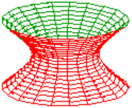
Métriques et géométries
U.O. Cycle Géométries, géodésiques et espace-temps

Michel Mizony

Institut Camille Jordan, CNRS UMR 5208, Université Lyon 1
IREM de Lyon

Mai 2008



Nous avons vu

1- La problématique concernant le chemin le plus court sur une surface.

Nous avons vu

1- La problématique concernant le chemin le plus court sur une surface.
2- Le théorème d'Euler-Lagrange qui permet de trouver ces chemins en minimisant des contraintes, i.e. chemin le plus économe.

Nous avons vu

1- La problématique concernant le chemin le plus court sur une surface.
2- Le théorème d'Euler-Lagrange qui permet de trouver ces chemins en minimisant des contraintes, i.e. chemin le plus économe.
3- L'écriture paramétrée d'une surface qui donne naturellement une métrique, donc une géométrie; les équations des géodésiques nous donnent les mêmes trajectoires.

Nous avons vu

1- La problématique concernant le chemin le plus court sur une surface.
2- Le théorème d'Euler-Lagrange qui permet de trouver ces chemins en minimisant des contraintes, i.e. chemin le plus économe.
3- L'écriture paramétrée d'une surface qui donne naturellement une métrique, donc une géométrie; les équations des géodésiques nous donnent les mêmes trajectoires.
4- L'exemple du système tournant qui, vu dans $\mathbb{R}^4$, nous donne l'équation de la force centrifuge et de celle de Coriolis.

Nous avons vu

1- La problématique concernant le chemin le plus court sur une surface.
2- Le théorème d'Euler-Lagrange qui permet de trouver ces chemins en minimisant des contraintes, i.e. chemin le plus économe.
3- L'écriture paramétrée d'une surface qui donne naturellement une métrique, donc une géométrie; les équations des géodésiques nous donnent les mêmes trajectoires.
4- L'exemple du système tournant qui, vu dans $\mathbb{R}^4$, nous donne l'équation de la force centrifuge et de celle de Coriolis.
5- L'exemple du corps en chute libre.

Formules du calcul tensoriel

Une surface dans $\mathbb{R}^3$ présente de la courbure et naturellement on a un élément de longueur, le ds qui s'exprime, dans un paramétrage, par une métrique. Pour des surfaces de dimension m, paramétrées par m variables u_j, dans un espace (pseudo) euclidien de dimension n, la métrique induit, sur cette surface paramétrée, un élément de longueur ds qui permet de calculer la longueur d'une trajectoire tracée sur cette surface.

Formules du calcul tensoriel

Une surface dans $\mathbb{R}^3$ présente de la courbure et naturellement on a un élément de longueur, le ds qui s'exprime, dans un paramétrage, par une métrique. Pour des surfaces de dimension m, paramétrées par m variables u_j, dans un espace (pseudo) euclidien de dimension n, la métrique induit, sur cette surface paramétrée, un élément de longueur ds qui permet de calculer la longueur d'une trajectoire tracée sur cette surface.
Le calcul tensoriel permet de mettre en oeuvre un moyen de calculer les géodésiques, les chemins les plus courts entre deux points d'une surface.

Formules du calcul tensoriel

Une surface dans $\mathbb{R}^3$ présente de la courbure et naturellement on a un élément de longueur, le ds qui s'exprime, dans un paramétrage, par une métrique. Pour des surfaces de dimension m, paramétrées par m variables u_j, dans un espace (pseudo) euclidien de dimension n, la métrique induit, sur cette surface paramétrée, un élément de longueur ds qui permet de calculer la longueur d'une trajectoire tracée sur cette surface.
Le calcul tensoriel permet de mettre en oeuvre un moyen de calculer les géodésiques, les chemins les plus courts entre deux points d'une surface.
Une métrique sur une surface de dimension m doit être vue comme une déformation d'une distance dans $\mathbb{R}^n$, déformation provenant de la forme de cette surface; cette déformation se traduit donc par des "courbures" dans toutes les directions. La géométrie étudie donc des objets abstraits pour nommer ces "courbures" et en donner des propriétés.

