Sur le livre de Lee Smolin

Michel Mizony

juillet 2007

1 introduction

Lee Smolin vient de sortir un livre intitulé *Rien ne va plus en physique*, titre provocateur, sans doute imposé par l'éditeur, dont le sous-titre *L'échec de la théorie des cordes* représente plus l'idée de l'auteur. Ayant lu des papiers de Lee Smolin, cf. copie d'une lettre d'Août 2005 en annexe que j'avais envoyée à Marc, je prends très au sérieux ce livre, dont je partage un certain nombre de points de vues et avec lequel je suis en désaccord sur d'autres.

Faut-il sauver le soldat physique théorique ?

Si effectivement on peut être en grand accord sur beaucoup de points que développe L. S., il reste un point faible dans son argumentation. Supposons que l'une des théories que l'on veut unifier soit maltraitée, plus précisément qu'un principe de base d'une de ces théories pose problème, au sens où il est mal traduit mathématiquement parlant (comme par exemple pour le principe du corps en chute libre), ou qu'un résultat largement accepté soit mathématiquement faux (comme par exemple la platitude des courbes de rotation des galaxies ne pouvant s'expliquer que par un halo massif). Eh bien dans une éventuelle unification ce même principe ou ce même théorème posera problème, et vouera l'unification à l'échec (apparent ou rédhibitoire).

En tant que mathématicien, c'est la piste que je veux explorer. Certes L. S. parle bien du manque de fondements de la mécanique quantique et de problèmes que cela pose, mais je reste sidéré devant son manque de recul par rapport à la relativité générale.

La mécanique quantique, pour le dire à grands traits ne repose sur aucun principe : c'est un ensemble de recettes (pour un lyonnais c'est un compliment) qui fonctionnent, permettant ainsi de prédire efficacement. Ce ne peut-être de ce côté là que l'on peut rechercher un principe de base mal mis en œuvre.

L'électromagnétisme avec sa réussite et la proposition d'Einstein de la relativité restreinte a les reins solides, très solides ; cependant, sans remettre en cause cette théorie, je signalerai deux petites fissures (l'une provenant du concept de pluralisme théorique établi par H. Poincaré, l'autre à propos de la notion de trajectoire).

Quand à la gravitation, il me semble que l'interprétation mathématique de certains principes pose beaucoup de questions.

Et si l'échec de la théorie des cordes, et autres tentatives d'unification ne provenait pas tout simplement de l'incompréhension d'un principe de base d'une théorie à unifier ? En particulier le problème de "l'indépendance de fond" me semble très mal posé.

2 Incise, par une piste positive

Jean Braconnier me disait un jour (vers 1978) "tu vois, Michel, il y a un grand mystère à comprendre : pourquoi l'ensemble des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré (le groupe des invariants de la relativité) paramètre les espaces des états des particules quantiques ?".

Il m'a toujours paru évident, depuis, que l'unification des forces passait par la compréhension de ce mystère, et donc par celle du groupe de Poincaré.

Rappel de faits évidents mais parfois mal reconnus

- Le groupe de Poincaré, groupe des invariants de la relativité restreinte est aussi le groupe infinitésimal des invariants de la relativité générale , via l'espace tangent ; ceci a beaucoup de conséquences (par exemple ce principe est à la base de la possibilité d'une physique de laboratoire et donc de tests ; il est aussi la traduction exacte du fait qu'une métrique est partout lorentzienne et donc interdit toute interprétation physique de la singularité dite de Schwarzschild).
- Le concept de spin dérive directement du groupe de Poincaré, ce qui signifie que c'est un concept relativiste aussi bien que quantique.
- Les inégalités d'Heisenberg (faussement appelées relations d'incertitudes) s'obtiennent aisément à partir de ce groupe de Poincaré ; c'est donc également un concept relativiste.

Ce ne sont que les concepts de charges qui échappent complètement à ce groupe de Poincaré. Pour Jean Braconnier, les groupes de symétries liés aux charges sont en produit direct avec le groupe de Poincaré.

Constatation : Il est dit, trop souvent à mon goût, que relativité générale et mécanique quantique sont contradictoires ! D'où vient cette sornette ? L'introduction, ci-dessus, sur le groupe de Poincaré montre que cela ne provient pas de celui-ci puisqu'il donne les inégalités d'Heisenberg sur lesquelles reposeraient, in fine, cette supposée contradiction.

Moralité : Il n'y a pas de contradiction, *a priori* entre relativité générale et mécanique quantique, mais il y a un mystère pour les mettre ensemble, mystère qui passe par une compréhension profonde de ce groupe des invariants relativistes. La difficulté vient de la nécessité de marier la carpe et le lapin, la gravitation reposant sur des principes, la mécanique quantique reposant sur d'excellentes recettes (tout se passe comme si ...).

3 Sur les principes de la gravitation

Nous avons deux grandes théories de la gravitation, celle de Newton et celle d'Einstein. Quels en sont les principes de base, quels en sont les points communs et donc leurs différences ?

Le premier principe est le fait que la masse gravitationnelle soit égale à la masse inertielle. Ce principe est commun aux deux théories.

Le deuxième principe est celui concernant les corps en chute libre. Il s'énonce différemment, suivant les théories et la littérature, mais on peut l'énoncer sous la forme d'un même principe pour les deux théories : "tout corps en chute libre suit une trajectoire qui minimise l'énergie".

Ainsi, sur les principes il n'y a pas de différence, mais dans la mise en acte il y en a une importante puisque l'une remet en cause l'espace-temps absolu de l'autre.

Ce recours à la théorie de Newton, à propos des principes, permet simplement de saisir que c'est essentiellement dans la traduction mathématique de ces principes que se situe les problèmes de fond et non pas au niveau physique.

