de $f(X)$. Si $x_{n_k} \to x$, alors $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(X)$. Il s'ensuit que $(f(x_n))$ a une valeur d'adhérence dans $f(X)$. $\square$

Proposition 9. *Soit $f \in C((X,d),(Y,D))$ une application* **bijective**, *(X,d) étant un* **compact**. *Alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la continuité de f^{-1}. Soit F un fermé de X ; F est donc compact. Alors $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un compact de Y, donc un fermé de Y. □

Définition 2. *$f : (X,d) \to (Y,D)$ est* **uniformément continue**$\Longleftrightarrow$ *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $D(f(x), f(y)) < \varepsilon$ dès que $d(x,y) < \delta$.*

Autrement dit, on peut prendre, dans la définition de la continuité, un δ indépendant de a. Il est immédiat qu'une fonction uniformément continue est continue.

Théorème 7. *(***Heine***) Soit $f \in C((X,d),(Y,D))$, avec (X,d)* **compact**. *Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pout tout $a \in X$, il existe un $\delta_a > 0$ tel que $D(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$ si $d(x,a) < \varepsilon$. Clairement, $(B(a,\delta_a))_{a\in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Soit δ la constante de Lebesgue de ce recouvrement. Si $x, y \in X$ et $d(x,y) < \delta$, alors $x, y \in B(x,\delta) \subset B(a,\delta_a)$ pour un $a \in X$, d'où $D(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), f(y)) < \varepsilon$. □

4.2 Exemples d'espaces compacts

Théorème 8. *(***Bolzano-Weierstrass***) Un intervalle* **fermé** *et* **borné** *de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration. Soit $I = [a,b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On définit une suite d'intervalles de la manière suivante : on pose $I_0 = I$. Si I_k a été construit tel qu'il contienne une infinité de termes de la suite, on divise I_k en deux intervalles fermés de longueur égale à la moitié de la longueur de I_k, J et K. I_{k+1} est alors un de ces deux intervalles ; on lui demande de contenir une infinité de termes de la suite. On note que c'est toujours possible de construire I_{k+1}, car au moins l'un des J ou K contient une infinité de

termes de la suite. On construit ensuite, par récurrence, une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \in I_k$, $k \in \mathbb{N}$. On choisit $x_{n_0} = x_0 \in I_0$. En supposant $x_{n_0} < x_{n_1} < \ldots < x_{n_{k-1}}$ construits, on note que, par construction, I_k contient des termes x_n avec $n > n_{k-1}$. On choisit alors un $n_k > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in I_k$. La suite (x_{n_k}) est de Cauchy. En effet, si $l \geq k$, alors $x_{n_l}, x_{n_k} \in I_k$ (car $I_l \subset I_k$) et donc $|x_{n_l} - x_{n_k}| \leq (b-a)/2^k$. Comme $(b-a)/2^k \to 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un k_0 tel que $(b-a)/2^k < \varepsilon$ si $k \geq k_0$; il s'ensuit que $|x_{n_l} - x_{n_k}| < \varepsilon$ si $k, l \geq k_0$.
$[a, b]$ étant complet (car fermé dans $\mathbb{R}$), on trouve que (x_{n_k}) converge dans $[a, b]$, et donc (x_n) a une valeur d'adhérence. □

Proposition 10. *Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme produit, les* **compacts** *sont précisément les ensembles* **fermés** *et* **bornés***.*

Démonstration. Un compact est toujours borné et complet, et donc borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, si K est borné, il existe un $r > 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq r$, $x \in K$. Alors $K \subset L = [-r, r]^n$, qui est compact comme produit de compacts. K étant fermé dans $\mathbb{R}^n$, il est fermé dans L, donc compact. □