Formules (du calcul tensoriel) I

Soit la métrique $g_{\mu\nu}$, exprimée dans un paramétrage, on définit un objet abstrait, la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

Formules (du calcul tensoriel) I

Soit la métrique $g_{\mu\nu}$, exprimée dans un paramétrage, on définit un objet abstrait, la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right)$$

Formules (du calcul tensoriel) I

Soit la métrique $g_{\mu\nu}$, exprimée dans un paramétrage, on définit un objet abstrait, la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right)$$

qui permet d'écrire les **équations des géodésiques**
Soit $p \rightarrow x^{\mu}(p)$ une trajectoire c'est une géodésique pour la métrique g, si elle vérifie le système d'équations :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dp} \frac{dx^{\lambda}}{dp} = 0;$$

dont une **intégrale première** de ces équations , le Lagrangien, est donnée par la métrique :

$$2L = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \frac{dx^{\nu}}{dp} \, .$$

Formules (du calcul tensoriel) I

Soit la métrique $g_{\mu\nu}$, exprimée dans un paramétrage, on définit un objet abstrait, la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right)$$

qui permet d'écrire les **équations des géodésiques**
Soit $p \longrightarrow x^{\mu}(p)$ une trajectoire c'est une géodésique pour la métrique g, si elle vérifie le système d'équations :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dp} \frac{dx^{\lambda}}{dp} = 0;$$

dont une **intégrale première** de ces équations , le Lagrangien, est donnée par la métrique :

$$2L = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \frac{dx^{\nu}}{dp} .$$

et des invariants géométriques, les courbures:

Formules (du calcul tensoriel) : les courbures

Tenseur de courbure de Riemann.
Le tenseur de courbure de Riemann est défini par :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$$

Formules (du calcul tensoriel) : les courbures

Tenseur de courbure de Riemann.
Le tenseur de courbure de Riemann est défini par :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$$

par contraction on définit le **Tenseur de Ricci**

$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa}$$

Formules (du calcul tensoriel) : les courbures

Tenseur de courbure de Riemann.
Le tenseur de courbure de Riemann est défini par :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$$

par contraction on définit le **Tenseur de Ricci**

$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa}$$

puis la **courbure scalaire** :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Ce sont des invariants, i.e. ils ne dépendent pas du paramétrage de la surface.

Formules (du calcul tensoriel) III

La **dérivation covariante** ∇_λ : soit V^μ un vecteur, son vecteur dérivé covariant est définie par :

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa.$$

Les **identités de Bianchi** (propriété de symétrie du tenseur de courbure) donnent, par contraction, les "lois de conservation" :

$$\nabla_\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0.$$

Formules (du calcul tensoriel) III

La **dérivation covariante** ∇_λ : soit V^μ un vecteur, son vecteur dérivé covariant est définie par :

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa.$$

Les **identités de Bianchi** (propriété de symétrie du tenseur de courbure) donnent, par contraction, les "lois de conservation" :

$$\nabla_\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0.$$

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ est tout simplement le **Tenseur d'Einstein** .

Formules (du calcul tensoriel) III

La **dérivation covariante** ∇_λ : soit V^μ un vecteur, son vecteur dérivé covariant est définie par :

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa.$$

Les **identités de Bianchi** (propriété de symétrie du tenseur de courbure) donnent, par contraction, les "lois de conservation" :

$$\nabla_\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0.$$

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ est tout simplement le **Tenseur d'Einstein** .

A toute métrique est associé un Lagrangien dont les équations d'Euler-Lagrange nous donnent les mêmes trajectoires que les équations des géodésiques associées à la métrique, et réciproquement. On a à notre disposition deux approches théoriquement équivalentes qui s'éclairent mutuellement : l'une basée sur la "conservation de l'énergie", l'autre sur la "simplicité des courbures géométriques".

Cosmologie post-Newtonienne I

Plaçons-nous dans l'espace $\mathbb{R}^4$ de Minkowski, dans le système de coordonnées polaires, avec $c = 1$:

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, cos(\theta)^2\, d\phi^2;$$

plutôt en terme de Lagrangien, plaçons-nous dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du Lagrangien :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \dot{r}^2 \;-\; r^2\, \dot{\omega}^2,$$

où $\dot{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + cos(\theta)^2 \dot{\phi}^2$.

Cosmologie post-Newtonienne I

Plaçons-nous dans l'espace $\mathbb{R}^4$ de Minkowski, dans le système de coordonnées polaires, avec $c = 1$:

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, cos(\theta)^2\, d\phi^2;$$

plutôt en terme de Lagrangien, plaçons-nous dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du Lagrangien :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \dot{r}^2 \; - \; r^2\, \dot{\omega}^2,$$

où $\dot{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + cos(\theta)^2 \dot{\phi}^2$.