Si pour le principe important de l'égalité de masses inertielle et gravitationnelle il n'y a pas de différence dans la mise en oeuvre, pour le second principe la différence est grande : dans la théorie newtonienne les trajectoires sont traduites comme les solutions des équations d'Euler-Lagrange sur un espace absolu et dans celle d'Einstein comme géodésiques d'une géométrie. Autrement dit en terme d'analyse par le calcul des variations ou en terme géométrique par le calcul des géodésiques. Quelle est la différence entre ces deux calculs ?

Eh, tu oublies le principe de covariance dans la théorie d'Einstein !

Là est la question. Comme par hasard n'avez-vous pas remarqué l'insistance de Lee Smolin sur le problème de l'indépendance de fond ?

Le problème de la covariance est situé faussement au niveau des principes. La covariance est dans les mathématiques. De fait, donner une formulation covariante des équations d'Euler-Lagrange, c'est parler en termes de géodésiques pour une géométrie ! La covariance n'est pas un problème de physique mais un problème de mathématique : toute théorie peut être formulée de manière covariante. En clair, pour le mathématicien, la formulation d'Einstein de la gravitation n'est-elle pas tout simplement une formulation covariante de la gravitation newtonienne ?

Ce problème de la covariance étant écarté, se repose la question de saisir une autre différence entre les mises en oeuvre des deux théories de Newton-Euler-Lagrange et d'Einstein. Il nous faut examiner la différence conceptuelle entre d'une part les équations d'Euler-Lagrange et celles des géodésiques.

Sur les horloges : on sait que Einstein s'est battu concrètement avec le problème de synchronisation d' horloges éloignées ; Newton disposait d'horloges dont la précision était ce que l'on sait. Aussi j'aimerais dire que le coup de génie d'Einstein est d'avoir saisi que le temps propre d'un mobile n'est pas forcément le temps absolu. Mais on doit dire en même que ce concept de temps propre se trouve bien (implicitement) dans les équations d'Euler-Lagrange, avec les notations $\dot{x}$, $\dot{r}$, etc.

Conséquence : il existe un troisième principe dans les théories de la gravitation, le principe affirmant que tout corps en chute libre a un temps propre ; c'est explicite chez Einstein, même si c'est présenté comme conséquence du principe dit de covariance, et c'est implicite chez Newton-Euler-Lagrange (par les notations mathématiques adoptées). Il est évident que ni Newton, ni Euler et ni Lagrange ne pouvaient soupçonner à l'époque l'existence d'un temps propre pour une pièce mobile ou un corps en chute libre (la fiabité des horloges ne le permettant pas). Cependant il est remarquable de signaler que le formalisme mathématique qu'ils ont adopté laisse toute sa place à ce concept de temps propre ! En particulier l'acceptation de ce principe de temps propre ne change pas la formulation mathématique des équations de la théorie de Newton.

La question qui se pose est donc de savoir si les deux théories de la gravitation (celle d'Eistein et celle de Newton-Euler-Lagrange) sont équivalentes. Equivalentes en quel sens ? mathématiquement oui, nous reviendrons sur cet aspect ; observationellement parlant, et bien oui, c'est une conséquence de l'équivalence mathématique ; conceptuellement, non, puisque l'une suppose un espace-temps courbe et l'autre plat !

Pour comprendre cet apparent paradoxe, il suffit de se poser la question suivante : quelle est la différence entre les géodésiques sur un espace courbe et les trajectoires (calculées via les équations d'Euler-Lagrange du Lagrangien associé à une métrique) d'un corps sur un espace absolu ? Evidemment aucune.

Première conclusion : les deux théories sont équivalentes

Si vous souhaitez comprendre de manière imagée la profondeur du calcul lagrangien, alors allez voir l'histoire de Lanturlu à propos de "Bourbakoff" ; certes je ne suis pas en accord avec lui sur quelques affirmations de certaines de ses BD ou autres productions, cependant celle-ci, comme beaucoup d'autres, est remarquable (sans doute l'auteur n'a pas saisi toute la profondeur et la pertinence de ses propos, mais ils sont là, et c'est très bien).

C'est une faiblesse dans l'argumentation de Lee Smolin qui, à aucun moment dans son livre, signale qu'il existe forcément une infinité de modélisations mathématiques équivalentes d'un même corpus de la physique ! Poincaré est-il, à ce point, mis aux oubliettes ou incompris ? Le sens profond du Vème axiome d'Euclide est-il, à ce point, mis aux oubliettes ou incompris ?

Deuxième conclusion : cet exemple à propos de la gravitation oblige à s'intéroger sur la distinction faite par Lee Smolin sur les théories "indépendantes de fond" et celles qui ne le sont pas. En effet la théorie d'Einstein de la gravitation est formellement "indépendante de fond" alors que celle de Newton-Euler-Lagrange est formellement "dépendante de fond" ; et pourtant elles mènent aux mêmes tests (elles sont falsifiables ou confortées en même temps). Autrement dit le problème de savoir si une théorie est "indépendante de fond" est lié au problème de savoir si une théorie est exprimée de manière covariante ou non. C'est un problème mathématique et non pas physique.

En bref : le problème de l'unification des forces (forte, faible, électromagnétique, gravitationnelle) rebondit puisque les concepts de trajectoire sur un espace absolu ou de géodésique sur un espace courbe sont équivalents.