Théorème 9. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toutes les normes sont équivalentes à $\| \ \|_1$. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et soit $f : (\mathbb{R}^n, \| \ \|_1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$. Alors $|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \|e_j\| \leq C\|x - y\|_1$, où $C = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Il s'ensuit que f est C-lipschitzienne, donc continue. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_1 = 1\}$. Alors K est fermé dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ (car $x \mapsto \|x\|_1$ est 1-lipschitzienne, donc continue, pour la norme $\| \ \|_1$) et borné. Il s'ensuit que cet ensemble est compact dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$. Comme $f(x) \neq 0$, $x \in K$, on trouve que $m = \displaystyle\min_{x \in K} f(x) > 0$ (et $M = \displaystyle\max_{x \in K} f(x) > 0$). Si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $x = \dfrac{1}{\|y\|_1} y \in K$ et $y = \|y\|_1 x$. On trouve $m\|y\|_1 \leq \|y\| = \|y\|_1 f(x) \leq M\|y\|_1$, ou encore $m\|y\|_1 \leq \|y\| \leq M\|y\|_1$. Cette inégalité étant clairement vraie si $y = 0$, on obtient l'équivalence des normes. $\square$

On peut enfin prouver le

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel de* **dimension finie**, *toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base fixée de l'espace de dimension finie E. Soit $T : \mathbb{R}^n \to E$, $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, qui est clairement linéaire et bijective. Soient $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ deux normes sur E. On définit $|||x|||_j = \|Tx\|_j$, $j = 1, 2$. Il est immédiat que $||| \ |||_j$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Il existe alors $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\|e\|_1 = C_1|||T^{-1}e|||_1 \leq \|e\|_2 = |||T^{-1}e|||_2 \leq C_2\|e\|_1 = C_2|||T^{-1}e|||_1, \quad \forall\ e \in E.$$

$\square$

Théorème 10. *Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé* **de dimension finie**. *Alors :*
a) E *est complet.*
b) $A \subset E$ *est* **complet**$\iff$ A *est* **fermé**.
c) $A \subset E$ *est* **compact**$\iff$ A *est* **fermé et borné**.

Démonstration. Soit T l'application définie ci-dessus. Il suffit de considérer sur E la norme $\|e\| = \|T^{-1}e\|_\infty$. a) Si (e^n) est une suite de Cauchy dans E, il est clair que $(T^{-1}e^n)$ est un suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, qui est complet. Si $T^{-1}e^n \to x$, alors clairement $e^n \to Tx$.
b) "$\Longrightarrow$" Un sous-espace complet est toujours fermé. "$\Longleftarrow$" Soit (e^n) une suite de Cauchy de A. Alors $(T^{-1}e^n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ (pourquoi ?). Si x est la limite de cette deuxième suite, alors $e^n \to Tx$ dans E (pourquoi ?). A étant fermé, on trouve que $Tx \in A$; par conséquent, tout suite de Cauchy de A converge dans A.
c) "$\Longrightarrow$" est vraie dans tout espace métrique. "$\Longleftarrow$" Clairement, si A est fermé et borné, $T^{-1}(A)$ l'est aussi (pourquoi ?). Donc $T^{-1}(A)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Il

s'ensuit que $A = T(T^{-1}(A))$ est un compact de E (car image d'un compact par une fonction continue). $\square$

4.3 Compléments

Ce dernier résultat est **faux dans tout espace de dimension infinie** :

Théorème 11. *(***Riesz***) Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé* **de dimension infinie***. Alors* $\overline{B}(0,1)$ *est un ensemble* **fermé***,* **borné***, mais* **non compact***.*

Dans la preuve du théorème, on se servira du résultat suivant :

Lemme 1. *Soit A un ensemble* **fermé** *contenu dans un espace normé de* **dimension finie** $(G, \| \ \|)$*. Alors, pour tout $x \in G$, il existe un $a \in A$ tel que $\|x - a\| = d(x, A)$.*

Autrement dit, l'inf dans la définition de la distance d'un point à un ensemble est atteint.

Démonstration. Il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que $\|x - a_n\| \to d(x, A)$. La suite $(\|x - a_n\|)$ est donc bornée dans $\mathbb{R}$: il existe un $M > 0$ tel que $\|x - a_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\|a_n\| \leq \|x - a_n\| + \|x\| \leq M + \|x\| \equiv R$. La suite (a_n) appartient donc à l'ensemble $K = A \cap \overline{B}(0, R)$, qui est fermé et borné, donc compact. Il existe donc une sous-suite (a_{n_k}) qui converge vers un $a \in K$ (d'où $a \in A$). Finalement, on trouve $\|x - a\| = \lim_{k \to \infty} \|x - a_{n_k}\| = d(x, A)$. $\square$

Revenons au théorème.

