Questions au temps, à l'espace-temps
Du pendule de Foucault à l'oscillateur harmonique

Michel Mizony, IGD

Cargèse, Mars 2003

Institut Girard Desargues (UMR 5028 CNRS), Université Lyon 1
43, bd. du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex
e-mail : mizony@univ-lyon1.fr

" ... espace et temps sont les cadres a priori
de toute description de notre expérience." E. KANT

1 Préambule

Comment mieux posés certains problèmes liés au rôle de la variable temporelle et à l'espace-temps dans le cadre de la gravitation et de la mécanique classique ?

Nous allons en examiner rapidement trois.
- La signification de l'expérience du gyroscope de Foucault.
- La forme locale de la métrique d'un univers de Friedman-Lemaître.
- Les formulations Lagrangienne et métrique de l'oscillateur harmonique.

" l'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky.
Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps
entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter,
sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les
rapports mutuels des diverses parties de l'espace." R. POINCARE

2 Le gyroscope de Foucault

Problème : Quelle est la signification de l'expérience du pendule de Foucault ?

En 1851, Léon Foucault met au point l'expérience du pendule, expérience qui met en évidence le fait que la terre tourne. Cependant l'ampleur du pivotement du plan d'oscillation du pendule dépend de la latitude du lieu de l'expérience. Ce qui est moins connu est le fait que L. Foucault met au point un nouvel instrument l'année suivante pour s'affranchir de l'effet de latitude : le gyroscope est né. Et il est beaucoup utilisé (l'expérience Probe aujourd'hui). Voici comment l'astrophysicien Trinh Xuan Thuan présente admirablement cette expérience (cf. page 101) :

"Le physicien Français Léon Foucault voulait démontrer que la Terre tournait sur elle-même. En 1851, dans une expérience restée célèbre et qui est maintenant reproduite dans de nombreux musées des sciences du monde, il attacha un pendule à la voûte du panthéon, à Paris. Une fois lancé, le pendule a un comportement remarquable : son plan d'oscillation pivote au fil des heures. Si on le lance dans la direction nord-sud, au bout de quelques heures il oscillera dans la direction est-ouest, et si nous étions aux pôles, le pendule ferait un tour complet en exactement 24 heures. A Paris, à cause d'un effet de latitude, le pendule n'accomplit qu'une fraction de tour en une journée.

Pourquoi le plan du pendule pivote-t-il ? Foucault répondit que ce mouvement n'était qu'apparent : le plan d'oscillation du pendule reste fixe et c'est la Terre qui tourne. Ayant mis en évidence *la rotation de la Terre, il s'en contenta. Mais la réponse de Foucault était incomplète, car un mouvement ne peut être décrit que par rapport à un repère fixe : le mouvement absolu n'existe pas. Galilée avait déjà compris que : "Le mouvement est comme rien." Le mouvement n'existe pas en soi, mais relativement à autre chose. La Terre doit "tourner" par rapport à quelque chose qui ne tourne pas. Mais comment trouver ce quelque chose ? Afin de tester l'immobilité d'un point de repère, un astre par exemple, il suffit de lancer le pendule dans sa direction. Si l'astre est immobile, il restera dans le plan d'oscillation du pendule, dont on sait qu'il est fixe. Si l'astre bouge, il dérivera lentement en dehors du plan.*

Essayons des objets astronomiques connus, des plus proches aux plus lointains. Si nous orientons le plan de notre pendule vers le Soleil, ce dernier sort perceptiblement du plan d'oscillation après quelques semaines. Les étoiles les plus proches, situées à quelques années-lumière, font de même après quelques années. La galaxie Andromède, située à deux millions d'années-lumière, dérive moins, mais finit par sortir du plan. Le temps passé dans le plan s'allonge et la dérive tend graduellement vers zéro au fur et à mesure que les objets testés sont plus éloignés. Seuls les amas de galaxies les plus lointains, situés à des milliards d'années-lumière, aux confins de l'univers connu, ne dérivent pas par rapport au plan d'oscillation initial du pendule.

- Pourquoi y aurait-il un plan privilégié ?

- Il n'y a pas de plan privilégié. Toutes les directions sont équivalentes. Quelle que soit la direction dans laquelle on a lancé le pendule au début, son plan d'oscillation reste fixe, mais pas par rapport aux objets célestes proches, mais par rapport aux amas de galaxies les plus lointains que l'on puisse détecter dans cette direction. La conclusion à tirer de ces expériences est extraordinaire : le pendule de Foucault ajuste son comportement non pas en fonction de son environnement local, mais en fonction des galaxies les plus éloignées, c'est-à-dire de l'univers tout entier, puisque la quasi-totalité de la masse visible de l'univers se trouve non pas dans les étoiles proches, mais dans ces galaxies lointaines. En d'autres termes, ce qui se trame chez nous se décide dans l'immensité cosmique : ce qui se passe sur notre minuscule planète dépend de la totalité des structures de l'univers.

Pourquoi le pendule de Foucault se comporte-t-il ainsi ? On ne connaît pas la réponse pour l'instant. Le philosophe et physicien autrichien Ernst Mach y voyait une sorte d'omniprésence de la matière et de son influence. Selon lui, la masse d'un objet - la quantité qui mesure son inertie, c'est-à-dire sa résistance au mouvement - est le résultat de l'influence de l'univers tout entier sur cet objet. C'est ce qu'on appelle le principe de Mach. Lorsqu'on peine à pousser une voiture, la résistance qu'elle exerce au mouvement émane de la totalité de l'univers. Mach n'a jamais formulé en détail cette influence universelle mystérieuse, qui est distincte de la gravité, et personne n'a su le faire depuis. ..."

Remarques :

1- Si comme le dit Trinh Xuan Thuan l'expérience de Foucault met en évidence l'aspect qualitatif du principe de Mach, on connaît, depuis V. Fock au moins, l'interprétation dans le cadre de la relativité générale. Cette expérience montre que pour la compréhension d'un phénomène local, il faut se situer dans un modèle global, ici un modèle d'univers isotrope. Il est intéressant de noter que cette expérience est un test sur terre (en laboratoire) d'un aspect de la relativité générale, en l'occurrence celui de travailler avec deux métriques dont celle du modèle global choisi.

2- Il y a deux concepts qui posent problème ce sont la covariance et l'invariance ; il ne faut pas les confondre. Dans cette expérience, les conditions aux limites à l'infini sont covariantes par rapport à la métrique associée au modèle d'univers et invariantes par rapport à celle décrivant le système.

3- Autrement dit, il existe une famille privilégiée de repères, c'est celle des repères comobiles du modèle d'univers choisi.