4 Retour sur le principe du corps en chute libre

Nous venons de voir une différence essentielle dans la traduction mathématique du principe du corps en chute libre : il minimise l'énergie dans l'une, efface la gravitation dans l'autre ; et il y a équivalence mathématique entre ces deux traductions. Ces traductions mathématiques de ce principe (des corps en chute libre) sont-elles à interroger à un niveau plus profond ? Dans les deux théories, la traduction se fait via des équations aux dérivées partielles d'ordre deux : les équations d'Euler-Lagrange d'un côté, les équations des géodésiques de l'autre (dont tout le monde sait que ce sont des systèmes équivalents et dont presque tous ne se posent même pas la question de savoir si les deux théories sont équivalentes, tellement ils ont intériorisé que la théorie de Newton est fausse et ne peut éventuellement servir que comme première approximation de la théorie d'Einstein). Comment peut-on rechercher une unification des forces avec de tels préjugés ? En effet d'un point de vue épistémologique les deux théories s'éclairent l'une l'autre. Prenons une image, connaître le Mont Blanc en grimpant à partir de Chamonix-Newton est une excellente connaissance ; mais accéder au sommet à partir de Courmayeur-Einstein en est une autre ; et puis on peut partir des Houches ou d'ailleurs. Dans cette image la gravitation nous colle aux godasses ! Comment voir plus loin que le bout de son piolet (EDP bien sûr) ? Attention à ne pas dévisser, car cette expérimentation du corps en chute libre est en général fatale !

L'erreur commune aux deux théories dans la traduction mathématique du principe du corps en chute libre.

Dans les deux traductions mathématiques il est supposé (implicitement) que les trajectoires ou géodésiques sont deux fois différentiables. Sur quel principe physique repose cette double différentiabilité ?

On a vu précédemment que le groupe de Poincaré menait aux inégalités d'Heisenberg (sans doute que pour le groupe de Galilé on a des inégalités analogues puisque ces inégalités sont liées à une propriété de transformation de Fourier, mais je n'ai pas vérifié). Ceci signifie tout simplement que le fait d'être deux fois différentiables pour une géodésique est stupide au niveau mathématique. Un théorème récent (Abbot et Wise [5]) précise que les géodésiques ne peuvent être qu'au plus 1/2 fois différentiables. Si, ce concept de z-différentiabilité, pour z un nombre complexe, existe depuis longtemps et remonte aussi bien à Riemann et Liouville qu'à Weierstrass qui ont donné des expressions intégrales de cette z-différentiabilité ; c'est un outil très puissant bien que peu connu. Autrement dit les géodésiques doivent être fractales dans un langage plus récent. Pour comprendre la z-différentiabilité, considérons une bonne fonction f, puis pour un point x_o fixé, considérons l'application de N dans $\mathbb{R}n \to f^{(n)}(x_o)$; cette application admet un prolongement analytique.

Il nous faut donc donner une transcription mathématique acceptable du principe du corps en chute libre : "tout corps en chute libre suit une géodésique fractale de dimension de différentiabilité 1/2" (dans la formulation einsteinienne de la gravitation).

Cela traduit le fait que le corps en chute libre (une navette spatiale par exemple) transporte dans sa valise outre une horloge qui lui indique son temps propre mais la relativité restreinte et donc le groupe de Poincaré et les inégalités d'Heisenberg qui en découlent.

Avec une telle définition, plusieurs problèmes se posent, en particulier celui de savoir ce que veut dire, mathématiquement parlant, trouver les solutions d'une équation différentielle (ou d'une EDP) dans un espace de fonctions fractales. Différents travaux existent à ce sujet, voir par exemple Ben Adda et Cresson [6] et d'une part et avec moins de rigueur mathématique les travaux de l'astrophysicien Nottale [7].

Le deuxième problème est celui de l'interprétation physique de ces trajectoires. On peut remarquer à ce sujet qu'entre deux points fixés, il existe une infinité de géodésiques fractales (on n'a plus l'unicité), est-ce à dire que l'on obtient l'aspect ondulatoire d'une particule test ? Et lorsque cette particule test fait l'objet d'une mesure, elle aura suivi une seule des géodésiques possibles, est-ce l'aspect corpusculaire ? Par ailleurs est-ce que la géodésique deux fois différentiable usuelle est une "moyenne" de ces trajectoires fractales ? Dans ce cas, si la particule test est lourde (une planète dans le système solaire) on retrouvera les résultats standards de la relativité générale . Ici je laisse la place aux physiciens, mon but étant seulement de tordre le coup à l'idée fausse de croire que la mécanique quantique et la relativité générale sont irréconciliables. Il me semble qu'avec cette traduction du principe d'un corps en chute, la gravitation est quantique et qu'il n'y a pas lieu de la quantifier. En tout cas traduire le principe du corps en chute libre à l'aide de trajectoires deux fois différentiables entraîne une contradiction entre les axiomes de la relativité générale puisqu'on a les inégalités d'Heisenberg qui découlent de l'aspect lorentzien de la métrique (et du groupe de Poincaré, vu comme groupe d'invariants agissant de manière infinitésimale en tout point de la variété).

5 Conséquences sur l'espace-temps

Lee Smolin attache beaucoup d'importance à la distinction entre théories "dépendantes du fond" et celles "indépendantes du fond" ; de même pour lui il est évident qu'un espace-temps est un concept de la physique et non pas un objet mathématique (un espace de repérage) qui sert à indexer un domaine phénoménal (un ensemble d'évènements). Même si L.S. envisage, dans certains passages de son livre, d'une part qu'il puisse exister une erreur de fond et d'autre part qu'il serait souhaitable de se passer d'un espace-temps physique, il semble avoir profondément ancré en lui une réalité indépendante d'un bon espace-temps à trouver. Il est fortement excusable sur ce point puisque l'idéologie scientifique occidentale ambiante le pense, en oubliant depuis 1912 (mort de Poincaré) les apports de nos anciens, depuis Zénon et Aristote en passant par Avicenne et Thomas d'Aquin, puis Leibniz, Kant, Calinon et Poincaré, j'en oublie à coup sûr ; depuis un vide, comblé aujourd'hui par Gilles Gaston Granger. Inutile de demander à A. Razuelo d'essayer de comprendre les quelques phrases que je viens d'écrire, aveugle il est, con il restera tant qu'il sera imbu de lui-même et méprisant, connaît-il seulement le travail de G.G. Granger ? Il est emblématique des personnes qui desservent la science ; en effet il ne comprend pas l'utilité de la contreverse même en physique, il a LA VERITE, incarnation du DIEU SCIENCE, paix à son âme s'il en a une. A-t-il compris la portée épistémologique du Vème axiome d'Euclide, lui qui sait tout ?

