Le temps du recul, le principe de précaution

Michel Mizony

Cargèse, Février 2005

" L'équivalence rigoureuse - et assez paradoxale - entre le modèle cosmologique newtonien le plus simple et le modèle de Friedmann avec courbure spatiale est évoquée ..."
J.M Souriau

Ne pas confondre :
* trajectoires et géodésiques
* vitesse de la lumière et vitesse du photon
* métrique et lagrangien
* densité et codensité
* covariance et invariance
* ... .

Et le cinquième axiome d'Euclide ?

Introduction

Le but de cette réflexion est d'étudier les corrections relativistes associées au potentiel newtonien créé par une masse (le soleil par exemple), et ceci dans un cadre purement Newtonien. On supposera de plus que notre astre massif est dans un univers homogène et isotrope. Du fait que l'on veut les corrections relativistes, on supposera donc qu'il existe une vitesse limite, un invariant, que l'on associe à "la vitesse de la lumière".

Aussi surprenant que cela paraisse, c'est tout à fait possible dans un cadre newtonien, tout en étant équivalent à un traitement dans le cadre de la relativité générale d'Einstein. Evidemment nous pointerons en cours de route les précautions à prendre, les confusions à éviter.

L'idée : Sur l'espace-temps de Minkowski (vitesse finie de la lumière oblige), plaçons nous dans les coordonnées sphériques (t, r, ω), où $\omega = (\theta, \phi)$, et supposons simplement l'existence d'un potentiel gravitationnel $\Phi(t, r)$ traduisant un modèle d'univers homogène et isotrope (en expansion). A partir de cette simple existence d'un potentiel cosmologique, on peut construire un temps cosmologique τ, et un invariant, puis un Lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange associées qui donneront les trajectoires des particules en chute libre, et enfin donner l'expression de ce potentiel cosmologique dont on a simplement admis l'existence.

La question : Pourquoi se donner tant de peine pour retrouver des résultats que l'on aurait pu obtenir à partir de la relativité générale ? Pour deux types de raisons, le premier type étant de nature épistémologique (un exemple de pluralisme théorique, concept cher à H. Poincaré, le sens du Véme axiome d'Euclide), le deuxième touchant au problème de comprendre plus clairement ce que l'on observe et mesure (on peut penser par exemple au problème dit de l'accélération anormale des sondes Pioneer, à la vitesse et à l'accélération du photon).

Plan : Nous commencerons par trouver dans un cadre purement newtonien-relativiste, les modèles d'univers homogènes et isotrope.

Puis par un schéma identique nous donnerons une forme (inhabituelle) du champ créé par notre soleil dans le vide.

Enfin, toujours par une même démarche purement newtonienne, nous traiterons le problème d'une boule sphérique dans un univers isotrope.

1 Le temps cosmologique

Définition 1 : soit H(t,r) le *paramètre de Hubble* au point évènement (t, r, ω) de l'espace de Minkowski M, (cet espace peut être interprété comme l'espace tangent à l'évènement "hic et nunc" correspondant à $t = t_o$ aujourd'hui, et à $r = 0$ ici, dans le cadre de la relativité générale).

Définition 2 : Le *temps cosmologique* $\tau = h(t, r)$ est celui par rapport auquel le mouvement radial $\tau \to r(\tau)$ d'un corps en chute libre s'écrit le plus simplement :

$$V_\tau = \frac{dr(\tau)}{d\tau} = H(\tau)\, r(\tau). \tag{1}$$

Ce temps sera, de plus, supposé coïncider avec le temps t en $r = 0$, i.e. h(t,0)=t.

Autrement dit on postule l'existence d'une variable temporelle $\tau = h(t, r)$, avec $h(t, 0) = t$, telle que dans ces coordonnées (τ, r), on ait le mouvement d'expansion cosmologique gouverné par l'équation (1). En prenant la définition usuelle du paramètre de décélération q (défini par exemple par $\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -(q+1)H^2(\tau))$), on obtient l'accélération cosmologique :

$$\frac{dV_\tau}{d\tau} = -q\, H^2(\tau)\, r(\tau). \tag{2}$$

Dans la mesure où nous sommes parti d'un mouvement radial (1), la forme de Lagrangien la plus simple est :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \alpha\ (\dot{r} - r\ H(\tau)\ \dot{\tau})^2\ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{3}$$

où α est une fonction à déterminer.