4- Vous êtes-vous déjà interrogé sur la formulation des noms des tests de la relativité générale ? Ils ont pour noms : DEVIATION des rayons lumineux, AVANCE du périhélie de Mercure, RETARD de l'écho radar. Et dans l'expérience de Foucault on regarde la déviation du plan du pendule (traduisant la rotation de la Terre), mais plus profondément la FIXITE de ce plan par rapport à la métrique d'univers. Ces formulations soulignent à l'évidence la nécessité de travailler avec deux métriques (celle de l'univers choisi et celle du système étudié). Et ce que l'on mesure (déviation, retard, avance, fixité) est un ECART que l'on attribue souvent à la différence de prédiction entre la théorie de Newton et celle d'Einstein (ce qui est vrai pour l'avance d'un périhélie) ; mais pour les autres (retard, déviation, fixité) ? Cet ECART est en fait la différence entre les prédictions associées à ces deux métriques.

5- Pour achever la compréhension complète de l'expérience du pendule de Foucault, il reste, à ma connaissance, à formaliser l'aspect quantitatif du principe de Mach dans le cadre de la relativité générale, compréhension qui passe par celle de ce qu'est la masse inertielle.

Que dit Vladimir Fock (cf. page 394) sur ce qu'il nomme le paradoxe de Mach ?

But the paradox vanishes as soon as one accepts the legitimacy of the notion of "acceleration relative to space".

The essence of the error committed in the initial assumption consits in forgetting that the nature of the equivalence of fields of acceleration and of gravitation is strictly local.

Les pendule et gyroscope de Foucault nous disent qu'il y a une famille de repères privilégiés ; ce sont ceux qui laissent fixe la partie espace, donc les repères comobiles dans lesquels la métrique s'écrit :

$$ds^2 = h^2(t)dt^2 - g^2(t)(dx^2 + f_\epsilon^2(x)d\omega^2), \tag{1}$$

où $f_\epsilon(x) = x, \sin(x),\ sh(x)$ selon le signe $\epsilon = 0,\ 1$ ou -1 de la courbure spatiale, et où $d\omega$ désigne l'élément d'angle sphérique.

Il est à noter qu'il y a une différence entre la variable temporelle et celles d'espace. Le gyroscope et le principe de Mach nous disent quelque chose sur l'espace, son isotropie, mais rien sur le temps. Une version quantitative du principe qualitatif de Mach pourra-t-elle nous éclairer sur le temps ?

Qu'est-ce que résoudre un problème en relativité générale ?

Soit V une variété représentant un modèle d'univers. On se propose d'étudier le champ créé par une répartition S finie de masses. Cette étude peut se faire de deux manières différentes :

a) Soit on étudie le champ créé par S, et ceci de la manière la plus intrinsèque possible (certaines difficultés proviennent de la nature de la variété choisie).

b) Soit on étudie deux champs sur V, en l'absence du système de masse S, puis en présence de ce système. On a alors à comparer deux métriques, celle obtenue en l'absence de S que l'on notera $\gamma_{\mu\nu}$, et celle obtenue en sa présence que l'on notera $g_{\mu\nu}$.
Dans les deux cas on résout un problème de relativité générale. Mais ce n'est pas exactement le même. La première approche, plus théorique, permet de trouver une solution, et dans cette approche le problème de la complétude de la relativité générale ne se pose pas et la notion de boule statique par exemple n'a aucun sens, puisque tous les observateurs sont équivalents. La deuxième approche est plus pragmatique, et elle est incontournable si l'on veut confronter une solution aux observations (et par exemple comprendre l'expérience du gyroscope de Foucault). Comment parler d'une métrique asymptotiquement plate ? Comment parler de la déviation d'un rayon lumineux en ne considérant qu'une seule métrique ? Une trajectoire lumineuse ne peut être considérée comme déviée que par rapport à la trajectoire obtenue en l'absence du corps provoquant la "déviation", laquelle est calculée au moyen d'une autre métrique. Et dans cette perspective, la relativité générale est incomplète : il faut une jauge, comme pour l'électromagnétisme. D'autre part on n'échappe pas au problème de la définition de la notion de boule statique, puisque par exemple on ne peut pas parler d'effondrement d'une boule de matière sans une telle définition. Les deux approches sont complémentaires et nécessaires. Dans la littérature, certains auteurs, par exemple V. Fock, choisissent explicitement la deuxième approche puisqu'il se donnent au départ un modèle d'univers (c'est-à-dire une variété V munie d'une métrique $\gamma_{\mu\nu}$), chez d'autres les choix sont moins explicites.

En bref, le gyroscope de Foucault met en évidence la nécessité de recourir à deux metriques dans le cadre de la relativité générale, pour la confrontation aux observations ; elle réconcilie le principe (qualitatif) de Mach et la RG.

Comment aller plus loin ? Autrement dit peut-on, dans le cadre de la relativité générale donner un contenu quantitatif au principe qualitatif de Mach ? Et si oui, quel type d'observations faire pour le mesurer ? On peut penser à des effets liés à la pertubation du champ de l'univers par une surdensité locale (une galaxie, un amas). Faut-il encore pour cela écrire sous une forme adéquate la métrique d'un modèle d'univers.

"Consécutivement, et même synchroniquement, on constate de nombreux cas où l'explication scientifique admet plusieurs modèles pour un même domaine phénoménal. Cette pluralité est-elle le signe que nous n'atteignons jamais que des apparences ? ".
"La vérification scientifique, outre son sens trivial d'élimination des illusions et des erreurs immédiatement décelables, consiste donc en une mise à l'épreuve, le plus souvent très médiate, d'un parti pris de représentation de l'expérience."
G.-G. GRANGER

3 La forme locale d'une métrique d'univers

Problème : Quel est le champ gravitationnel émis par un objet (sphérique pour simplifier) dans un univers isotrope en expansion ?

Pour bâtir dans le cadre de la relativité générale un modèle gravitationnel local rendant compte du mouvement des corps célestes dans une petite partie de l'univers il faut se donner *a priori* un modèle cosmologique décrivant l'univers et qui fournira des conditions à l'infini assurant que le problème a une solution unique. Nous nous limiterons au cas où le modèle d'univers est homogène et isotrope, ce qui est le choix usuel. Le calcul est ensuite mené en supposant que le mouvement du système local étudié n'a pas d'influence sur l'univers. Sans cette hypothèse, légitimée par le fait que l'hypothèse d'homogénéité peut être considérée comme résultant d'une intégration des systèmes locaux, on ne sait pas résoudre le problème.