Démonstration. Il existe, dans E, un vecteur non nul f_0 (sinon $E = \{0\}$, qui est de dimension finie). Soit $e_0 = f_0/\|f_0\|$, qui vérifie $\|e_0\| = 1$. Nous allons construire par récurrence une suite (e_n) telle que $\|e_n\| = 1$ et $\|e_n - e_m\| \geq 1$ si $m \neq n$; clairement, une telle suite ne peut avoir de sous-suite convergente, ce qui finit la preuve. Supposant $e_0, \ldots, e_{n-1}$ déjà construits, soit $F = \text{Vect}(\{e_0, \ldots, e_{n-1}\})$. On a $F \neq E$, sinon E serait de dimension finie. Soit $f_n \in E \setminus F$. F étant fermé dans E (car complet), on a $d(f_n, F) > 0$. Le lemme précédent (avec $A = F$ et

$G =$Vect$(F \cup \{f_n\})$ implique l'existence d'un $g_n \in F$ tel que $\|f_n - g_n\| = d(f_n, F)$. On pose $e_n = (f_n - g_n)/\|f_n - g_n\|$, de sorte que, clairement, $\|e_n\| = 1$. Il reste à montrer que $\|e_n - e_j\| \geq 1$, $j = 0, \ldots, n-1$. Si, pour un tel j, on pose $h = g_n + d(x, F)e_j \in F$, on a $\|e_n - e_j\| = \|f_n - h\|/d(f_n, F) \geq 1$, par définition de la distance à un ensemble. $\square$

Chapitre 5

Connexité

Définition 1. *Un espace métrique* (X, d) *est* **connexe**$\Longleftrightarrow$ *les seules parties à la fois ouvertes et fermées de* X *sont* $\emptyset$ *et* X*.*

Proposition 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) (X, d) *connexe ;*
b) Si $X = F_1 \cup F_2$*, avec* F_1*,* F_2 *fermés disjoints, alors* $F_1 = \emptyset$ *ou* $F_2 = \emptyset$ *;*
c) Si $X = U_1 \cup U_2$*, avec* U_1*,* U_2 *ouverts disjoints, alors* $U_1 = \emptyset$ *ou* $U_2 = \emptyset$ *;*
d) Si $f \in C((X, d), \{0, 1\})$*, alors* f *est constante.*

Ici, $\{0, 1\}$ est considéré comme un sous-espace de $\mathbb{R}$ (donc il est muni de la distance triviale !).

Démonstration. a)$\Longrightarrow$b) On a $F_1 = (F_2)^c$; par conséquent, F_1 est à la fois ouvert et fermé. On a donc $F_1 = \emptyset$ ou $F_1 = X$ (et alors $F_2 = \emptyset$).
b)$\Longrightarrow$c) On a $X = (U_1)^c \cup (U_2)^c$, d'où $(U_1)^c = \emptyset$ ou $(U_2)^c = \emptyset$, ce qui revient à $U_2 = \emptyset$, respectivement $U_1 = \emptyset$.
c)$\Longrightarrow$d) $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0, 1\}$, et donc $U_1 = f^{-1}(\{0\})$ et $U_2 = f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts de X. Clairement, ces deux ouverts sont disjoints et $X = U_1 \cup U_2$. Il s'ensuit que $U_1 = \emptyset$ (et alors $f \equiv 1$) ou $U_2 = \emptyset$ (et alors $f \equiv 0$).
d)$\Longrightarrow$a) Si A est une partie à la fois ouverte et fermée de X, soit $f = \mathbf{1}_A$. Alors $f \in C(X, \{0, 1\})$, car les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$, et on vérifie

aisément que les images réciproques de ces ensembles sont des ouverts de X. On a donc $f \equiv 0$ ou $f \equiv 1$ (et alors $A = \emptyset$ ou $A = X$). $\square$

Proposition 2. *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Si A est connexe, alors $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f \in C(\overline{A}; \{0, 1\})$. Alors $f_{|A}$ est constante ; supposons, par exemple, $f(x) = 0$, $\forall\ x \in A$. Soit $x \in \overline{A}$. Il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$. On trouve $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, et donc f est constante dans $\overline{A}$. $\square$