L'idée : supposons simplement que le mouvement radial $\tau \to r(\tau)$ d'un corps en chute libre s'écrit le plus simplement possible :

$$V_\tau = \frac{dr(\tau)}{d\tau} = H(\tau)\, r(\tau),$$

où $H(\tau)$ est une fonction qui n'est autre que le paramètre de Hubble.

Cosmologie post-Newtonienne II

En prenant la définition usuelle du paramètre de décélération q (défini par $\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -(q+1)H^2(\tau))$), on obtient l'accélération cosmologique :

$$\frac{dV_\tau}{d\tau} = -q\, H^2(\tau)\, r(\tau).$$

Cosmologie post-Newtonienne II

En prenant la définition usuelle du paramètre de décélération q (défini par $\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -(q+1)H^2(\tau))$), on obtient l'accélération cosmologique :

$$\frac{dV_\tau}{d\tau} = -q\, H^2(\tau)\, r(\tau).$$

La forme de Lagrangien la plus simple associée à cette expansion est :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \alpha\ (\dot{r} - r\ H(\tau)\ \dot{\tau})^2\ -\ r^2\ \dot{\omega}^2,$$

où α est une fonction à déterminer.

Cosmologie post-Newtonienne II

En prenant la définition usuelle du paramètre de décélération q (défini par $\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -(q+1)H^2(\tau))$), on obtient l'accélération cosmologique :

$$\frac{dV_\tau}{d\tau} = -q\, H^2(\tau)\, r(\tau).$$

La forme de Lagrangien la plus simple associée à cette expansion est :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \alpha\ (\dot{r} - r\ H(\tau)\ \dot{\tau})^2\ -\ r^2\ \dot{\omega}^2,$$

où α est une fonction à déterminer.

Pour cela, supposons que le "fluide cosmique" soit un gaz parfait de densité ρ et de pression p; alors on a les équations thermodynamiques de Poisson, d'Euler et celle dite de continuité qui admettent une intégrale première : $3(H^2 - \frac{K}{r^2}) = 8\pi G\rho$, où K est une constante.

Notons $\Omega(\tau)$ le rapport entre la densité de l'univers et la densité critique (donnée par $K=0$), alors cette intégrale première s'écrit :

Cosmologie post-Newtonienne III

$$K = H^2 r^2 - \Omega H^2 r^2.$$

Autrement dit une particule comobile de masse m a une constante de mouvement $\frac{1}{2}mK$ égale à la différence entre son énergie cinétique ($\frac{1}{2}mH^2 r^2$) et son énergie potentielle ($\frac{1}{2}m\Omega H^2 r^2$).

Cosmologie post-Newtonienne III

$$K = H^2 r^2 - \Omega H^2 r^2.$$

Autrement dit une particule comobile de masse m a une constante de mouvement $\frac{1}{2} mK$ égale à la différence entre son énergie cinétique ($\frac{1}{2} mH^2 r^2$) et son énergie potentielle ($\frac{1}{2} m\Omega H^2 r^2$). Utilisons cette constante du mouvement K en disant que la fonction α du Lagrangien ($2L = \dot{\tau}^2 - \dot{r}^2 \ - \ r^2 \ \dot{\omega}^2$) dépend de K, puis exigeons que le Lagrangien nous donne un champ d'accélération qui vaut $-q \, H^2 \, r$, alors on a

$$\alpha = \alpha(K) = \frac{1}{1+K}.$$

Cosmologie post-Newtonienne III

$$K = H^2 r^2 - \Omega H^2 r^2.$$

Autrement dit une particule comobile de masse m a une constante de mouvement $\frac{1}{2} mK$ égale à la différence entre son énergie cinétique ($\frac{1}{2} mH^2 r^2$) et son énergie potentielle ($\frac{1}{2} m\Omega H^2 r^2$). Utilisons cette constante du mouvement K en disant que la fonction α du Lagrangien ($2L = \dot{\tau}^2 - \dot{r}^2 \ - \ r^2 \ \dot{\omega}^2$) dépend de K, puis exigeons que le Lagrangien nous donne un champ d'accélération qui vaut $-q\, H^2\, r$, alors on a

$$\alpha = \alpha(K) = \frac{1}{1+K}.$$

Théorème 1 : En cosmologie post-Newtonnienne le Lagrangien s'écrit :

$$2L = \dot{\tau}^2 - \frac{(\dot{r} - r \ H(\tau) \ \dot{\tau})^2}{1 + (1 - \Omega(\tau)) \ \ H^2(\tau) \ \ r^2} \ \ - \ r^2 \ \dot{\omega}^2.$$

les deux cosmologies ...