On utilise en fait deux métriques : celle du modèle cosmologique, donnée *a priori*, et celle, inconnue, rendant compte du système gravitationnel étudié.

- La première métrique est solution d'un système d'équations obtenu par simplification des équations d'Einstein grâce aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.
- La deuxième métrique sera solution d'un autre système d'équations obtenu par simplification des équations d'Einstein provenant cette fois-ci d'hypothèses de symétrie propres au système gravitationnel que l'on étudie. Ce deuxième système est plus complexe que le premier.

La première métrique permet la description de ce que seraient les trajectoires des rayons lumineux en l'absence du système local étudié, cette référence est indispensable pour pouvoir confronter les résultats du calcul aux observations.

Ceci étant dit, étant donné un système gravitationnel, il se pose le problème d'écrire localement la métrique du modèle d'univers choisi a priori.
Le travail qui suit, fait en collaboration avec Marc Lachièze-Rey, a commencé ici même à Cargèse, lors du colloque de Mars 2002.

3.1 Formes locales d'une métrique d'univers

Le but de la cosmologie est d'établir des propriétés de l'univers, et en particulier de "l'espace-temps", la variété $\mathcal{U}$, en utilisant aussi bien des résultats théoriques qu'observationnels. Cependant nous avons accès à une région limitée de l'espace.

En géométrie plane, l'étude locale d'une courbe consiste, au premier ordre, à trouver sa tangente, et au deuxième ordre, son cercle osculateur ; et ceci passe par un choix judicieux d'un système de coordonnées. C'est la même chose pour la géométrie de $\mathcal{U}$, au premier ordre on a l'espace tangent de Minkowski, qui ne permet pas cependant de prendre en compte les effets gravitationnels dus à l'expansion. Au second ordre la question est de construire cette meilleure approximation, l'analogue du cercle osculateur, et de savoir si elle permet de rendre compte d'effets post-newtoniens et de l'expansion cosmique (la loi linéaire de Hubble par exemple) au niveau de l'univers local. Ce dernier point est important si l'on s'intéresse à la dynamique locale, par exemple des amas et super-amas de galaxies.

Soit $(\mathcal{U}, g)$ un modèle d'univers isotrope (i.e. un modèle de Friedmann-Lemaître). En général la géométrie est exprimée par la forme de Robertson-Walker de la métrique :

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)(dx^2 + f_\epsilon^2(x)d\omega^2), \tag{2}$$

où $f_\epsilon(x) = x, \sin(x),\ sh(x)$ selon le signe $\epsilon = 0,\ 1$ ou -1 de la courbure spatiale, et où $d\omega$ désigne l'élément d'angle sphérique.

Si cette forme de métrique est pratique pour une étude globale, elle ne l'est pas pour l'étude de l'univers local ; et le choix d'autres systèmes de coordonnées donnera d'autres formes de la métrique.

Par exemple, écrivons cette métrique (écrite dans des coordonnées comobiles) de manière localement inertielle pour l'évènement ici et aujourd'hui $E = \{\tau = \tau_o,\ x = 0,\ \theta = 0, \phi = 0\}$, en posant $x = R(\tau_o)\rho$:

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)/R^2(\tau_o)(d\rho^2 + R^2(\tau_o)f_\epsilon^2(\rho/R(\tau_o))d\omega^2)\ . \tag{3}$$

Cette forme, localement inertielle, est très peu différente de la forme de Robertson-Walker, mais elle met en évidence que l'espace tangent à l'évènement E (ici et aujourd'hui) est exactement l'espace de Minkowski et révèle aussi que la coordonnée x est une coordonnée *angulaire*.

Pour l'obtention d'une forme locale partons du cas particulier d(un modèle de de Sitter (avec $\epsilon = -1$). La forme de Robertson-Walker est

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{\sinh^2 \lambda\tau}{\lambda^2}(d\alpha^2 + \sinh^2\alpha\ d\omega^2)\ . \tag{4}$$

Le facteur d'échelle est $\sinh(\lambda\tau)/\lambda$, le paramètre de Hubble $H(\tau) = \lambda\ \coth(\lambda\tau)$ et la paramétre de densité $\Omega = \lambda^2/H^2$; ce paramètre Ω est ici plus petit que 1 car $\epsilon = -1$.

En faisant le changement de variables

$$r = \frac{\sinh\lambda\tau}{\lambda}\sinh\alpha, \quad \lambda t = \mathrm{argtanh}[\cosh(\alpha)\ \ \tanh(\lambda\tau)], \tag{5}$$

nous obtenons la forme de Birkhoff (locale et statique) de la métrique de cet univers :

$$ds^2 = (1 - r^2\lambda^2)\ dt^2\ \ - \frac{1}{1 - r^2\lambda^2}\ dr^2\ \ -\ r^2\ d\omega^2\ . \tag{6}$$

Plutôt que de donner une preuve (technique et instructive) je vous propose une vérification (preuve ?) par un système de calcul formel.

Un programme Maple pour la vérification

$> restart : with(tensor) :$

c'est l'appel de la librairie de calcul tensoriel

$> coords := [tau, alpha, theta, phi] :$

on donne un nom aux variables d'espace-temps de De Sitter

$> gu := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4) :$

$> gu[1,1] := 1 : gu[2,2] := -sinh(lambda * tau)^2/lambda^2 :$

$> gu[3,3] := sinh(alpha)^2 * gu[2,2] : gu[4,4] := gu[3,3] * sin(theta)^2 :$

$> g := create([-1,-1], eval(gu)); gg := get_compts(g);$

$> gg[2,2];$

$> tensorsGR(coords, g, contra_g, det_g, C1, C2, Rm, Rc, R, G, CC) :$

après avoir créer la métrique g, "tensorsGR" calcule la connexion (C2) et les tenseurs de courbure

$> displayGR(Einstein, G);$
simplifions ce tenseur d'Einstein G $(R_{\mu\nu} - 1/2Rg_{\mu\nu})$
$> TE := simplify(Einstein(g, Rc, R), trig);$
$> te := get_compts(TE); gg := get_compts(g);$
$> te[2,2] + 3 * lambda^2 * gg[2,2];$
$> seq(simplify(te[i,i] + 3 * lambda^2 * gg[i,i]), i = 1..4);$
le tenseur d'Einstein$=-3 * lambda^2 * tenseurmetrique$