Utilisons pour cela les équations de la cosmologie newtonienne :

1.1 Les équations de la cosmologie post-Newtonienne

Comme je vous l'avais présenté il y a deux ans, employons la dynamique post-Newtonienne correspondant à un tel fluide parfait. Pour cela il n'y a qu'à suivre l'exemple traité par J. M. Souriau [1] pour retrouver ou reconstruire les modèles d'univers ; il s'appuie sur l'hydrodynamique relativiste (cf. Weinberg [5], chap.2-10) ; plus précisément cet auteur montre que lorsque la pression du fluide cosmique est nulle, l'équation de Poisson, l'équation d'Euler et l'équation de continuité permettent de retrouver les mêmes équations, la même dynamique, mais dans un cadre post-Newtonien (nous disons post-Newtonien pour signifier la mécanique newtonienne avec la vitesse de la lumière finie). Pour éviter des confusions de langage, l'expression post-newtonien étant déjà employée dans un autre contexte, il serait préférable d'employer l'expression "lorentz-newtonien".

En mécanique newtonienne, un point matériel qui occupe la position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ à l'instant τ gravite selon l'équation :

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \vec{g} \ , \tag{4}$$

où $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, \tau)$ désigne le champ de gravitation.

Supposons que $\tau \ \rightarrow \ \vec{r}(\tau)$ décrive la trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'un point comobile avec le fluide parfait de densité $\rho = \rho(\tau)$ et de pression $\vec{p} = \vec{p}(\tau)$ de composantes $p(\tau)$, emplissant de manière homogène et isotrope l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notons $\vec{v} = \vec{v}(\tau) = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ la vitesse en chaque point $\vec{r}$, alors on a

$\vec{g}(\tau) = -\lambda(\tau)\vec{r}(\tau)$, et $\vec{v}(\tau) = H(\tau)\vec{r}(\tau)$, (H s'interprète comme le coefficient de Hubble).

Avec ces notations, voici les trois Equations d'Euler, de Poisson et de continuité :

$$\frac{dH}{d\tau} + H^2 = -\lambda; \tag{5}$$

$$Div(\vec{g}(\tau)) = -4\pi G(\rho(\tau) + 3p(\tau)), \tag{6}$$

cette équation de Poisson (modifiée en introduisant un terme de pression, cf. [1]) s'écrit encore :

$$3(\frac{dH}{d\tau} + H^2) = -4\pi G(\rho(\tau) + 3p(\tau)). \tag{7}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{d\rho}{d\tau} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{8}$$

Dans ce cadre post-newtonien, il nous reste donc deux équations à résoudre : les équations de continuité (8) et de conservation (7), puis l'équation d'Euler permet alors de calculer le champ gravitationnel newtonien $\vec{g}(\vec{r}, \tau)$.

Remarque fondamentale : les équations (8) et (7) admettent une intégrale première :

$$3(H^2 - \frac{K}{\|\vec{r}\|^2}) = 8\pi G\rho, \tag{9}$$

où K est une constante.

Notons maintenant $\Omega(\tau)$ le rapport entre la densité de l'univers et la densité critique (donnée par $K=0$), et notons $r = |\vec{r}\|$. Alors cette intégrale première s'écrit :

$$K = H^2 r^2 - \Omega H^2 r^2, \tag{10}$$

autrement dit une particule comobile de masse m a une constante de mouvement $\frac{1}{2}mK$ égale à la différence entre son énergie cinétique ($\frac{1}{2}mH^2r^2$) et son énergie potentielle ($\frac{1}{2}m\Omega H^2 r^2$)

1.2 Le Lagrangien et des conséquences

Il nous reste maintenant à déterminer complètement le Lagrangien (3) dans ces coordonnées (τ, r, ω) de la cosmologie newtonienne, ce qui permettra d'obtenir les équations générales du mouvement. Pour cela utilisons cette constante du mouvement K en disant que la fonction α dépend de K. Puis exigeons que le lagrangien nous donne un champ d'accélération qui vaut $-q\,H^2\,r$, alors on a

$\alpha = \alpha(K) = \frac{1}{1+K}$.

On a ainsi le Lagrangien :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - r\ H(\tau)\ \dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2} \ - \ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{11}$$

le potentiel cosmologique Φ défini par $2\Phi = \Omega H^2 r^2$ et les équations d'Euler-Lagrange du mouvement :

$$\frac{dL}{d\lambda}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x}, \tag{12}$$

où $x = \tau,\ r, \theta$ ou ϕ et $\dot{x} = \frac{dx}{d\lambda}$.