La même preuve sert à montrer

Proposition 3. *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Si A est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Proposition 4. *Soient (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose que :*
(i) chaque A_i est connexe ;
(ii) il existe un $i_0 \in I$ tel que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, $\forall\ i \in I$.
Alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Soit $f \in C(\bigcup\limits_{i\in I} A_i; \{0, 1\})$. Alors, pour chaque i, $f_{|A_i}$ est constante ; soit c_i la valeur de cette constante. Si $x \in A_i \cap A_{i_0}$, on trouve $c_i = f(x) = c_{i_0}$, d'où f est constante. $\square$

Corollaire 4. *Soient (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X telle que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Corollaire 5. *Soient A, B deux parties connexes de X telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.*

Un résultat plus fort que le corollaire précédent est :

Proposition 5. *Soient A, B deux parties connexes de X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f \in C(A \cup B; \{0,1\})$. Il existe deux constantes c, d telles que $f_{|A} = c$, $f_{|B} = d$. Soit $x \in \overline{A} \cap B$. D'une part, on a $f(x) = d$. D'autre part, il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$. On trouve $d = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$, et donc f est constante. □

Définition 2. *Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. La* **composante connexe de** *x est $\mathcal{C}_x = \cup\{A\ ; A$ connexe, A contient $x\}$.*
Une partie A de X est une **composante connexe** *s'il existe un x tel que $A = \mathcal{C}_x$.*

Proposition 6. *a) $\mathcal{C}_x$ est la plus grande partie connexe de X contenant x (en particulier, $x \in \mathcal{C}_x$) ;*
b) deux composantes connexes sont soit égales, soit disjointes ; l'union des composantes connexes est X (autrement dit, les composantes connexes forment une partition de X) ;
c) chaque composante connexe est fermée dans X ;
d) Si les composantes connexes sont **en nombre fini**, *alors chaque composante connexe est ouverte dans X.*

Démonstration. a) On doit montrer que : *(i)* $\mathcal{C}_x$ est connexe, *(ii)* $x \in \mathcal{C}_x$, *(iii)* si A est connexe et $x \in A$, alors $A \subset \mathcal{C}_x$. La dernière propriété est claire grâce à la définition de $\mathcal{C}_x$. Pour les deux premières, notons que $\{x\}$ est connexe (pourquoi ?) ; en particulier, $x \in \mathcal{C}_x$. On peut écrire $\mathcal{C}_x = \cup\{A\ ;\ A$ connexe et $A \cap \{x\} \neq \emptyset\}$, ce qui montre que $\mathcal{C}_x$ est connexe.
b) Si $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$, alors $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y$ est connexe et contient x. On trouve $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$, d'où $\mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$; de même, on a $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$, d'où $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$. Par ailleurs, on a $X = \bigcup\limits_{x\in X} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{C}_x \subset X$, d'où $\bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{C}_x = X$.
c) $\mathcal{C}_x$ étant connexe, $\overline{\mathcal{C}_x}$ (qui contient x) l'est aussi. Il s'ensuit que $\overline{\mathcal{C}_x} \subset \mathcal{C}_x$, d'où $\overline{\mathcal{C}_x} = \mathcal{C}_x$. On trouve que $\mathcal{C}_x$ est un fermé.

d) On a $X \setminus \mathcal{C}_x = \cup\{\mathcal{C}_y \; ; \; \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset\}$. C'est une union finie de fermés, donc un fermé. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_x$ est un ouvert. $\square$

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 7. *La relation $x \sim y \iff x$ et y appartiennent à la même composante connexe est une relation d'équivalence.*

Proposition 8. *Soient (X, d), (Y, D) des espaces métriques et $f \in C((X, d), (Y, D))$. Si X est* **connexe***, alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $g \in C(f(X), \{0, 1\})$. Alors $g \circ f \in C(X, \{0, 1\})$. Il s'ensuit que $g \circ f$ est constante ; par exemple, $g \circ f \equiv 0$. Si $y \in f(X)$, il existe un $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On trouve $g(y) = g(f(x)) = 0$, et donc g est constante. $\square$