Changement de variables dans une métrique
$> with(difforms):$
c'est l'appel à la libraitie des formes différentielles
$> metdS := sum(gg[i,i] * d(coords[i])^2, i = 1..4);$
$> metB := (1-lambda^2*r^2)*d(t)^2 - 1/(1-lambda^2*r^2)*d(r)^2 - r^2*(d(theta)^2 + sin(theta)^2 * d(phi)^2);$
$> r := sinh(lambda * tau)/lambda * sinh(alpha);$
$> t := arctanh(cosh(alpha) * tanh(lambda * tau))/lambda;$
nous avons introduit la métrique de De Sitter et sa forme "statique" locale ; puis le changement de variables ; passons à la vérification
$> defform(lambda = const, tau = 0, alpha = 0);$
$> expand(d(r) * d(r));$
$> metB;$
$> essai := map(normal, map(factor, collect(map(simplify, collect(metB, d(tau))), d(alpha))));$
$> essai2 := map(normal, convert(essai, exp));$
$> essai3 := map(simplify, convert(essai2, trig));$
OUF
$> simplify(metdS - essai3);$
la vérification est finie

Passons maintenant à la situation générale de la forme de Robertson-Walker d'un modèle de Friedmann-Lemaître. Nous allons suivre la même démarche et nous appellerons forme de Birkhoff généralisée, la forme obtenue. Partons de la forme localement inertielle (3) pour l'évènement E (hic et nunc) :

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)/R^2(\tau_o)(d\rho^2 + R^2(\tau_o)f_\epsilon^2(\rho/R(\tau_o))d\omega^2) ,$$

posons $r = R(\tau)f_\epsilon(\rho/R(\tau_o))$ et $\tau = h(t,r)$. Avec les notations usuelles : $H(\tau) = \dot{R}(\tau)/R(\tau)$, $\lambda^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{\dot{h}^2(t,r)}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}}(1-\lambda^2\ r^2)dt^2 \ - \frac{1}{1-\lambda^2\ r^2}\ dr^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ , \tag{7}$$

avec la condition suivante sur h, provenant de l'élimination du terme croisé :
$h'(t,r) = -\frac{rH(h(t,r))}{1-\lambda^2(h(t,r)r^2}$, $\quad h(t,0) = t$.
Nous pouvons appeler cette forme (7) la forme de Birkhoff généralisée associée à un modèle d'univers isotrope. Il faudrait évidemment écrire le changement de variable $\tau = h(t,r)$ et donc pour cela résoudre l'équation différentielle $h'(t,r) = -\frac{rH(h(t,r))}{1-\lambda^2(h(t,r)r^2}$, ce qui ne peut guère se faire sans la connaissance de $R(\tau)$.

Cependant on peut trouver une solution approchée de cette équation :

$$h(t,r) = t - \frac{1}{2}H(t)r^2 - \frac{1}{8}H(t)(2\lambda^2(t) - \dot{H}(t))r^4 + ...;$$

ainsi, $\frac{\dot{h}^2(t,r)}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}} = 1 + (1 - \frac{q(t)}{\Omega(t)})\lambda^2\ r^2 + O(r^4)$ et :

$$ds^2 \approx (1 - \frac{-q}{\Omega}\lambda^2\ r^2)dt^2 \ - \frac{1}{1-\lambda^2\ r^2}\ dr^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ . \tag{8}$$

Ces formes (7) et (8) exigent un certain nombre de remarques :

- Elles ne sont pas statiques ; en effet $\lambda = \lambda(t)$, dépend du temps (sauf pour les modèles de De Sitter).

- Dans la mesure où elles sont locales, on peut trouver une version approchée statique de cette forme : en effet autour de l'évènement E, on peut considérer que λ est constant ainsi que H, Ω et q.

- La variable r possède un sens localement (de rayon de courbure) et donc, dans une première approximation, de distance pour les champs faibles.

On peut penser avoir atteint notre but en disant que la forme (8) est bien la “forme osculatrice” en l'évènement ici et aujourd'hui de notre métrique d'univers.
Mais l'étude des géodésiques radiales (dans les coordonnées (t, r)), nous donne la vitesse d'éloignement $\sqrt{\frac{-q}{\Omega}}\lambda r$ autour de l'évènement E et non pas la loi linéaire de Hubble Hr. Il nous reste donc un petit pas à faire pour retrouver la loi de Hubble. Faisons un changement de variable $x = x(r)$ tel que nous retrouvions une vitesse de $H\,x$.

Pour le modèle de De Sitter, il suffit de poser $x = \sqrt{\Omega}r$, et la forme de Birkhoff (6) devient ce que j'appellerai la forme post-newtonienne locale de la métrique d'univers :

$$\mathbf{ds^2 = (1 - H^2x^2)dt^2 \; - \frac{1}{1 - H^2x^2}\frac{dx^2}{\Omega} \; - \; \frac{x^2}{\Omega}\, d}\omega^2 \; . \tag{9}$$

Plus généralement, pour un modèle d'univers donné, au moment τ_o de l'évènement E notons $H = H_o$ la valeur du paramètre de Hubble, $\Omega = \Omega_o$ celle du paramètre de densité, etc., alors l'approximation post-newtonienne locale de la métrique d'univers s'obtient en posant $x = \sqrt{-q_o\Omega_o}\; r$, ce qui n'est possible que pour les modèles accélérés. Nous obtenons ainsi **la “forme osculatrice” en l'évènement ici et aujourd'hui de notre métrique d'univers** qui s'écrit en notant $Q = \frac{-q}{\Omega}$:

$$\mathbf{ds^2 = (1 - H_o^2x^2)\; dt^2 \; - \frac{1}{1 - Q_o^{-1}H_o^2x^2}\frac{dx^2}{Q_o\Omega_o} \; - \; \frac{x^2}{Q_o\Omega_o}\, d}\omega^2 \; . \tag{10}$$

Dans cette forme osculatrice, il est à noter que les valeurs aujourd'hui des trois paramètres fondamentaux d'un modèle d'univers H, Ω et q figurent explicitement. Dans les variables (t, x) le champ d'accélération est donné par

$$Q_o\lambda^2 = Q_o\frac{8\pi G\rho(\tau_o)}{3} = -q_oH_o^2,$$

et celui des vitesses radiales par H. Ces métriques (9) et (10) sont donc particulièrement bien adaptées pour l'étude de l'univers proche.

3.2 Champ émis par une surdensité dans un univers en expansion

Considérons maintenant une surdensité locale de notre proche univers (une galaxie, un amas, un super-amas), de masse M et sphérique en première approximation, dans un univers en expansion accéléré. La résolution des équations d'Einstein nous donne, dans les coordonnées (t, x) de la métrique d'univers (10) :

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{x} - H_o^2x^2)\; dt^2 \; - \frac{1}{1 - \frac{2M}{x} - Q_o^{-1}H_o^2x^2}\frac{dx^2}{Q_o\Omega_o} \; - \; \frac{x^2}{Q_o\Omega_o}\, d\omega^2 \; . \tag{11}$$

C'est une solution approchée au deuxième ordre (exacte pour les univers de de Sitter).