A propos du potentiel $2\Phi = \Omega H^2 r^2$, il est rapide de vérifier que $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi}{vdt} = \frac{1}{v}(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}) = -qH^2 r = \gamma$, en utilisant le fait que $\dot{\Omega} = -2qH(1-\Omega)$.

On peut alors rapidement obtenir le mouvement radial d'un photon (ou d'un signal électromagnétique), en prenant $L=0$, $\dot{\omega}=0$ et $d\lambda = d\tau$ dans le Lagrangien ; sa vitesse (variable) est :

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2} + r\ H(\tau)), \tag{13}$$

et son accélération (qui change) vaut, pour $Hr << 1$:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} \approx \pm H(\tau) - (q + \Omega - 1) H^2(\tau)\ r. \tag{14}$$

En clair cela signifie que la vitesse et l'accélération d'un photon ne sont pas covariants, contrairement à son redshift qui l'est et qui vaut dans les coordonnées (τ, r, ω) :

$$z = z(\tau, r) = H(\tau) r + \frac{1-\Omega}{2} H^2(\tau)\ r^2 + o(H^2(\tau)\ r^2). \tag{15}$$

.

Remarques :

1 Ce Lagrangien ne dépend que des fonctions $H(\tau)$ et $\Omega(\tau)$. Il ne dépend ni du "rayon de l'univers" $R(\tau)$, ni du champ d'accélération $q(\tau)$.

2 Ce Lagrangien admet une forme locale statique :

$$\dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - r\ H_o\ \dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega_o)\ \ H_o^2\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{16}$$

où H_o et Ω_o, valeurs hic et nunc des paramètres de Hubble et de densité. Cela permet une étude aisée de l'univers local.

3 Ce Lagrangien met en évidence la constante $K = v^2 - 2\Phi$ du mouvement, qui est la différence entre "l'énergie cinétique" H^2r^2 et "l'énergie potentielle" $\Omega H^2 r^2$.

4 Les équations du mouvement nous donnent les **trajectoires** sur l'espace-temps choisi à priori qui est l'espace de Minkowski.

Si l'on veut maintenant réaliser ces **trajectoires** comme **géodésiques** d'une métrique, il suffit alors de transformer formellement ce Lagrangien en métrique lorentzienne sur la carte initiale, i.e. dans les coordonnées $\tau,\ r, \omega$, et l'on a :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - r\ H(\tau)\ d\tau)^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ d\omega^2. \tag{17}$$

En resumé qu'avons nous fait ? Dans les coordonnées cosmologiques newtoniennes (τ, r, ω), définie en prenant la vitesse du mouvement radial $v = H(\tau)r$, nous avons obtenu le champ d'accélération $\gamma(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = -q * H(\tau)^2\, r$ et l'invariant du mouvement (i.e. "énergie cinétique" - "énergie potentielle") $K = (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2 = v^2 - 2\Phi$, et le Lagrangien s'est écrit sous la forme

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - v\ \dot{\tau})^2}{1 + v^2 - 2\Phi} -\ r^2\ \dot{\omega}^2. \tag{18}$$

C'est le schéma que nous allons utiliser par la suite.

2 La boule de matière dans un univers isotrope

2.1 Le soleil dans le vide

Prenons donc une boule de masse M dans les coordonnées sphériques (τ, r, ω), et prenons comme vitesse de chute radiale $v = v(\tau, r) = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$. Le champ d'accélération est $\gamma(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = -\frac{M}{r^2}$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{M}{r}$. La constante du mouvement vaut donc $K = v^2 - 2\Phi = 0$.

En prenant alors le Lagrangien (18), on a

$$2L = \dot{\tau}^2 - (\dot{r} + \sqrt{\frac{2M}{r}}\ \dot{\tau})^2 -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{19}$$

et donc la métrique associée, dans le cadre einsteinien :

$$ds^2 = d\tau^2 - (dr + \sqrt{\frac{2M}{r}}\ d\tau)^2 -\ r^2\ d\omega^2. \tag{20}$$

Cette forme de métrique inhabituelle, c'est celle trop méconnue que Painlevé [10] et Gullstrand [11] ont trouvée indépendamment en 1921, est pourtant simple et on peut vérifier facilement qu'elle est solution des équations d'Einstein dans le vide.