Les équations d'Euler-Lagrange associées nous permettent de calculer les trajectoires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. La modélisation post-Newtonienne est achevée et d'une simplicitée surprenante.

les deux cosmologies ...

Les équations d'Euler-Lagrange associées nous permettent de calculer les trajectoires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. La modélisation post-Newtonienne est achevée et d'une simplicitée surprenante. Ecrivons en terme de métrique cette modélisation; autrement dit sur $\mathbb{R}^4$, écrivons la métrique associée au Lagrangien :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - r\ H(\tau)\ d\tau)^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ \ r^2\ d\omega^2.$$

Problème Quel rapport avec la modélisation de la relativité générale?

les deux cosmologies ...

Les équations d'Euler-Lagrange associées nous permettent de calculer les trajectoires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. La modélisation post-Newtonienne est achevée et d'une simplicitée surprenante. Ecrivons en terme de métrique cette modélisation; autrement dit sur $\mathbb{R}^4$, écrivons la métrique associée au Lagrangien :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(dr - r\ H(\tau)\ d\tau)^2}{1 + (1 - \Omega(\tau))\ \ H^2(\tau)\ \ r^2}\ \ -\ \ r^2\ d\omega^2.$$

Problème Quel rapport avec la modélisation de la relativité générale?

Théorème 2: Tous les modèles d'univers homogène et isotrope de la théorie de la relativité générale sont décrits par la métrique ci-dessus.
Autrement dit **la modélisation post-Newtonnienne est équivalente à la relativité générale**.

... sont équivalentes

Pour la preuve il suffit de prendre la réalisation usuelle des métriques obtenues dans le cadre Einsteinien :

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2\ (\tau)\ \ [dx^2 + f_k^2(x)\ d\omega^2],$$

où $f_k(x) = x, \quad \sin(x), \quad \sinh(x)$ suivant le signe $k = 0,\ 1$ or -1 de la courbure spatiale, et de faire un simple changement de variable en posant $r = R(\tau) f_k(x)$.

... sont équivalentes

Pour la preuve il suffit de prendre la réalisation usuelle des métriques obtenues dans le cadre Einsteinien :

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2\ (\tau)\ \ [dx^2 + f_k^2(x)\ d\omega^2],$$

où $f_k(x) = x, \quad \sin(x), \quad \sinh(x)$ suivant le signe $k = 0,\ 1$ or -1 de la courbure spatiale, et de faire un simple changement de variable en posant $r = R(\tau) f_k(x)$.

M. Mizony : La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié, Editions Aléas, juin 2003.

M. Mizony and M. Lachieze-Rey : Cosmological effects in the local static frame, Astronomy and Astrophysics, Volume 434, Issue 1, April IV 2005, pp. 45-52, gr-qc/0412084.

Sur le corps en chute libre

Soit le mouvement radial d'un corps en chute libre attiré par une masse m, située au centre du système de coordonnées sphériques. On suppose connue la vitesse v_0 à la distance r_0 au départ. D'après la mécanique newtonienne classique, ce corps en chute libre est soumis à une accélération $\gamma(r) = -mG/r^2$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{mG}{r}$. Donc sa vitesse de chute est $v(r) = \pm\sqrt{\frac{2mG}{r} + K}$, où la constante $K = v_0^2 - 2mG/r_0$ (énergie cinétique - énergie potentielle) est donnée par les conditions initiales $(v_0,\ r_0)$. Le signe $\pm$ est le signe de v_0.

Sur le corps en chute libre

Soit le mouvement radial d'un corps en chute libre attiré par une masse m, située au centre du système de coordonnées sphériques. On suppose connue la vitesse v_0 à la distance r_0 au départ. D'après la mécanique newtonienne classique, ce corps en chute libre est soumis à une accélération $\gamma(r) = -mG/r^2$, qui dérive du potentiel $\Phi = \frac{mG}{r}$. Donc sa vitesse de chute est $v(r) = \pm\sqrt{\frac{2mG}{r} + K}$, où la constante $K = v_0^2 - 2mG/r_0$ (énergie cinétique - énergie potentielle) est donnée par les conditions initiales $(v_0,\ r_0)$. Le signe $\pm$ est le signe de v_0.