Cette métrique (11) permet de définir le concept de *rayon d'attraction* d'une surdensité M dans un univers non vide en expansion (cf. Souriau) : ce rayon peut se définir comme la distance pour laquelle le champ d'attraction de la surdensité est égal et opposé à celui lié à l'expansion cosmique. Cette métrique nous semble plus appropriée que celle de Tolman-Bondi, car par exemple elle explique aisément les effets d'accéleration ou de déccélération des galaxies proches d'un amas.

Pour en revenir à notre gyroscope de Foucault, c'est avec cette métrique que l'on peut espérer tester des effets perturbatifs et ceci dans le cadre strict de la relativité générale, et donc avancer vers une définition quantitative du principe de Mach.

" Dans la relativité générale, à chaque fois qu'on fait un pas il faut s'arrêter pour nettoyer ses chaussures." J.M. SOURIAU

4 Formulations lagrangienne et métrique de l'oscillateur harmonique

Plaçons-nous dans le contexte d'un des systèmes mécaniques les plus simples : celui du système masse-ressort idéal, à petites oscillations, soumis à une force extérieure F(t). L'équation du mouvement de la masse m est traditionnellement écrit sous la forme

$$m\ddot{x} + Kx - F(t) = 0, \tag{12}$$

où K est une constante associée au ressort. Expérimentalement les mécaniciens se sont vite aperçus qu'il existait un terme complémentaire en $\dot{x}$, appelé force de " frottement " plus précisément force de dissipation, du fait qu'il est proportionnel à la vitesse. On a donc l'équation

$$m\ddot{x} + 2\alpha\sqrt{Km}\dot{x} + Kx - F(t) = 0 \ , \tag{13}$$

où α, le coefficient dit de dissipation (ou de viscosité) est bien mesuré.
Il est donc présupposé un espace-temps symbolisé par le couple (x, t). Dans toute la suite, x désignera le déplacement observé par un observateur fixe du laboratoire où l'oscillateur se meut et t le temps qui s'écoule à la montre de cet observateur rivé au laboratoire.
Se donner l'équation simple du pendule (de l'oscillateur harmonique) (12), c'est se donner un certain nombre d'objets : une masse m et donc deux écritures de l'énergie associée $E = mc^2 = h\nu$, où h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière et ν la fréquence relativiste ; une rigidité K et la fréquence de résonnance $\Omega = \sqrt{K/m}$ associée à la solution générale de l'équation homogène associée à (12) ; une force extérieure $F(t)$ agissant sur la masse m.

4.1 Traitement Lagrangien de l'oscillateur harmonique

Cette équation différentielle (12) est établie dans le cadre de la mécanique newtonienne et provient de **l'équation d'Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} \tag{14}$$

associée au Lagrangien classique

$$Lc = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x) \tag{15}$$

où $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ désigne l'énergie cinétique de la masse m et $\Phi = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$ le potentiel attaché à la rigidité (ou force de rappel) K et à la force extérieure F.

Intermède : écriture d'une procédure qui à un Lagrangien L associe l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement, suivi d'un test pour le Lagrangien (15).

```
> eqEulerLagrange := proc(L)
localy, yp, Ly, Ly1;
Ly := subs(diff(x(t), t) = yp, x(t) = y, L);
Ly1 := diff(subs(yp = diff(x(t), t), diff(Ly, yp)), t) - diff(Ly, y);
subs(yp = diff(x(t), t), y = x(t), diff(yp, t) = diff(x(t), t, t), Ly1)
```

$end:$
$> Lc := 1/2 * m * diff(x(t), t)^2 - (1/2 * K * x(t)^2 - F(t) * x(t));$
$> eqEulerLagrange(Lc);$

Pour ne pas compliquer le problème nous avons supposé que la force de rappel K ne dépend ni de x ni de t, et nous le supposerons par la suite, car là ne se situe pas l'essentiel du propos (autrement dit, le fait que K soit constant ou non est annexe par rapport aux problèmes de fond posés par la modélisation de l'oscillateur harmonique).

Problème : Quel Lagrangien faut-il prendre pour obtenir l'équation du mouvement de l'oscillateur amorti (13) ?

Il est bien connu qu'il faut prendre un lagrangien de la forme

$$e^{A(t)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)) \tag{16}$$

avec $A(t) = 2\alpha\sqrt{Km}\,t$, pour que l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement soit (13).
Remarquons donc que pour obtenir cette équation, il y a nécessité d'un recours à un facteur conforme qui peut s'interpréter comme l'existence d'un temps propre attaché à la boule, différent du temps t du laboratoire, et ce bien que les corrections relativistes soient totalement négligeables. Approfondissons ce phénomène.

Sur la correction relativiste. Même si la première correction relativiste, liée à la vitesse $\dot{x}(t)$, est tout à fait négligeable dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'étude de cette correction relativiste dans un cadre Lagrangien, va nous permettre de mettre en évidence le rôle joué par la présence d'un facteur conforme.
Cette correction relativiste s'obtient usuellement en remplacant dans l'équation du mouvement d'une part
$\dot{x}(t)$ par $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$,
et d'autre part
m par $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$,
la masse relativiste. Ainsi on obtient comme termes principaux de l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + (Kx(t) - F(t))(1 - \frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2}) + ... = 0. \tag{17}$$

Une autre manière d'obtenir cette première correction relativiste, est de remplacer $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ par $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + \frac{\dot{x}(t)^2}{4c^2})$ dans le Lagrangien classique. Ces deux obtentions possèdent des inconvénients ; elles ne donnent pas les mêmes points de suspension et font apparaître des termes en $\dot{x}(t)^n$, avec $n > 2$.

Il est facile de remarquer que si l'on pose

$$Lr = e^{\frac{-3}{mc^2}(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)}Lc = e^{\frac{-3}{mc^2}\Phi(t,x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)), \tag{18}$$

("r" comme relativiste), on obtient :

$$m\ddot{x}(t)+(Kx(t)-F(t))(1-\frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2})+\frac{3\dot{F}(t)x(t)}{c^2}\dot{x}(t)-\frac{3}{mc^2}(Kx(t)-F(t))(\frac{1}{2}Kx^2(t)-F(t)x(t)))=0. \tag{19}$$

Nous obtenons ainsi une formulation simple de la correction relativiste dans les coordonnées (t, x) du laboratoire. Sans doute est-elle connue ? Je ne l'ai pas encore trouvée dans la littérature.