Plus généralement, nous pouvons prendre pour v(r) une vitesse telle que sa dérivée nous donne la loi de Newton $\gamma(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = -\frac{M}{r^2}$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{M}{r}$. Par exemple $v = v(\tau, r) = \pm\sqrt{\frac{2M}{r} + K}$, alors la constante du mouvement vaut $v^2 - 2\Phi = K$ et le Lagrangien (18) est

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - \pm\sqrt{\frac{2M}{r} + K}\ \dot{\tau})^2}{1+K} -\ r^2\ \dot{\omega}^2, \tag{21}$$

et donc la métrique associée, dans le cadre einsteinien :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - \pm\sqrt{\frac{2M}{r} + K}\ d\tau)^2}{1+K} -\ r^2\ d\omega^2. \tag{22}$$

Cette métrique qui généralise celle de Painlevé et Gullstrand vérifie les équations d'Einstein dans le vide. En particulier pour $K = v_o^2 - 2\frac{M}{r_o}$, on a le mouvement radial d'un satellite ayant une vitesse radiale v_o en r_o dans son temps propre $ds = d\tau$.

Il est rapide de vérifier que si on cherche un temps annexe t pour éliminer le terme "croisé" en $\dot{\tau}\ \dot{r}$ dans le Lagrangien (respectivement $d\tau\ dr$ dans la métrique), en posant $\tau = h(t, r)$, on doit avoir (pour K=0 pour simplifier) $\frac{\partial h(t,r)}{\partial r} = \frac{-v}{1-\frac{2M}{r}}$ et par $\frac{\partial h(t,r)}{\partial t} = 1$, on obtient le Lagrangien usuel :

$$(1 - \frac{2M}{r})\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} -\ r^2\ \dot{\omega}^2;$$

plus simplement il suffit de poser $dt = d\tau\ - \frac{\sqrt{2M/r}}{1-\frac{2M}{r}}dr$ pour obtenir cette forme usuelle de métrique qui permet de retrouver les résultats standards obtenus dans le cadre de la relativité générale, les équations des géodésiques étant équivalentes à celles d'Euler-Lagrange.

Dans ce cadre géométrique einsteinien, la variable r a une signification de rayon de courbure et non de distance radiale et la variable temporelle τ est le temps propre du corps en chute libre radialement.

Moralité : Nous avons prouvé (quasiment sans calculs) que la théorie de Newton est strictement équivalente à celle d'Einstein en ce qui concerne le champ gravitationnel émis par un astre dans le vide, et ce grâce à l'introduction d'une forme de Lagrangien d'une simplicité surprenante.

Autrement dit, pour plagier une formule bien connue, "Donnez moi un Lagrangien et je soulève le monde".

Incise *: Dans le cadre de ce colloque sur l'espace et le temps, il est important de signaler, à la lumière de cet exemple de deux modélisations mathématiquement et observationellement équivalentes et pourtant conceptuellement différentes (du champ gravitationnel créé par le soleil dans le vide) que*

1- La phrase trop souvent écrite "La matière courbe l'espace-temps" n'a aucun sens.

2- On peut par contre dire que "Dans la modélisation einsteinienne de la gravitation, la matière courbe l'espace-temps".

3- Et on doit dire aussi que "Dans la modélisation newtonienne de la gravitation, la matière ne courbe pas l'espace-temps, mais déforme les géodésiques".

Autrement dit le concept d'espace-temps est métaphysique.

Sur le photon. Le calcul de la vitesse d'un photon se déplaçant radialement dans les coordonnées (τ, r, ω) se fait rapidement en posant $L = \dot{\omega} = 0$ dans le Lagrangien (19) :

$v = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}$,

qui est différente de celle calculée avec la variable temporelle annexe t qui élimine le terme croisé (du Lagrangien et de la métrique) :

$v = \pm(1 - \frac{2M}{r})$.

La vitesse de la lumière c est un invariant ; la vitesse d'un photon n'est pas covariante mais son équation $L = 0$ ou $ds = 0$ est bien covariante.

Sur le mouvement radial d'un corps en chute libre.

Dans les coordonnées (τ, r, ω), le développement limité de la trajectoire radiale d'un corps en chute libre est :

$$r\left(\tau\right) = ro - \sqrt{2}\sqrt{\frac{M}{ro}}\tau - 1/2\,\frac{M\tau^2}{ro^2} - 1/3\,\sqrt{2}\sqrt{\frac{M}{ro}}M\tau^3 ro^{-3} + O\left(\tau^4\right)$$

qui s'exprime simplement à partir des "vitesse" et "accélération" newtoniennes ;
tandis que dans les coordonnées "standards" (t, r, ω), le développement limité de la trajectoire radiale d'un corps en chute libre est passablement plus compliqué :

$$r\left(t\right) = ro + \sqrt{2}\sqrt{\frac{M}{ro}}\left(-ro + 2\,M\right) t ro^{-1} - 1/2\,\frac{M\left(-ro + 2\,M\right)\left(6\,M - ro\right)t^2}{ro^4}$$

$$+1/3\,M\left(-ro + 2\,M\right)\sqrt{2}\sqrt{\frac{M}{ro}}\left(-12\,ro\,M + ro^2 + 24\,M^2\right)t^3 ro^{-6} + O\left(t^4\right).$$

Ceci se comprend aisément car τ est le temps propre du corps en chute libre.