Proposition 9. *Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$, k espaces connexes. Alors $X = \prod_{j=1}^{k} X_j$ est connexe.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat si $k = 2$; le cas général s'obtient immédiatement par récurrence sur k. On fixe $x_1 \in X_1$. Soient $A = \{x_1\} \times X_2$, $A_y = X_1 \times \{y\}$, $y \in X_2$. Alors $X_1 \times X_2 = A \cup \bigcup_{y \in X_2} A_y$. Par ailleurs, on a $A_y \cap A \neq \emptyset$, $\forall \; y \in X_2$. Il suffit de montrer que A et A_y sont connexes. On prouve que A est connexe ; l'argument est le même pour A_y. Soit $f : X_2 \to X$, $f(x_2) = (x_1, x_2)$. Alors f est continue, car ses coordonnées sont continues. X_2 étant connexe, $A = f(X_2)$ l'est aussi. $\square$

5.1 Exemples d'espaces connexes

Théorème 12. *a) Une partie A de $\mathbb{R}$ est connexe$\iff$ A est un intervalle.*
b) Si $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in A$, alors la composante connexe de x dans A est le plus grand intervalle contenant x et contenu dans A.

c) Tout ouvert U de $\mathbb{R}$ est une union **au plus dénombrable** *d'intervalles ouverts* **disjoints**.

La partie c) est une **caractérisation** des ouverts de $\mathbb{R}$, car, réciproquement, toute union d'intervalles ouverts est un ouvert.

Démonstration. a) Si A n'est pas un intervalle, alors il existe $x < y < z$ tels que $x, z \in A$, mais $z \notin A$. Alors $U = A \cap]-\infty, z[$, $V = A \cap]z, +\infty[$ sont des ouverts non vides et disjoints de A tels que $A = U \cup V$, et donc A n'est pas connexe. Réciproquement, supposons A intervalle et soit $f \in C(A, \{0, 1\})$. Si, par l'absurde, f n'est pas constante, alors il existe $x, y \in A$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. De par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un z compris entre x et y (donc appartenant à A) tel que $f(z) = 1/2$, contradiction.
b) Posons $J = \cup\{I \text{ intervalle } \subset A \ ; \ x \in I\}$. J est un intervalle, car une union d'intervalles dont l'intersection est non vide (ce qui est le cas ici, car x est dans chaque intervalle) est un intervalle. Par définition de J, c'est le plus grand intervalle de A contenant x. De a), J est connexe et donc $J \subset \mathcal{C}_x$. Par ailleurs, $\mathcal{C}_x$ est un intervalle contenant x, d'où $\mathcal{C}_x \subset J$. Finalement, $\mathcal{C}_x = J$.
c) On commence par montrer qu'une composante connexe est un intervalle **ouvert**. Soient J une composante connexe de U et $x \in J$. Comme $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset U$. Alors J et $]x - r, x + r[$ sont des parties connexes de U d'intersection non vide. On trouve que $J \cup]x - r, x + r[$ est une partie connexe de U contenant x, et donc $J \cup]x - r, x + r[\subset \mathcal{C}_x = J$. Finalement, $]x - r, x + r[\subset J$, et donc J est un ouvert.
On a $U = \bigcup_{i \in I} J_i$, avec chaque J_i composante connexe (donc intervalle ouvert) ; on suppose qu'il n'y a pas de répétition dans cette liste, ce qui implique $J_i \cap J_k = \emptyset$ si $i \neq k$. Chaque J_i contient un nombre rationnel q_i. L'application $g : I \to \mathbb{Q}$, $g(i) = q_i$, est injective (car les intervalles sont disjoints). On trouve que I est au plus dénombrable. $\square$

Exemple 1. *Si $X = \mathbb{Q}$, alors $\mathcal{C}_x = \{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$.*

En effet, $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'intervalle non trivial, car entre deux rationnels il existe toujours un irrationnel.