L'utilisation de Maple m'a beaucoup facilité la tache, pour trouver ce facteur conforme $e^{\frac{-3}{mc^2}\phi(t,x)}$.

Remarque : Mais des expériences plus fines, lors d'études sur l'amortissement en régime transitoire rapide, montrent qu'il faut remplacer le coefficient $2\alpha\sqrt{Km}$ de l'équation par une fonction $t \to 2m\alpha\sqrt{K/m}+\beta t+...$; et ce coefficient β commence à être bien mesuré. Le problème est donc le suivant : Soit $m\ddot{x}+m\gamma(t)\dot{x}+Kx-F(t) = 0$ cette équation du mouvement, comment obtenir théoriquement cette fonction $\gamma(t)$? Question ouverte, mais importante, il est une expérience que l'on fait souvent, celle de constater que la plupart des pannes mécaniques interviennent pendant la mise en route ou lors de l'arrêt d'un système. Peut-on limiter les sources de ces pannes qui proviennent lors d'un changement de régime brutal. En régime normal, on sait qu'il suffit d'éviter des plages de résonances, mais le problème reste incompris en régime transitoire (démarrage, arrêt, ou ... panne secondaire qui perturbe soudainement le régime normal).
Un régime transitoire rapide, correspond à une force $F(t) = F_o sin(\omega(t)t)$ où $\omega(t)$ passe rapidement d'une valeur ω_1 à une valeur ω_2. Ce régime transitoire peut simuler la mise en marche ($\omega_1 = 0$) ou l'arrêt ($\omega_2 = 0$) d'un régime dit permanent ($F(t) = F_o sin(\omega\ t)$) pour lequel l'équation du mouvement (13) est valable semble-t-il.

Résumé sur la formulation Lagrangienne conforme

Nous venons de voir que pour obtenir le terme d'amortissement ou la correction relativiste pour l'oscillateut harmonique dans le cadre Lagrangien nous avons multiplié le Lagrangien classique par un facteur (dit conforme).
Dans un cadre plus général, écrivons la formulation Lagrangienne du problème, en partant du Lagrangien classique associé à un champ $\Phi(t,x)$:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \Phi(t,x). \tag{20}$$

Introduisons un facteur conforme en prenant :

$$L = e^{H(t,x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \Phi(t,x)\ ), \tag{21}$$

dont l'équation du mouvement s'écrit (en appliquant la procédure Maple ci-dessus) :

$$m\ddot{x} + \frac{m}{2}H'\dot{x}^2 + m\dot{H}\dot{x} + \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}\ \ + H'\Phi(t,x). \tag{22}$$

Pour $\Phi(t,x) = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$, cette formule redonne aussi bien la correction relativiste (avec $H(t,x) = \frac{-3}{mc^2}(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x))$ que le régime permanent (avec $H(t,x) = 2\alpha\Omega t$) ; de plus ces deux corrections sont indépendantes.
Mais dans ce cadre Lagrangien, comment trouver ce facteur conforme $H(t,x)$, pour un régime transitoire rapide par exemple ? Il manque des équations.

Interprétation : le temps propre de la pièce mobile.

Pour la correction relativiste le temps propre de la pièce mobile n'est pas le temps de l'observateur fixe (attaché au laboratoire) du fait des principes de la relativité restreinte. Pour l'oscillateur harmonique la correction relativiste est négligeable, et pourtant pour obtenir le mouvement amorti, tout se passe comme si le temps propre de la pièce mobile n'était pas le temps de l'observateur fixe et cela se traduit dans le cadre Lagrangien par un facteur conforme. Mais :

1- A toute équation du mouvement de la forme (22), on peut associer une connexion abstraite Γ sur l'espace-temps telle l'une des équations des géodésiques soit exactement cette équation d'Euler-Lagrange (22).

2- Inversement à toute métrique g, définie sur l'espace-temps, on peut associer le Lagrangien

$$L_g = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} \tag{23}$$

tel que les équations d'Euler-Lagrange correspondantes soient les équations des géodésiques définies par la connexion associée à cette métrique.
Une étude dans le cadre métrique (pseudo-riemannien) s'impose donc.

4.2 Traitement métrique de l'oscillateur harmonique

Soit (t, x), l'espace-temps de l'observateur qui regarde les oscillations du système. Pour cet observateur la métrique est la métrique canonique grr de Lorentz. Soit g la métrique associée à la masse qui oscille. Son écriture dans la carte associée à l'observateur est de la forme $\begin{bmatrix} \tau(t,x) & f(t,x) \\ f(t,x) & -h(t,x) \end{bmatrix}$. Mais pour obtenir des équations "simples", il est pratique de la prendre sous la forme

$$g(t,x) = h(t,x) \begin{bmatrix} \tau(t,x) & 1/2\, f(t,x) \\ 1/2\, f(t,x) & -1 \end{bmatrix},$$

avec pour conditions initiales au point $(0, 0)$:

$$g(0,0) = grr(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

(absence de force extérieure F). Pour une 2-métrique, le tenseur d'Einstein est toujours identiquement nul, ce qui correspond au cadre expérimental (les forces de gravitation s'exercant sur la pièce mobile sont négligeables).

Une des équations du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\dot{x}^2 + \frac{\dot{h}}{h}\dot{x} + \frac{1}{2}\tau\frac{h'}{h} - \frac{1}{2}f\frac{\dot{h}}{h} = 0 \tag{24}$$

l'autre équation, l'intégrale première du mouvement, est donnée par la métrique :

$$h(\tau + f\dot{x} - \dot{x}^2) = 1 \ .$$

Remarque : la ressemblance entre les deux équations (24) et (22) est frappante et conduit à poser
$h(t,x) = e^{H(t,x)}$.// Cependant, dans ce cadre nous avons trois fonctions inconnues h, τ et f. Il manque des équations.