Il vaut mieux passer aux choses sérieuses. Le fait que la théorie de Newton-Euler-Lagrange soit équivalente à la théorie de la relativité générale a des conséquences épistémologiques et oblige à s'interroger sur le concept d'"indépendance du fond" cher à L. Smolin. En effet si on accepte que le concept d'espace-temps appartient à la physique, un paradoxe (une contradiction) apparaît : s'il l'espace-temps est courbe relativité générale alors il est plat (Newton-Euler-Lagrange) et s'il est plat il est courbe ! Ce paradoxe disparaît si l'on suit G.G. Granger, Poincaré, Kant, ..., jusqu'à Zénon. Que sont les quatre paradoxes de Zénon ? Il disait si l'espace ou le temps est atomistique alors voila un paradoxe, si l'espace ou le temps sont divisibles à l'infini alors voila un autre paradoxe. Triste je suis quand je vois tant de scientifiques croire que Zénon n'avait pas compris que 1+1/2+...=2. Oui Zénon avait déjà compris que les concepts d'espace et de temps n'ont pas de réalité indépendante que ce sont des productions de l'esprit humain, concepts métaphysiques comme le dit Kant (dans son langage il dit transcendantaux) car ces deux concepts sont auto référents. L'avancée de Poincaré a été, non pas de le justifier dans le champ de la philosophie, mais dans le champ même de la science. Poincaré a compris la portée de la preuve qu'on ne pouvait pas démontrer que par un point extérieur à une droite il passait une parallèle et une seule. De là il a développé le pluralisme théorique, appelé souvent conventionnalisme (mot mal compris), qui dit simplement que si on peut modéliser une théorie sur un espace euclidien alors on peut le modéliser sur un espace courbe (et inversement). Alors que signifie les expressions "dépendantes du fond" et "indépendantes du fond". Il y a du travail de clarification à faire. De même, comme je l'ai déjà signalé, l'exigence de covariance est purement mathématique (ceci permet de comprendre pourquoi la relativité générale est une forme covariante de la théorie de Newton-Euler-Lagrange), de même une réflexion similaire et exigeante s'impose sur le concept d'indépendance du fond.

6 Un autre désaccord : CO implique COCO

Pour être plus explicite, dans des coordonnées COmobiles, le tenseur impulsion-énergie d'un modèle d'univers ne peut s'interpréter qu'en terme de CO-pression et de CO-densité.

6.1 Métriques d'un univers

Soit donc un modèle de Friedmann-Lemaître, avec la forme de métrique de Robertson-Walker, écrite dans les coordonnées comobiles (τ, x, θ, ϕ) :

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2\ (\tau)\ \ (dx^2 + f_k^2(x)\ d\omega^2), \tag{1}$$

où $f_k(x) = x,\ \ \sin(x),\ \ \sinh(x)$ suivant le signe $k = 0,\ 1$ or -1 de la courbure spatiale et où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2$.

Puis prenons la forme localement inertielle "ici et aujourd'hui" au temps τ_o en posant

$dx = \frac{d\rho}{R(\tau_o)}$:

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)} \left(d\rho^2 + R^2(\tau_o)\ f_k^2(\frac{\rho}{R(\tau_o)})\ d\omega^2 \right) \ . \tag{2}$$

Passons maintenant à la forme possédant un terme croisé, en posant $r = \frac{R(\tau)}{R(\tau_o)} f_k(\frac{\rho}{R(\tau_o)})$, elle s'écrit, [4] :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - r\ H(\tau)\ d\tau)^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ d\omega^2. \tag{3}$$

Cette forme de métrique est localement inertielle le long de la ligne d'univers du corps en chute libre à l'origine des coordonnées spatiales (en r=0, $ds = d\tau$) ; c'est l'un des intérêts de celle-ci car comme elle est localement inertielle tout au long de la ligne d'univers de l'origine, cette forme croisée permet donc, grâce à cette propriété, une interprétation immédiate du tenseur impulsion-énergie (cf. le paragraphe suivant).

La métrique de Minkowski sur l'espace tangent s'obtient en faisant $H(\tau) = 0$ dans (3), autrement dit on néglige localement l'expansion cosmologique. Cette métrique

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 -\ r^2\ d\omega^2. \tag{4}$$

admet le groupe de Poincaré comme groupe d'invariants.

La forme de métrique croisée possède une interprétation Newtonienne immédiate, il suffit d'écrire le Lagrangien correspondant à cette forme :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - H(\tau)\ r\ \dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{5}$$

qui s'écrit

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{1}{1+K}(\dot{r} - V(\tau, r)\dot{\tau})^2\ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{6}$$

où $V(\tau, r) = H(\tau)\ r$ est la vitesse d'éloignement cosmologique (loi de Hubble) et
où $K = H^2 r^2 - \Omega H^2 r^2$ est la constante du mouvement, i.e. une particule comobile de masse m a une constante de mouvement $\frac{1}{2} mK$ égale à la différence entre son énergie cinétique ($\frac{1}{2} m H^2 r^2$) et son énergie potentielle ($\frac{1}{2} m \Omega H^2 r^2$).