Les Lagrangiens

$$2L = c^2\,\dot{t}^2 - \alpha(\dot{r} - v(r)\,\dot{t})^2 - r^2\,\dot{\theta}^2 - r^2\,cos(\theta)^2\,\dot{\phi}^2,$$

et leurs équations d'Euler-Lagrange rendent compte du mouvement radial.
Il reste à déterminer la constante α.

Sur le corps en chute libre II

Pour cela écrivons la métrique associée

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \alpha(dr - v(r)\, dt)^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, cos(\theta)^2\, d\phi^2,$$

ce qui nous donne une géométrie et minimisons la courbure de cette géométrie.

Sur le corps en chute libre II

Pour cela écrivons la métrique associée

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \alpha(dr - v(r)\,dt)^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\,cos(\theta)^2\,d\phi^2,$$

ce qui nous donne une géométrie et minimisons la courbure de cette géométrie. Le calcul de la courbure scalaire R nous dit que : $R = 0 \iff \alpha = \frac{1}{1+K}$. Ainsi la métrique "la plus simple" (car la plus plate) s'écrit

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \frac{(dr - v(r)\,dt)^2}{1+K} - r^2\,d\theta^2 - r^2\,cos(\theta)^2\,d\phi^2,$$

qui est solution dans le cadre Einsteinien. et le Lagrangien le plus simple est:

$$2L = c^2\,\dot{t}^2 - \frac{(\dot{r} - v(r)\,\dot{t})^2}{1+K} - r^2\,\dot{\theta}^2 - r^2\,cos(\theta)^2\,\dot{\phi}^2,$$

qui est la solution newtonienne au sens strict.

L'oscillateur harmonique

Le Lagrangien classique est

$$Lc = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)$$

où $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ désigne l'énergie cinétique de la masse m et $\Phi = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$ le potentiel attaché à la rigidité (ou force de rappel) K et à la force extérieure F. L'équation d'Euler-Lagrange est :

$$m\ddot{x} + Kx - F(t) = 0.$$

L'oscillateur harmonique

Le Lagrangien classique est

$$Lc = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)$$

où $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ désigne l'énergie cinétique de la masse m et $\Phi = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$ le potentiel attaché à la rigidité (ou force de rappel) K et à la force extérieure F. L'équation d'Euler-Lagrange est :

$$m\ddot{x} + Kx - F(t) = 0.$$

L'équation du mouvement de l'oscillateur avec amortissement est

$$m\ddot{x} + 2\alpha(t)\sqrt{Km}\dot{x} + Kx - F(t) = 0 \ ,$$

où α, le coefficient dit de dissipation (ou de viscosité) est bien mesuré.

Problème : Quel Lagrangien faut-il prendre pour obtenir l'équation du mouvement de l'oscillateur amorti?

Chercher un lagrangien de la forme

$$e^{A(t)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x))$$

L'oscillateur harmonique II

Sur la correction relativiste La première correction relativiste, liée à la vitesse $\dot{x}(t)$, est tout à fait négligeable dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'étude de cette correction relativiste dans un cadre Lagrangien, va mettre en évidence le rôle joué par la présence d'un facteur conforme.

Cette correction relativiste s'obtient usuellement en remplacant dans l'équation du mouvement d'une part
$\dot{x}(t)$ par $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$, et d'autre part m par $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$.

L'oscillateur harmonique II

Sur la correction relativiste La première correction relativiste, liée à la vitesse $\dot{x}(t)$, est tout à fait négligeable dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'étude de cette correction relativiste dans un cadre Lagrangien, va mettre en évidence le rôle joué par la présence d'un facteur conforme.

Cette correction relativiste s'obtient usuellement en remplacant dans l'équation du mouvement d'une part $\dot{x}(t)$ par $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$, et d'autre part m par $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$. Si l'on pose

$$Lr = e^{\frac{-3}{mc^2}(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)),$$

on obtient :

$$m\ddot{x}(t) + (Kx(t) - F(t))(1 - \frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2}) + \frac{3\dot{F}(t)x(t)}{c^2}\dot{x}(t) - \frac{3}{mc^2}(Kx(t) - F(t))(\frac{1}{2}Kx^2(t) - F(t)x(t))) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une formulation simple de la correction relativiste dans les coordonnées (t, x) du laboratoire. Sans doute est-elle connue? Je ne l'ai pas encore trouvée dans la littérature.