Prenons celles provenant de la jauge harmonique écrites de manière grr-covariante : elles s'obtiennent en calculant :

$$D_\mu\left(\sqrt{\frac{g}{grr}}\,g^{\mu\nu}\right) = 0,$$

où D_μ est la dérivation covariante par rapport à la métrique plate grr.
Lemme 1 : Les équations provenant de la jauge harmonique sont :

$$\{\ \dot{\tau} = f'\,\tau - f\dot{f},\ \ \tau' = \dot{f}\ \}\ . \tag{25}$$

D'après ce lemme 1, pour $u(t, x)$ telle que $\dot{u} = \tau$ et $u' = f$, alors la métrique g s'écrit sous la forme suivante :

Théorème 1 :

$$g(t,x) = h(t,x) \begin{bmatrix} \dot{u}(t,x) & 1/2\, u'(t,x) \\ 1/2\, u'(t,x) & -1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

et vérifie la jauge harmonique si et seulement si u est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)\right)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right)\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}u(t,x) = 0\ . \tag{27}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation pour déterminer $f(t,x) = u'(t,x)$ (et par suite τ). Pour cela, posons $u(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t)x^i$. Alors l'équation (27) se réduit au système d'équations

Lemme 2 : pour $i \geq 0$:

$$u_{i+2}(t) = \frac{\ddot{u}_i(t) + \sum_{j=1}^{i+1} j(i+3-2j)u_j\dot{u}_{i+2-j}}{(i+1)(i+2)\dot{u}_0(t)} \ , \tag{28}$$

En résumé, le cadre Lagrangien nous donne rapidement l'équation fondamentale du mouvement et le cadre de la relativité générale les équations supplémentaires nécessaires, à partir des équations de la jauge harmonique.

4.3 Résultats pour l'oscillateur harmonique

Revenons à la situation expérimentale étudiée ; les vitesses ($\dot{x}$) sont très petites, aussi nous allons négliger les termes en $\dot{x}^2$ dans les équations (24) et (22) tout simplement en prenant $h' = H' = 0$ et en posant $\gamma(t) = \dot{H} = \frac{\dot{h}}{h}$. L'équation du mouvement se réduit alors à

$$\ddot{x} + \gamma(t)\dot{x} + Kx - F(t) = 0 \ ,$$

avec

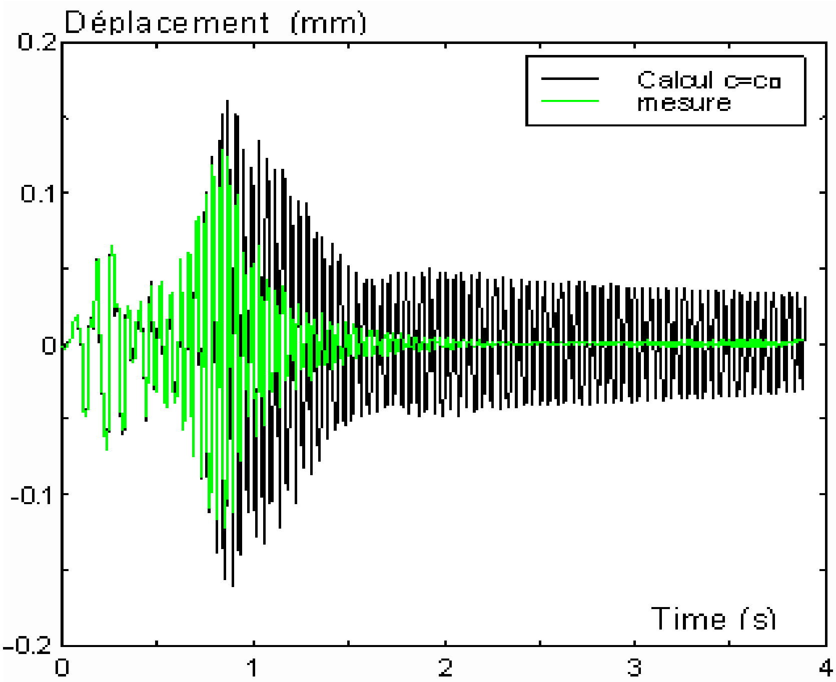
$$-\frac{1}{2}f(t,x(t)) \ \frac{\dot{h}}{h} = Kx(t) - F(t)$$

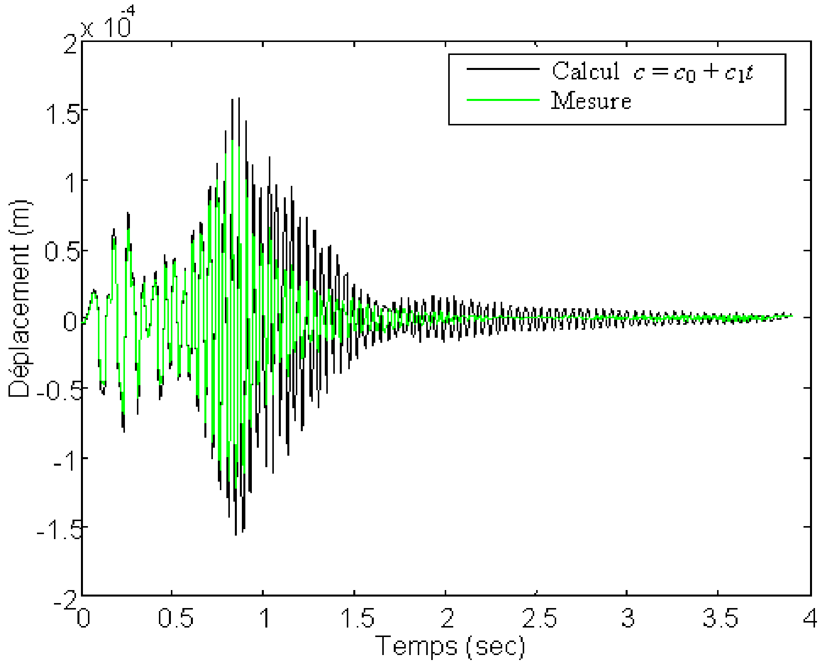
pour la solution $t \to x(t)$ de l'équation du mouvement vérifiant les conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Nous allons aussi tenir compte des conditions aux limites en particulier celle qui stipule que si la force F(t) est périodique ($F(t) = A \ sin(\omega t)$) alors l'équation du mouvement se réduit à $\ddot{x} + \alpha\sqrt{(K)}\dot{x} + Kx - F(t) = 0$. Il reste donc à calculer $\gamma(t)$ en fonction de K, $F(t)$, en utilisant la jauge harmonique, i.e. le lemme 2.