Sur la jauge harmonique. On a tout le loisir de voir les avantages et les inconvénients de chacune des formes d'un Lagrangien ou d'une métrique. Il est évident que pour l'étude d'un champ fort il ne faut pas travailler avec la variable "radiale" r qui est un rayon périmétrique (de courbure), mais avec une variable C(r), qui nécessitera l'utilisation d'une jauge, par exemple celle dites "des coordonnées harmoniques". Ici nous utilisons une forme avec un terme "croisé" qui a l'avantage d'être signifiante du point de vue de la gravitation newtonienne et donc de mieux comprendre les rapports entre ces deux théories (newtonienne et einsteinienne) équivalentes de la gravitation. Cette forme n'ayant pas de sens pour des champs forts, à moins de remplacer r par C(r), ce que nous étudierons dans un travail ultérieur (question pas facile car si la jauge harmonique s'impose dans un univers vide, quelle jauge prendre dans un univers en expansion ?). Par ailleurs comment retrouver cette jauge dans un cadre purement newtonien ? C'est important si l'on veut bien traiter le problème du champ créé par un astre compact (comme une étoile à neutrons par exemple, car dans ce cas le "rayon de courbure" $C(r)$ est très différent du "rayon" r).

2.2 Le Soleil, un amas de galaxie dans un univers en expansion

Pour une masse M (que nous supposerons sphérique) dans un univers en expansion de paramètre de Hubble H, nous avons à considérer ensemble les deux vitesses radiales et les deux champs d'accélérations étudiés précédemment, avec toutes les interactions que l'on ne peut ignorer. Il ne peut y avoir additivité des vitesses, et comment comprendre une additivité de deux potentiels très différents ? Aussi pour résoudre ce problème, partons d'un principe commun des théories einsteinienne et newtonienne, celui de l'additivité des champs d'accélération. Dans l'étude des modèles d'univers, aussi bien que dans celle de l'étude du soleil dans un univers vide, les champs d'accélération apparaissent de manière annexe, ici ils vont prendre toute leur importance grâce à cette propriété postulée d'additivité. En clair nous avons en présence les deux champs d'accélération, celui $\gamma_u = -q\,H(\tau)^2\,r$ lié à l'univers isotrope et le deuxième $\gamma_M = -\frac{M}{r^2}$ associé à la masse M (à l'origine des coordonnées sphériques cosmologiques (τ, r, ω)). Nous avons alors à trouver le Lagrangien associé à cette surdensité M dans un univers homogène.

Cherchons donc la vitesse de chute radiale $v(\tau)$ d'un corps comobile vérifiant $\gamma_{(u,M)} := \frac{dv(\tau)}{d\tau} = \gamma_u + \gamma_M = -M/r^2 - qH^2 r$.
Nous avons à résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\partial v}{\partial r} v - (q+1)H^2 \frac{\partial v}{\partial H} = -M/r^2 - qH^2 r, \tag{23}$$

qui n'a pas de solutions évidentes.

Le rayon d'attraction d'une surdensité locale

Le premier élément à prendre en compte est le fait que la somme des deux champs d'accélération γ_u et γ_m s'annule pour $r_a := (\frac{M}{-qH^2})^{1/3}$, évidemment si l'univers est en expansion accélérée (i.e. $q < 0$), ce qui semble fort être le cas au vu des observations actuelles. Aussi on doit avoir $v(r_a) = 0$. Ce concept de rayon d'attraction a été défini il y a longtemps par J.M. Souriau [1] et est fort peu repris dans la littérature de manière surprenante, je dois l'avouer. Et pourtant les conséquences dans l'étude de l'univers local ne sont pas négligeables [3].