6.2 Sur le tenseur impulsion énergie

Les équations d'Einstein s'écrivent $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, où $T_{\mu\nu}$ désigne le tenseur impulsion-énergie et où κ est une constante. Comme le tenseur $T_{\mu\nu}$ s'interprète en termes de densité et de pression que dans un repère localement inertiel, considérons les points pour lesquels ce tenseur est écrit dans des coordonnées localement inertielles. Pour la forme de métrique (3) c'est la ligne d'univers $r = 0$ et pour la forme (2) c'est l'unique point $y = 0,\ \tau = \tau_o$ (si R n'est pas constant) ; pour éviter des confusions, dans cette forme (2) nous notons y la variable ρ. Il est donc évident que si l'on nomme $\rho_{comobile}(\tau, y)$ et $\rho_{croise}(\tau, r)$ les "densités" associées aux métriques dans lesquelles s'écrivent le tenseur impulsion-énergie, ces "densités" ont des propriétés différentes.

En effet le rapport des déterminants de ces tenseurs n'est égal à 1 qu'aux points où les métriques sont localement inertielles :

$$\frac{det(G_{\mu\nu}^{comobile}(\tau,y))}{det(G_{\mu\nu}^{croise}(\tau,r))} = \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)}(1+(1-\Omega)H^2r^2),$$

où $r = R(\tau)f_k(y/R(\tau_o))$.

Enonçons les propriétés et rapports évidents :

$\rho_{comobile}(\tau, y)$ ne dépend pas de y ;

$\rho_{croise}(\tau, r)$ dépend de r et $\rho_{croise}(\tau, 0)$ est la densité locale mesurable au temps τ ; nous noterons $\rho_{local}(X)$, cette densité locale au point X.

$\rho_{comobile}(\tau_o, y) = \rho_{croise}(\tau_o, 0) = \rho_{local}(\tau_o, 0)$.

Pour avancer, i.e. pour écrire des propriétés plus précises de $\rho_{comobile}(\tau)$ et de $\rho_{croise}(\tau, r)$, revenons à la définition théorique de ces objets. Soient donc $dV_{comobile}(\tau, y)$ et $dV_{croise}(\tau, r)$ les éléments de volume de la partie "espace" des métriques considérées, et soit $dV_{local}(X)$ l'élément de volume de la partie "espace" de la métrique de Minkowski sur l'espace tangent au point X considéré. Soit dM l'élément de matière-énergie dans le volume correspondant ; alors on a :

$$\rho_{comobile}(\tau) := \frac{dM}{dV_{comobile}(\tau,y)} = \frac{dM}{dV_{local}(\tau,y)}\frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau,y) = \rho_{local}(\tau,y)\frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau,y) \tag{7}$$

et de même

$$\rho_{croise}(\tau,r) := \frac{dM}{dV_{croise}(\tau,r)} = \frac{dM}{dV_{local}(\tau,r)}\frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau,r) = \rho_{local}(\tau,r)\frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau,r). \tag{8}$$

Par définition, en tout point X où la métrique est localement inertielle on aura :

$\rho_{comobile}(X) = \rho_{local}(X)$, respectivement $\rho_{croise}(X) = \rho_{local}(X)$.

Un calcul évident donne $\frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, 0) = (\frac{R(\tau)}{R(\tau_o)})^3$ et $\frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, 0) = 1$. Ainsi on a démontré le résultat suivant :

Théorème :

$$\rho_{comobile}(\tau,y) = \rho_{comobile}(\tau,0) = (\frac{R(\tau)}{R(\tau_o)})^3\rho_{croise}(\tau,0) = (\frac{R(\tau)}{R(\tau_o)})^3\rho_{local}(\tau,0), \tag{9}$$

et donc $\rho_{comobile}(X)$ désigne une COdensité et $\rho_{croise}(X)$ est la densité usuelle sur la ligne d'univers $X = (\tau, 0)$. En particulier si toute la "matière-énergie" est comobile, la "densité" $\rho_{comobile}$ est constante. Vladimir Fock note cette "densité" comobile ρ^*. On peut faire un raisonnement similaire concernant les "pressions", mais le plus simple est encore de déduire le même genre de résultats sur les pressions à partir des équations d'Einstein ; autrement dit la "pression" dans les coordonnées COmobiles a le sens d'une COpression.

En clair, comme conséquence il n'y a plus de mystère à propos de la constante cosmologique, plus d'énergie noire et, ouf, l'univers est plus agé que les objets qu'il contient.

Le plus important, est bien sûr de partir de la relativité générale bien traitée pour espérer aller vers une théorie unifiée des forces. Ici, exit l'énergie noire (du fait que CO entraîne COCO). Il reste le problème de la matière sombre, mais ceci est un autre problème à résoudre.

6.3 Note sur le Lagrangien associé à un problème à symétrie sphérique

Partons de ce Lagrangien (6) pour examiner le champ gravitationnel émis par le Soleil. Prenons donc une boule de masse M dans les coordonnées sphériques (τ, r, ω), et prenons comme vitesse de chute radiale la vitesse newtonienne $V = V(\tau, r) = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$. Le champ d'accélération est $\gamma(\tau) = \frac{dV}{d\tau} = -\frac{M}{r^2}$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{M}{r}$. La constante du mouvement vaut donc $K = V^2 - 2\Phi = 0$, i.e. K=0. On a donc

$$2L = \dot{\tau}^2 - (\dot{r} + \sqrt{\frac{2M}{r}}\ \dot{\tau})^2 -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{10}$$

et donc la métrique associée, dans le cadre einsteinien :

$$ds^2 = d\tau^2 - (dr + \sqrt{\frac{2M}{r}}\ d\tau)^2 -\ r^2\ d\omega^2. \tag{11}$$

Cette forme de métrique inhabituelle, c'est celle trop méconnue que Painlevé [8] et Gullstrand [9] ont trouvée indépendamment en 1921 ; elle est pourtant simple et on peut vérifier facilement qu'elle est solution des équations d'Einstein dans le vide.