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel. Si $x, y \in E$, le* **segment** *$[x, y]$ est défini par $[x, y] = \{(1-t)x + ty \ ; t \in [0, 1]\}$.*
Une partie C de E est **convexe** *si $[x, y] \subset C$ pour tout $x, y \in C$.*
Une partie A de E est **étoilée** *(par rapport à un point x_0) s'il existe un $x_0 \in A$ tel que $[x_0, x] \subset A$, $\forall\ x \in A$.*

Proposition 10. *Pour une partie A d'un espace normé $(E, \| \ \|)$, on a A convexe$\Longrightarrow$ A étoilée$\Longrightarrow$ A connexe.*

Démonstration. La première implication est claire (on peut choisir n'importe quel $x_0 \in A$). Pour la seconde, on note que $x \in [x_0, x]$, $x \in A$, d'où $A \subset \displaystyle\bigcup_{x \in A} [x_0, x] \subset A$, ou encore $A = \displaystyle\bigcup_{x \in A} [x_0, x]$.
On montre d'abord qu'un segment est connexe. En effet, $[x, y] = f([0, 1])$, où $f : [0, 1] \to E$, $f(t) = (1-t)x + ty$. On a $\|f(t) - f(s)\| = |s - t|\|x - y\|$, $\forall\ s, t \in [0, 1]$; ainsi, f est lipschitzienne, donc continue. On trouve que $[x, y]$ est connexe. Finalement, A est une union d'ensembles connexes dont l'intersection est non vide (elle contient x_0), donc A est connexe. $\square$

Corollaire 6. *Un espace normé est connexe.*

Exemple 2. *Soit B une boule dans un espace normé. Alors B est convexe, donc connexe.*

On suppose, par exemple, que $B = B(x, r)$; l'argument est le même pour une boule fermée. Si $y, z \in B$ et $t \in [0, 1]$, alors $\|((1-t)y + tz) - x\| = \|(1-t)(y-x) + t(z-x)\| \leq (1-t)\|y - x\| + t\|z - x\| < r$, ou encore $(1-t)y + tz \in B$.

Exemple 3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *est connexe.*

En effet, $A = B \cup C$, où $B = \{(x, y) \in A \ ; \ y \geq 0\}$, $C = \{(x, y) \in A \ ; \ y \leq 0\}$. Clairement, $B \cap C \neq \emptyset$, B est étoilé par rapport à $(0, 1)$, C est étoilé par rapport à $(0, -1)$, d'où la conclusion.

Exemple 4. *$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.*

Si, par l'absurde, il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, soit $a = f(0, 0)$. Alors $f_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ étant connexe, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ l'est aussi, contradiction.

Proposition 11. *Soit U un* **ouvert dans un espace normé** $(E, \| \ \|)$. *Alors les composantes connexes de U sont ouvertes.*

Démonstration. Soit A une composante connexe de U. Si $x \in A$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. A et $B(x, r)$ sont connexes, d'intersection non vide, et donc $A \cup B(x, r)$ est une partie connexe de U contenant x. Il s'ensuit que $A \cup B(x, r) \subset A$, ou encore $B(x, r) \subset A$. $\square$

5.2 Connexité par arcs

Définition 4. *Soit (X, d) un espace métrique. Un* **arc** *dans X est une application* **continue** *$f : [a, b] \to X$, où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $x = f(a)$, $y = f(b)$, on dit aussi que f est un arc* **de** *x* **à** *y.*
(X, d) est **connexe par arcs**$\Longleftrightarrow$ *pour tout $x, y \in X$, il existe un arc de x à y.*

Proposition 12. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace connexe par arcs. On fixe un $a \in X$. Pour chaque $x \in X$, soit $f_x \in C([a_x, b_x], X)$ telle $f_x(a_x) = a$, $f_x(b_x) = x$. Alors $A_x = f_x(I_x)$ est un connexe de X. De plus, on a $A_x \cap A_a \neq \emptyset$. Il s'ensuit que $\bigcup\limits_{x \in X} A_x$ est connexe. Par ailleurs, on a $x \in A_x$, $x \in X$, et donc $\bigcup\limits_{x \in X} A_x = X$. $\square$

Proposition 13. *Dans un espace métrique (X, d), la relation $x \sim y \iff$ il existe un arc de x à y est une relation d'équivalence.*