Il est par ailleurs évident que pour r grand, le champ cosmologique l'emporte sur le champ créé par la surdensité locale, donc $v(r) \approx Hr$ à l'infini. Inversement pour r petit on doit avoir $v(r) \approx -\sqrt{\frac{2M}{r}}$ pour r petit.
avec ces conditions aux limites on trouve une solution approchée par développement limité de v autour du rayon d'attraction r_a :

$$v(r) = (r - r_a)\sqrt{\frac{2M}{r\, r_a^2} + H^2}. \tag{24}$$

Il nous reste à trouver la constante du mouvement K qui est égale à v^2 moins "l'énergie potentielle". Cette énergie potentielle vaut en première approximation la somme de l'énergie potentielle ($\Omega H^2 r^2$) liée à l'expansion et de celle ($\frac{2M}{r}$) liée à la masse M. Au vu de l'approximation sur v on a :

$$K \approx v^2 - \frac{2M}{r} - \Omega H^2 r^2 = ((1 - \frac{r}{r_a})^2 - 1)\frac{2M}{r} + H^2((r - r_a)^2 - \Omega r^2). \tag{25}$$

Si l'on veut être plus strict (rigoureux), on peut partir simplement de l'hypothèse "K est une constante du mouvement radial", ce qui se traduit par l'équation :

$$0 = \frac{dK((r, H)}{d\tau} = v\,\frac{\partial K(r, H)}{\partial r} - (q + 1)H^2 \frac{\partial K(r, H)}{\partial H}, \tag{26}$$

qui donne le même résultat en première approximation.

Nous avons ainsi le Lagrangien associé à une surdensité M dans un univers de paramètre de Hubble H :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - (r - r_a)\sqrt{\frac{2M}{r\, r_a^2} + H^2}\ \dot{\tau})^2}{1 + ((1 - \frac{r}{r_a})^2 - 1)\frac{2M}{r} + H^2((r - r_a)^2 - \Omega r^2)} -\ r^2\ \dot{\omega}^2. \tag{27}$$

On peut alors donner la forme diagonale de ce Lagrangien (et de la métrique associée) en prenant un temps annexe t et qui s'obtient, en posant $\tau = h(t, r)$, par $h'(t, r) = \frac{-v}{1+K-v^2}$; alors le coefficient de $\dot{t}^2$ est $\frac{1+K-v^2}{1+K}\dot{h}(t, r)^2$. Il manque une condition aux limites qui s'obtient à partir d'un point r annulant v, soit h(t,ra)=t. On ne sera pas surpris de retrouver en bonne approximation la métrique (cf. ([4])) :

$$ds^2 \approx \left(1 - 2\,\frac{M}{r} + q\ (Hr)^2\right) dt^2 - dr^2 \left(1 - 2\,\frac{M}{r} - \Omega\,(Hr)^2\right)^{-1} \tag{28}$$
$$-r^2\, d\omega^2$$

3 Conclusion : et le Vème axiome d'Euclide ?

Nous avons retrouvé sur des bases uniquement newtonienne des résultats classiques de la relativité générale. Cela semble paradoxal et pourtant ce n'est pas le cas. Pourquoi ?

Certes on peut démontrer abstraitement l'équivalence mathématique des deux théories (de Newton et d'Einstein) de la gravitation cf. [3]. Mais une preuve mathématique ne permet pas toujours la compréhension profonde d'un résultat.

Partons de ce que disait Henri Poincaré [6] qui a créé le concept de pluralisme théorique.

" L'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky. Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace."

Ce que je propose pour comprendre cet apparent paradoxe, se situe dans la lignée de travaux de E. Kant (avec le choix a priori d'un espace de représentation d'un domaine de l'expérience [7]) et de H. Poincaré (avec le pluralisme théorique qu'il a introduit), travaux bien actualisés par G. G. Granger [8] qui de plus éclaire ce paradoxe à partir de ce Vème axiome d'Euclide [9].

En clair, le temps, l'espace ou un espace-temps est un objet mathématique, choisi a priori, permettant d'indexer un "domaine phénoménal". Cela donne raison à l'intuition de Kant. Autrement dit **dans toute modélisation il y a un choix a priori de l'espace mathématique servant à repérer l'ensemble des phénomènes.** En aucun cas il ne peut être identifié au réel de la physique. C'est lié au sens profond du Vème axiome d'Euclide (axiome des parallèles). Nous avons le choix de le prendre comme axiome, ou de prendre une de ses négations comme axiome. Ainsi si l'on paramètre un domaine phénoménal par $\mathbb{R}^3$, nous sommes libres de prendre cet espace euclidien ou non-euclidien. Donc on obtient ipso facto deux modélisations équivalentes.

Le pluralisme théorique est déjà une conséquence de cet axiome d'Euclide qui oblige donc à ne pas confondre un domaine phénoménal avec son espace de représentation mathématique. De plus c'est une richesse, puisque deux modélisations conceptuellement différentes s'éclairent l'une l'autre et se complètent.