Plus généralement, nous pouvons prendre pour V(r) une vitesse telle que sa dérivée nous donne la loi de Newton $\gamma(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = -\frac{M}{r^2}$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{M}{r}$. Par exemple $V = V(\tau, r) = \pm\sqrt{\frac{2M}{r} + K}$, alors la constante du mouvement vaut $v^2 - 2\Phi = K$ et le Lagrangien (6) est

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - \pm\sqrt{\frac{2M}{r} + K}\ \dot{\tau})^2}{1+K} -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{12}$$

et donc la métrique associée, dans le cadre einsteinien :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - \pm\sqrt{\frac{2M}{r} + K}\ d\tau)^2}{1+K} -\ r^2\ d\omega^2. \tag{13}$$

Cette métrique qui généralise celle de Painlevé et Gullstrand vérifie les équations d'Einstein dans le vide. En particulier pour $K = V_o^2 - 2\frac{M}{r_o}$, on a le mouvement radial d'une sonde spatiale ayant une vitesse radiale V_o en r_o dans son temps propre $ds = d\tau$.

Cette remarque étant là pour dire deux choses :

i) il n'est pas trop difficile de passer de Newton à Einstein (les deux théories s'éclairent l'une l'autre).

ii) Cette métrique de Painlevé pose un doute profond sur la mythique théorie des trous noirs (cf. annexe). Je souhaite que Lee Smolin ne garde pas une corde au coup en n'osant pas se détacher de ce non-sens, scientifiquement très dommageable, qu'est la "théorie des trous noirs".

7 conclusion

Ce Livre de Lee Smolin est pour moi l'occasion de faire le point. Ai-je répondu à l'interrogation de Jean Braconnier à propos du mystère du groupe de Poincaré qui associe relativité et mécanique quantique ? Pas complètement, mais une porte est ouverte, via le brownien ; si relativité générale et mécanique quantique sont compatibles il reste la question que soulève L. S., comment fonder la mécanique quantique sur des principes ? Il y a déjà le fondamental groupe de Poincaré, avec ses inégalités d'Heisenberg qui en dérivent ainsi que ses représentations, qui fournit une base principiel. On a vu également que le principe de covariance, purement mathématique, n'est pas au coeur des principes à chercher ; et de manière similaire le problème de l'indépendance du fond est mal posé ou annexe. On a vu aussi que si sur certains points la relativité générale est mal traitée (en un ou deux mots), comment peut-on réfléchir lucidement à une saine unification des forces. Il reste une question fondamentale dans l'interrogation de Lee Smolin ; toute unification ou toute nouvelle théorie doit-elle mener à des tests ? Oui, en principe, s'il existe deux théories unificatrices, mathématiquement inéquivalentes ; mais montrer qu'il existe déjà une théorie unificatrice des quatre forces sera un exploit ; et si au cas où on ait deux théories unificatrices, conceptuellement différentes, montrer qu'elles sont mathématiquement inéquivalentes (et donc susceptibles d'un test pouvant les différencier) serait une prouesse que je ne n'imagine même pas (peut-être parce que je suis matheux et non pas physicien).

Merci à Lee Smolin (et à Alain Connes) d'avoir ouvert leur gueule, c'est un souffle d'air pur (même si j'ai quelques points de désaccord).

" Je vous ai dit plus d'une fois que je suis un partisan acharné non pas des équations différentielles, mais bien du principe de relativité générale (i.e. du principe de covariance), dont la force heuristique nous est indispensable. Or en dépit de bien des recherches, je n'ai pas réussi à satisfaire le principe de relativité générale autrement que grâce à des équations différentielles ; peut-être quelqu'un découvrira-t-il une autre possibilité, s'il cherche avec assez de persévérance."

A. Einstein dans la conclusion de sa lettre à Pauli du 2 Mai 1948.

Références

[1] J.-M. Souriau *Géométrie et Thermodynamique en cosmologie*, in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).

[2] M. Lachièze-Rey 2001, *The Friedmann-Lemaître models in perspective*, A.& A. 364, 894-900 (astro-ph/0010163).

[3] M. Mizony 2003, *La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié*, ed ALEAS, Lyon, 2003

[4] M. Mizony et M. Lachièze-Rey, *Cosmological effects in the local static frame*, paru dans A.& A. (gr-qc/0412084).

[5] L.F. Abbott and M.B. Wise : *Dimension of a quantum mechanical path*, Am. J. Phys. Vol. 49 (1981).

[6] F. Ben Adda et J. Cresson : *Quantum derivates and Schrödinger's equation*, Letters in Math. Phys., (2002).

[7] L. Nottale : *Fractal space-time and microphysics*, World Scientific (1993).

[8] P. Painlevé, *La mécanique classique el la theorie de la relativité*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **173** 677-680 (1921).

[9] A. Gullstrand, *Allegemeine lösung des statischen einkörper-problems in der Einsteinshen gravitations theorie*, Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16(8)** 1–15 (1922).

8 Lettre à Marc (Août 2005), à propos d'un article de

L. Smolin : The case for background independence ; hep-th/0507235 25 juillet 2005.

Ce travail de Smolin ; c'est très bien et évidemment j'ai des petits désaccords avec lui. Ce document me semble une très bonne base pour échanger et travailler.