Démonstration. $f : [0,1] \to X$, $f(t) \equiv x$, est un arc de x à x, et donc $x \sim x$. Si $f : [a,b] \to X$ est un arc de x à y, il est immédiat que $g : [a,b] \to X$, $g(t) = f(a+b-t)$, est un arc de y à x, et donc la relation est symétrique. Enfin, si $f : [a,b] \to X$, $g : [c,d] \to X$ sont un arc de x à y, respectivement de y à z, alors on voit facilement que $h : [a, b+d-c] \to X$, $h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in [a,b] \\ g(t+b-c), & \text{si } t \in [c,d] \end{cases}$, est un arc de x à z ; la relation est donc transitive. □

Exemple 5. *Dans un espace normé, un ensemble étoilé A est connexe par arcs.*

En effet, soit x_0 tel que $[x_0, x] \subset A$, $\forall\, x \in A$. Alors $x_0 \sim x$, $\forall\, x \in A$, car $f : [0,1] \to E$, $f(t) = x_0 + t(x - x_0)$ est un arc de x_0 à x. De la proposition précédente, on trouve que A est connexe par arcs.

Définition 5. *Si (X, d) est un espace métrique et $x \in X$, on pose $\mathcal{D}_x = \{y \in X \ ; \ x \sim y\}$.*

Proposition 14. *a) $\mathcal{D}_x$ est la plus grande partie de X contenant x et connexe par arcs.*
b) On a $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{C}_x$.

La propriété a) justifie le nom de **composante connexe par arcs de** x qu'on donne à $\mathcal{D}_x$.

Démonstration. a) De la proposition précédente, $\mathcal{D}_x$ est connexe par arcs. Clairement, la definition de $\mathcal{D}_x$ implique que $\mathcal{D}_x$ contient toute partie connexe par arcs contenant x.
b) $\mathcal{D}_x$ est une partie connexe de X contenant x, et donc $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{C}_x$. □

Proposition 15. *Si A est une partie de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{D}_x = \mathcal{C}_x$, $\forall\, x \in A$.*

Démonstration. On a vu que $\mathcal{C}_x$ est le plus grand intervalle de A contenant x. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_x$ est un intervalle, qui est clairement connexe par arcs. On trouve que $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{D}_x$, d'où la conclusion. □

Théorème 13. *Soient* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé et* U *un* **ouvert** *de* E. *Alors* $\mathcal{D}_x = \mathcal{C}_x$, $x \in U$.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}_y$ la composante connexe par arcs dans U de $y \in \mathcal{C}_x$. Clairement, $\mathcal{D}_y \subset \mathcal{C}_x$. On montre que $\mathcal{D}_y$ est un ouvert. En effet, soit $z \in \mathcal{D}_y$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(z, r) \subset \mathcal{C}_x$. $B(z, r)$ étant étoilée par rapport à z, on a $z \sim w$, $\forall\, w \in B(z, r)$. Comme on a aussi $z \sim w$, $\forall\, w \in \mathcal{D}_y$, on trouve que $\mathcal{D}_y \cup B(z, r)$ est connexe par arcs et contient y, d'où $B(z, r) \subset \mathcal{D}_y$.
Deux composantes connexes par arcs étant soit égales, soit disjointes (car $\sim$ est une relation d'équivalence), on trouve que $\mathcal{C}_x = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{D}_{x_i}$, les ensembles $\mathcal{D}_{x_i}$ étant mutuellement disjoints (on écrit cette union de sorte qu'il n'y ait pas de répétitions). On fixe un $i_0 \in I$. Alors $\mathcal{C}_x = \mathcal{D}_{x_{i_0}} \cup \bigcup\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mathcal{D}_{x_i}$; il s'ensuit que $\mathcal{C}_x$ est une union de deux ouverts disjoints. $\mathcal{C}_x$ étant connexe, l'un de ces deux ouverts doit être vide, ce qui implique $I = \{i_0\}$. On trouve $\mathcal{C}_x = \mathcal{D}_{x_{i_0}}$; comme $x \in \mathcal{C}_x$, on doit avoir $\mathcal{C}_x = \mathcal{D}_x$. □

Corollaire 7. *Dans un espace normé, tout* **ouvert connexe** *est* **connexe par arcs**.