Ainsi, le concept d'espace-temps, plat pour l'une des théories de la gravitation, courbe dans l'autre, est un concept méta-scientifique, autrement dit l'espace-temps n'existe pas en soi (en tant qu'objet d'étude de la physique).

Plus précisément ces théories ne peuvent rien nous apprendre sur le "réel espace-temps", elles servent à prédire des trajectoires, des géodésiques, bref des mouvements.

Références

[1] J.-M. Souriau *Géométrie et Thermodynamique en cosmologie*, in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).

[2] M. Lachièze-Rey 2001, The Friedmann-Lemaître models in perspective, A.& A. 364, 894-900 (astro-ph/0010163)

[3] M. Mizony 2003, *La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié*, ed ALEAS, Lyon, 2003

[4] M. Mizony et M. Lachièze-Rey, *Cosmological effects in the local static frame*, à paraître dans A.& A. (gr-qc/0412084).

[5] S. Weinberg *Gravitation and cosmology*, John Wiley, New-York 1972.

[6] H. Poincaré : *Les fondements de la géométrie*, in oeuvres, XI, Paris, (1956).

[7] E. Kant : *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature*, librairie philosophique J. Vrin Paris, (1990).

[8] G.G. Granger *La vérification*, O. Jacob, (1992).

[9] G.G. Granger *Philosophie, langage, science*, EDP Sciences (2003).

[10] P. Painlevé, *La mécanique classique el la theorie de la relativité*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **173** 677-680 (1921).

[11] A. Gullstrand, *Allegemeine lösung des statischen einkörper-problems in der Einsteinshen gravitations theorie*, Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16(8)** 1–15 (1922).

[12] V. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, London (1964).

Vaulx-en-Velin le 19 Février 2005

4 Annexe A : Sur les formes de métriques d'univers isotropes

Soit donc un modèle de Friedmann-Lemaître, avec sa métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2\ (\tau)\ \ [dx^2 + f_k^2(x)\ d\omega^2], \tag{29}$$

où $f_k(x) = x,\ \ \sin(x),\ \ \sinh(x)$ suivant le signe $k = 0,\ 1$ or -1 de la courbure spatiale.

Puis prenons la forme localement inertielle "ici et aujourd'hui" :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)}\ \left(d\rho^2 + R^2(\tau_o)\ f_k^2(\frac{\rho}{R(\tau_o)})\ d\omega^2\right)\ . \tag{30}$$

Passons maintenant à la forme intermédiaire avec un terme croisé :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{[dr - r\ H(\tau)\ d\tau]^2}{1 + [1 - \Omega(\tau)]\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ d\omega^2. \tag{31}$$

Prenons maintenant la forme locale (forme de Birkhoff généralisée) :

$$\begin{aligned} ds^2 = (1 + q(t)\ H^2(t)\ r^2 + [\Omega(t) + q(t)]\ \ \mathcal{O}(4))\ dt^2 \\ -\tfrac{dr^2}{1-\Omega(t)\ \ H^2(t)\ r^2} -\ r^2\ d\omega^2\ , \end{aligned} \tag{32}$$

et enfin la "forme osculatrice statique" locale :

$$ds^2 \approx [1 + q_0\ (H_0\ r)^2]\ dt^2\ \ - [1 - \Omega_0\ \ (H_0\ \ r)^2]^{(-1)}\ \ dr^2 -\ r^2\ d\omega^2. \tag{33}$$

Il est à remarquer que cette forme osculatrice dépend et de l'invariant fondamental c (la vitesse de la lumière dans le vide (de Minkowski) et des valeurs, hic et nunc, des trois paramètres cosmologiques H_o, q_o et Ω_o ; elle est donc bien adaptée pour étudier l'influence de l'univers sur un phénomène local dans une bonne approximation. Mais on aurait pu prendre une autre "forme osculatrice statique" locale directement à partir de la forme croisée :

$$ds^2 \approx d\tau^2 - \frac{[dr - r\ H_o\ d\tau]^2}{1 + [1 - \Omega_o]\ \ H_o^2\ \ r^2}\ \ -\ r^2\ d\omega^2. \tag{34}$$

Cette forme ne dépend pas explicitement de q_o mais elle a l'avantage de s'exprimer avec le temps cosmologique τ et non pas avec le temps annexe t. Nous n'avons pas parlé de cette forme dans notre article.