Ce que je te propose c'est, lors d'une prochaine rencontre du type Cargèse, que chacun fasse un exposé sur ce document soulignant son point de vue (accords, désaccords, ...). Cela ne pourra qu'être fructueux.

Rapidement une première réaction les "basic statements" (page 9 et 10) sont "évidents" à partir du travail de Gilles Gaston Granger (La vérification chez O. Jacob 1992). Je suis en plein accord avec Smolin sur ce point. En tout cas je vais lire Leibniz ; je pense qu'il va se rajouter à ma liste Kant, Poincaré, Granger. Je viens de lire des éléments de la "correspondance entre Leibniz et Clarke". Il faut effectivement mettre Leibniz dans cette liste. Préalablement il faut mettre Aristote avec sa célèbre affirmation "Le temps est le nombre du mouvement", affirmation reprise par Avicenne et Thomas d'Aquin.

On peut résumer cette ligne de pensée sous la forme : "le temps, l'espace n'existent pas en soi", même si ces penseurs ne sont pas d'accords sur tout philosophiquement parlant. Cette vieille tradition reprise par Kant qui connaissait la pensée de Leibniz exprimée un siècle plus tôt, sous la forme "Le temps, l'espace sont des productions de l'esprit humain", cette vielle tradition donc a été reprise à la fin du XIXème et au début du XXème par Calinon, Poincaré et Rougier. j'en oublie évidemment beaucoup en cours de route. Comment s'exprime-t-elle aujourd'hui ? Pour cela on peut partir de cette certitude de Smolin pour lequel il faut absolument se passer du "background dependence" pour espérer une unification de la physique. Pour lui il faut se passer de l'espace, du temps, d'un espace-temps quelconque pour construire la physique. On peut partir aussi du cri de Jean Schneider pour qui le temps n'a aucun sens, seules les horloges ont un sens physique (ces horloges avec leurs tic-tac donnent bien le nombre du mouvement).

On peut partir aussi de travaux de rares philosophes-scientifiques ou scientifiques-philosophes qui connaissaient bien la science ou la philosophie de leur époque : Aristote, Leibniz, Kant (qui était prof de maths), Poincaré et Granger aujourd'hui.

A ce propos je suis effaré de la non compréhension de dires de Kant ou de Poincaré dans des tas d'ouvrages ! Par exemple Kant exprime plus que clairement que le temps, l'espace sont des constructions de l'esprit humain. En prenant ce dire comme grille de lecture, Kant est facile à lire. Autre exemple Poincaré a développé le pluralisme théorique et beaucoup dissertent sur son conventionalisme non compris car ne prenant pas en compte ce pluralisme théorique qui est fondamental et qui en fait actualise Kant.

Avec tout cela on peut relire Smolin, voir à quel point il rejoint cette lignée de penseurs et voir aussi les limites de son travail.

Son approche de la relativité générale

Partons de la notation de Smolin sur les classes $\{M, g_{ab}, f\}$, notation très pratique car plus lisible que celle parfaitement équivalente du mathématicien (M,g). Prenons un exemple : considérons la forme de métrique de Schwarzschild usuelle, quel est sa classe $\{\text{Schwarzschild}\} = \{M_s, g_s\}$? de même prenons la forme de Painlelé, quel est sa classe $\{\text{Painlevé}\}=\{M_p, g_p\}$? A-t-on {Schwarzschild}={Painlevé} ? La difficulté est double :

d'abord existe-t-il une définition canonique (propre et non ambiguë) de $\{M_s, g_s\}$ et de $\{M_p, g_p\}$? Ensuite cette première difficulté étant surmontée, a-t-on toujours {Schwarzschild} = {Painlevé} ? Nous allons voir que ce n'est pas le cas.

Pour cela, comme les deux formes de métrique sont solutions des équations d'Einstein du vide à l'extérieur d'une boule de rayon r_o et de masse m, restreignons ces métriques à $\mathbb{R}^4$ privé de la boule fermée de rayon r_o (plus exactement de $\mathbb{R} \times B(0, r_o)$) et notons M_{r_o} cette variété. Alors on peut parfaitement parler des classes $\{Schwarzschild_{r_o}\} = \{M_{r_o}, g_s\}$ et $\{Painleve_{r_o}\} = \{M_{r_o}, g_p\}$.

Deux cas se présentent, suivant le signe de $r_o - 2\,m$. Si ce signe est positif alors $\{Schwarzschild_{r_o}\} = \{Painleve_{r_o}\}$, sinon ces classes sont différentes ! Il y a donc une imposture de parler du modèle de Schwarzschild et s'amuser à parler d'extension de la solution de Schwarzschild est s'amuser à changer de classe $\{M, g_{ab}, f\}$ et donc de problème à résoudre dans le cadre de la relativité générale ; au passage on pourra remarquer que si $r_o \leq 2\,m$, alors les classes sont des classes de variétés *non lorentziennes*, ce petit détail invalidant les théories dites de "trous noirs". Le respect des classes de difféomorphismes de variétés (lorentziennes) est fondamental. L'insistance de Smolin à parler en terme de classes est important.

Prenons un autre exemple : celui dit de la "métrique de De Sitter". Cette métrique abstraite, que nous allons définir comme la métrique invariante sur l'espace homogène $SO_o(1,4)/SO_o(1,3)$ par l'action du groupe de De Sitter $SO_o(1,4)$, définit-elle une classe de modèle d'univers isotrope, ou plusieurs infinités de classes différentes comme nous allons le voir ? Ce problème n'est pas anodin car il n'est jamais pris en compte lors de traitements des modèles dits inflationnaires (rien que cet aspect invalide cette approche telle qu'elle est traitée) et puis il devient important avec l'étude actuelle des modèles accélérés.