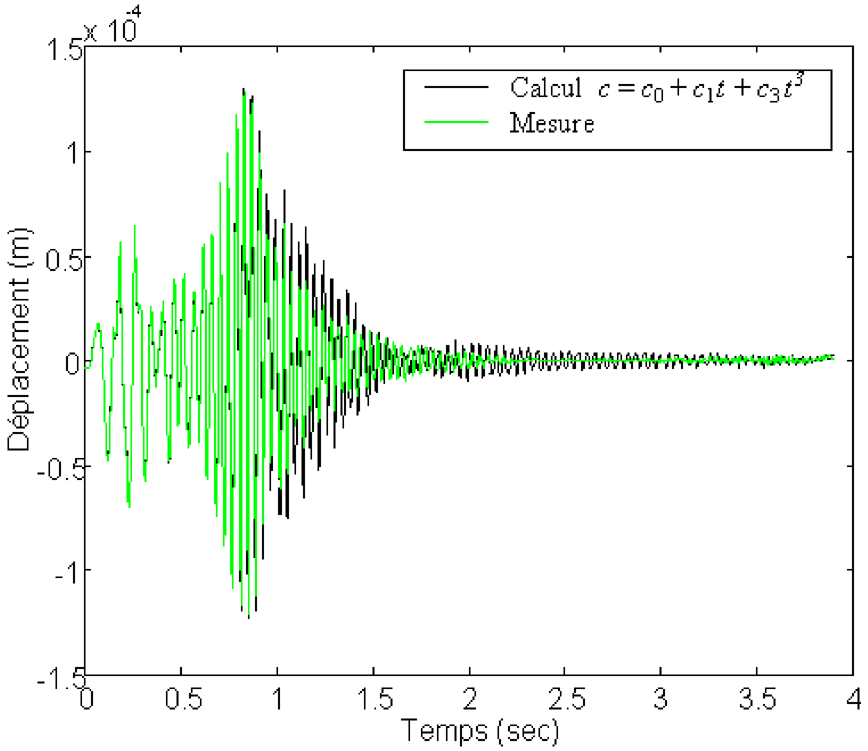
Corollaire : Sous l'hypothèse de la jauge harmonique, l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur harmonique contient un terme d'amortissement (ou de dissipation) dont le coefficient $\gamma(t)$ admet le développement limité à l'ordre 4 suivant lorsque $F(0) = 0$ et $\dot{F}(0) \neq 0$:

$$\gamma(t) = \alpha\sqrt{K}(1 + \frac{t}{2}\frac{\ddot{F}(0)}{\dot{F}(0)} + \frac{t^3}{24}\frac{\ddddot{F}(0)\dot{F}(0) - 2\dddot{F}(0)\ddot{F}(0) + K\ddot{F}(0)\dot{F}(0)}{\dot{F}(0)^2} + ...) \tag{29}$$

La preuve ne soulève pas de difficultés, mais les calculs sont longs et pénibles (même avec Maple). Voici maintenant ce que donne la confrontation à l'expérimentation (réalisée par A. Almajid à l'INSA de Lyon). Au niveau de la confirmation expérimentale, les premiers résultats sont probants, mais il reste à les conforter. Pour les figures $\gamma(t)$ est noté $c(t) = co + c1 * t + c3 * t^3$. Pour la première, $c(t) = c_o$, il n'y a pas d'adéquation après le pic de résonance ; pour la seconde avec $c(t) = c_o + c_1 * t$ et pour la troisième avec $c(t) = c_o + c_1 * t + c_3 * t^3$, il est manifeste que l'adéquation entre la courbe expérimentale et la courbe théorique augmente avec l'ordre du développement limité. (On peut ainsi espérer que les hélicoptères auront moins de pannes).


Déplacement (mm)
Calcul c=c0
mesure
Time (s)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
1
2
3
4


x 10^-4
Calcul $c = c_0 + c_1 t$
Mesure
Déplacement (m)
Temps (sec)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4



Remarques :

1- La question de la compréhension de ce coefficient de dissipation γ à travers le concept de temps propre reste à approfondir. De fait, dans le cadre d'un régime transitoire rapide, l'amortissement peut être modélisé au moyen d'une métrique.

2- Il reste à comprendre pourquoi la jauge harmonique est essentielle pour de simples problèmes de mécanique. Est-ce lié au fait que la force extérieure se transmet à la vitesse de la lumière, ou plus profondément à une invariance du mouvement de tout "front d'onde" dans la terminologie de Vladimir Fock ?

3- On sait que le groupe de Poincaré est fondamental au niveau de la relativité restreinte et générale, ainsi qu'au niveau de la mécanique quantique, pourquoi ne jouerait-il pas un rôle à l'échelle intermédiaire de la mécanique usuelle ? En fait la jauge harmonique possède un rapport étroit avec ce groupe de Poincaré.

4- Relativisons. Ceci n'est évidemment qu'un début, et pour plusieurs raisons : la constante K n'est constante qu'à une première approximation ; les mouvements de l'oscillateur sont supposés petits ; nous avons regardé un problème à une seule dimension spatiale ; enfin nous avons supposé que le coefficient de dissipation γ ne dépend que de t (en négligeant l'aspect relativiste des vitesses).

5- Au risque de me répéter, sans la puissance de calcul des ordinateurs, et celle d'un logiciel de calcul formel, je n'aurais pas pu trouver la forme à adopter pour le tenseur métrique : $g(t,x) = \begin{bmatrix} \tau(t,x)h(t,x) & 1/2\, f(t,x)h(t,x) \\ 1/2\, f(t,x)h(t,x) & -h(t,x) \end{bmatrix}$.

6- Une certitude : pour espérer traiter de manière similaire l'étude de phénomènes vibratoires dans le plan ou l'espace, on ne peut pas faire l'économie de la traduction de la jauge harmonique dans le cadre Lagrangien.

7- Une deuxième certitude : l'oscillateur harmonique nous fournit un test d'un aspect de la relativité générale (celui de la pertinence de la jauge harmonique), un test en laboratoire sur terre, de plus extrêmement peu coûteux financièrement, et renouvelant le problème de l'étude de la limite entre mécanique classique et mécanique relativiste.

La formule d'Almajid. D'autres expériences ont été menées, l'une à trois degrés de libertés (triple pendule avec trois ressorts), l'autre sur l'étude de la vibration d'une poutre. Si l'on note $\omega(t)$ la fréquence de la force extérieure (simulant un régime transitoire rapide), l'adéquation entre l'expérimentation et la modélisation s'obtient en prenant un temps propre qui dépend de $\omega(t)$. Plus précisemment, on sait qu'un effet relativiste dépend de la vitesse que l'on prend en compte par la formule $\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2(t)}{c^2}}$. Ici tout se passe comme si il fallait utiliser une formule de correction relativiste du type

$$\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2(t)}{c^2}-\lambda^2(\omega(t))} \tag{30}$$

où λ est une fonction qu'il reste à découvrir et à comprendre ; elle a été déterminée expérimentalement dans les expériences décrites. C'est la formule d'Almajid. Une deuxième correction relativiste voit le jour, associée à un régime transitoire rapide et qui met en évidence un temps propre ! Qu'est-ce ce temps ?

La principale source de confusions vient de nos discours qui ne font pas bien la part des choses : ils attribuent trop souvent au temps les propriétés des phénomènes qui s'y déroulent.

E. KLEIN, Science & Vie, n° 2^{10}, Janvier 2003.