Chacune de ces formes a des avantages et des inconvénients. Signalons un point très important : la forme croisée (31) et sa forme statique approchée (34) sont localement inertielles tout au long de la ligne d'univers de l'origine. Cette forme croisée permet donc, grâce à cette propriété, une interprétation imédiate du tenseur impulsion-énergie.

Les équations d'Einstein s'écrivent $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, où $T_{\mu\nu}$ désigne le tenseur impulsion-énergie et où κ est une constante. Comme le tenseur $T_{\mu\nu}$ s'interprète en termes de densité et de pression que dans un repère localement inertiel, considérons les points pour lesquels ce tenseur est écrit dans des coordonnées localement inertielles. Pour la forme de métrique (31) c'est la ligne d'univers $r = 0$ et pour la forme (30) c'est l'unique point $y = 0,\ \tau = \tau_o$ (si R n'est pas constant). Il est donc évident que si l'on nomme $\rho_{comobile}(\tau, y)$ et $\rho_{croise}(\tau, r)$ les "densités" associées aux métriques dans lesquelles s'écrivent le tenseur impulsion-énergie, ces "densités" ont des propriétés différentes.

En effet le rapport des déterminants de ces tenseurs n'est égal à 1 qu'aux points où les métriques sont localement inertielles :

$$\frac{det(G_{\mu\nu}^{comobile}(\tau, y))}{det(G_{\mu\nu}^{croise}(\tau, r))} = \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau_o)}(1 + (1 - \Omega)H^2 r^2),$$

où $r = R(\tau) f_k(y/R(\tau_o))$.

Enonçons les propriétés et rapports évidents :

$\rho_{comobile}(\tau, y)$ ne dépend pas de y ;

$\rho_{croise}(\tau, r)$ dépend de r et $\rho_{croise}(\tau, 0)$ est la densité locale mesurable au temps τ ; nous noterons $\rho_{local}(X)$, cette densité locale au point X.

$\rho_{comobile}(\tau_o, y) = \rho_{croise}(\tau_o, 0) = \rho_{local}(\tau_o, 0)$.

Pour avancer, i.e. pour écrire des propriétés plus précises de $\rho_{comobile}(\tau)$ et de $\rho_{croise}(\tau, r)$, revenons à la définition théorique de ces objets. Soient donc $dV_{comobile}(\tau, y)$ et $dV_{croise}(\tau, r)$ les éléments de volume de la partie "espace" des métriques considérées, et soit $dV_{local}(X)$ l'élément de volume de la partie "espace" de la métrique de Minkowski sur l'espace tangent au point X considéré. Soit dM l'élément de matière-énergie dans le volume correspondant ; alors on a :

$$\rho_{comobile}(\tau) := \frac{dM}{dV_{comobile}(\tau, y)} = \frac{dM}{dV_{local}(\tau, y)} \frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, y) = \rho_{local}(\tau, y) \frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, y) \tag{35}$$

et de même

$$\rho_{croise}(\tau, r) := \frac{dM}{dV_{croise}(\tau, r)} = \frac{dM}{dV_{local}(\tau, r)} \frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, r) = \rho_{local}(\tau, r) \frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, r). \quad (36)$$

Par définition, en tout point X où la métrique est localement inertielle on aura :

$\rho_{comobile}(X) = \rho_{local}(X)$, respectivement $\rho_{croise}(X) = \rho_{local}(X)$.

Un calcul évident donne $\frac{dV_{local}}{dV_{comobile}}(\tau, 0) = (\frac{R(\tau)}{R(\tau_o)})^3$ et $\frac{dV_{local}}{dV_{croise}}(\tau, 0) = 1$. Ainsi on a démontré le résultat suivant :

Théorème :

$$\rho_{comobile}(\tau, y) = \rho_{comobile}(\tau, 0) = (\frac{R(\tau)}{R(\tau_o)})^3 \rho_{croise}(\tau, 0) = (\frac{R(\tau)}{R(\tau_o)})^3 \rho_{local}(\tau, 0), \quad (37)$$

et donc $\rho_{comobile}(X)$ désigne une COdensité et $\rho_{croise}(X)$ est la densité usuelle sur la ligne d'univers $X = (\tau, 0)$. En particulier si toute la "matière-énergie" est comobile, la "densité" $\rho_{comobile}$ est constante. Vladimir Fock ([12]) note cette "densité" comobile ρ^*. On peut faire un raisonnement similaire concernant les "pressions", mais le plus simple est encore de déduire le même genre de résultats sur les pressions à partir des équations d'Einstein ; autrement dit la "pression" dans les coordonnées COmobiles a le sens d'une COpression.