En effet, les modèles d'univers isotropes sont classifiés par la forme de Robertson-Walker de la métrique g du modèle {M,g}, ce qui provient de l'invariant qu'est le redshift cosmologique z du modèle. Or la métrique de De Sitter donne lieu à trois infinités distinctes de forme de Robertson-Walker, donc à trois infinités distinctes de classes de modèles.

Un premier acquis est le fait de ne plus parler d'espace-temps (du "background"), mais de classe d'équivalence de variétés. Bien.

Je noterai un détail, le concept de classe d'équivalence est mathématiquement pas clair : en effet quelle définition donne-t-il à $Diff(M)$? Il y en a des infinités possibles de définitions du concept de difféomorphismes, mathématiquement différentes. Difféomorphismes de classe C^2, de classe C^n de classe C^r ou r est un réel positif (si si cela à du sens) ? Difféomophisme de classe C^1 respectant une métrique de classe C^0-C^2par morceaux (ce qui est nécessaire et suffisant pour que les équations d'Einstein et les équations des géodésiques aient un sens, cf. chapitre 2 de mon livre) ? Il semble que pour lui ce soit des difféomorphismes de classe infini (smooth), ce qui n'a absolument aucune justification et j'oserai dire qui l'empêche d'aller vers quelquechose de plus profond déjà dit par Kant et évidemment par Poincaré et Granger.

Allons maintenant un peu plus loin que ne le fait Smolin pour souligner l'importance de ce qu'il nomme "the background independence" et que nous traduirons par "l'inanité de l'espace-temps". Nous venons de voir que ce qui compte, dans le cadre de la relativité générale, ce sont les classes de difféomorphismes de variétés lorentziennes (sachant que ce choix de classes est très loin d'être unique comme on vient de le souligner) ; il n'est donc plus question de temps, d'espace, d'espace-temps, même si pour la confrontation aux observations on fera un choix pratique et judicieux d'une réalisation de cette classe via une carte. Les différentes cartes possibles ne servant fondamentalement qu'à indexer les évènements dont on veut mesurer des caractéristiques. Evidemment à chaque évènement est attaché un invariant qui est son temps propre ds, mais ce temps propre ne peut avoir de sens physique que par une horloge (idéale) que transporterait cet évènement.

Comment aller plus loin, sinon en partant de ce mot évènement (event) et en se posant la question de savoir comment les classes peuvent prendre en compte ces évènements ? Il semble que pour Smolin il y a une identification entre d'une part l'ensemble $(\mathcal{E})$ des évènements physiques (ce que Granger nomme domaine phénoménal) et l'ensemble des éléments d'une classe. Il se rebelle par la suite, sans le dire explicitement, en parlant des tentatives d'unifications avec des espaces ordonnés finis.

En mécanique quantique se pose le même problème : est-ce que tout les états (vecteurs de normes 1 d'un espace de Hilbert) sont associés à des évènements ?

On a des choix à faire : On peut prendre, a priori comme dirait Kant, n'importe quel espace mathématique pour représenter l'ensemble des évènements $(\mathcal{E})$ d'un domaine de la physique. Mais il sera utile, pour respecter Leibniz, de prendre un ensemble mathématique tel qu'à deux évènements distincts on associe deux éléments différents de l'ensemble mathématique censé représenter le domaine phénoménal, comme dirait Granger. Autrement dit on choisit une injection et il y a une multitude d'injections possibles pour représenter un domaine phénoménal. De plus une bonne injection ayant été trouvée (par exemple dans $\mathbb{R}^4$, pour la théorie de Newton)), il sera plus commode, comme dirait Poincaré, de voir $\mathbb{R}^4$ sous la forme $\mathbb{R}^{1+3}$ pour tenir compte de l'additivité lorentzienne des vitesses. C'est une commodité de calculs et d'obtention de théorèmes mathématiques qui seront interprétés en termes de lois physiques, mais en aucun cas un changement de représentation du domaine phénoménal.

L'objet mathématique choisi pour représenter un domaine phénoménal n'est qu'un pur objet produit par l'esprit humain (Kant), il n'a aucune réalité physique, il sert d'ensemble d'indexation des évènements d'un domaine phénoménal (Granger). Il sert de langage pour communiquer entre scientifiques (puis vulgariser !) notre compréhension de phénomènes.

Smolin en a la forte intuition quand il dit :

R1 There is no background (cf. page 9).

Mais il n'en prend pas la mesure complète quand il affirme page 26 son hypothèse

Uniqueness : There exists exactly one consistent unified theory of all the interactions and particles.

En effet ce dire est stupide tant du point de vue mathématique (la logique nous enseigne qu'il n'y a JAMAIS unicité de modèles) que du point de vue épistémologique car c'est confondre domaine phénoménal et espace de représentation (on ne peut plus ignorer Kant, Poincaré et Granger).

En fait supprimer cette hypothèse d'unicité ne va pas affaiblir les dires de Smolin ; au contraire cette suppression va les renforcer. En effet si l'unification se fait via les "strings", alors on pourra la traduire via les "loops" ou via les "posets" ou via "la géométrie non commutative", etc. Il a oublié via "les fractals" (pourtant en 1905 Einstein a sorti un article sur le mouvement brownien !). Toutes les voies sont possibles. La difficulté mathématique sera de passer de l'une à l'autre des formulations, comme on sait maintenant le faire de la formulation de la gravitation d'Einstein à celle de Newton (via la traduction lagrangienne d'une métrique !). Chacune des traductions éclaire les autres, c'est une grande richesse.

L. Smolin : The case for background independence ; hep-th/0507235 25 juillet 2005.