Chap. 11

La Jauge Harmonique

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

Nous avons fait de nombreuses fois appel à cette jauge pour compléter les équations d'Einstein, en particulier au chapitre 6 pour traiter complètement le problème du champ gravitationnel émis par un astre mort ; faisons le point.

Introduite très tôt, par Lanczos en 1922 [1] et De Donder [2] en 1921, elle s'inscrivait dans la problématique du moment, à savoir trouver un "meilleur système de coordonnées". Elle s'appelle toujours "condition des coordonnées harmoniques", dénomination très malheureuse car cela cache sa signification de jauge. Il n'y a pas de "meilleur système de coordonnées" du fait du principe de covariance, mais cela ne doit pas cacher le fait que les conditions aux limites ne sont pas covariantes, elles sont invariantes. Par contre on peut avoir recours à des équations supplémentaires, pour compléter la relativité générale à partir d'autres principes, principes provenant par exemple de l'électromagnétisme ou des interactions faibles et fortes. Une fois une jauge écrite dans un système privilégié de coordonnées, il est tout à fait possible de la transcrire de manière covariante ; ceci est un fait bien connu. Ainsi toute jauge peut et doit s'écrire de manière covariante. C'est Logunov [3] qui est le premier, à ma connaissance, à écrire la jauge harmonique de manière covariante.

Comment appeler cette jauge ? On peut considérer que, comme elle transcrit le fait que sur $\mathbb{R}^4$ de Minkowski, le champ gravitationnel se propage à la vitesse de la lumière, on peut l'appeler jauge de Lorentz ; mais comme elle traduit également le fait que si le champ gravitationnel est transporté par une particule de masse nulle, on peut dire que cette particule est d'hélicité 2 (mais pas d'hélicité 1) ce qui implique des relations d'orthogonalité, provenant de la classification des particules par masse et spin (ou hélicité pour celles de masse nulle) au moyen des représentations irréductibles du groupe de Poincaré (groupe des invariants de l'espace de Minkowski). Ces relations d'orthogonalité sont exactement les équations de la jauge harmonique. La situation sur $\mathbb{R}^4$ est donc la suivante : la jauge harmonique est conséquence de l'électromagnétisme (d'où le nom possible de jauge de Lorentz) ou est conséquence de la théorie des représentations du groupe de Poincaré, (d'où le nom possible de relations d'orthogonalité). Nous verrons que si l'univers sous-jacent est l'espace de De Sitter, la même situation semble se produire.

Puis nous établirons **l'équivalence entre les théories de Newton et d'Einstein de la gravitation**. Nous avons déjà vu au chapitre 7 cette équivalence pour les modèles isotropes de l'univers ; il nous reste à la prouver pour un modèle gravitationnel local rendant compte du mouvement des corps célestes dans une petite partie de l'univers. La complétion de la relativité générale par une jauge s'avérera indispensable pour que celle-ci fournisse une théorie de la gravitation.

Nous terminerons ce chapitre en présentant la problématique de l'oscillateur harmonique, un des plus simples des systèmes de la mécanique classique, et nous montrerons comment la jauge harmonique permet de rendre compte de l'existence du terme de dissipation et de fournir une vérification expérimentale dans un laboratoire terrestre de la pertinence de la jauge. Même si les vitesses en jeu ne sont pas relativistes, il se trouve que les phénomènes vibratoires liés à des régimes transitoires rapides nécessitent de recourir au temps propre et la jauge harmonique semble une piste à suivre très prometteuse.

La jauge harmonique sur l'espace de Minkowski.

Soit la métrique $g_{\mu\nu}$, à symétrie sphérique définie sur $\mathbb{R}^4$:

$$(1) \qquad ds^2 = F^2(r,t)dt^2 + 2H(r,t)F(r,t)dtdr - (L^2(r,t) - H^2(r,t))dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2,$$

où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$.

Et soit la métrique plate $\gamma_{\mu\nu}$ choisie sur l'espace de Minkowski, écrite dans les coordonnées polaires usuelles :

$$(2) \qquad ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\omega^2.$$

La jauge harmonique s'écrit de manière γ-covariante :

$$(3) \qquad D_\mu(\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g^{\mu\nu}) = 0$$

où D_μ est la dérivation covariante par rapport à la métrique plate γ.

Proposition : Pour une métrique $g_{\mu\nu}$, à symétrie sphérique, écrite sous la forme (1), la jauge harmonique (3) se réduit au système :

$$(4)(a) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\frac{(L^2 - H^2)C^2}{FL}) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{C^2 H}{L}) = 0$$

$$(4)(b) \qquad -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{C^2 H}{L}) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{C^2 F}{L}) = 2rFL \ .$$

Preuve : * Calcul de la connexion associée à $\gamma_{\mu\nu}$. Les symboles $\neq 0$ sont :

$\Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22}\ sin^2\theta = -r\ sin^2\theta$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^2_{33} = -sin\theta\ cos\theta$, $\Gamma^3_{23} = cotg\theta$.

* La matrice $\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g^{\mu\nu}$ est égale à :

$$\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(L^2-H^2)C^2}{FLr^2} & \frac{C^2H}{Lr^2} & 0 & 0 \\ \frac{C^2H}{Lr^2} & \frac{C^2F}{Lr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{FL}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{FL}{r^2 sin^2\theta} \end{pmatrix} .$$

* Un calcul immédiat de $D_\mu(\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g^{\mu\nu})$ conduit au résultat.

Cas particulier, les coefficients de la métrique ne dépendent pas de la variable temporelle, alors le système (4) se réduit à :

$$(5)\ \ (a) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(\frac{C^2}{L}H) = 0\ ;$$

$$(5)\ \ (b) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(\frac{C^2F}{L}) = 2rFL\ .$$

L'équation (5) (a) donne $H = kL/C^2$; mais comme il faut que $H^2 \leq L^2$, pour que la métrique soit Lorentzienne, la constante k vérifie $|k| \leq C^2$; comme la métrique doit être définie sur tout l'espace et que l'on doit avoir $C(0) = 0$, on obtient finalement la nullité de la constante k et donc $H \equiv 0$. C'est la raison pour laquelle nous avons a priori supposé, pour le traitement du champ émis par un astre mort (cf. chap. 6), que $H \equiv 0$, ce qui en fait n'est qu'une conséquence du recours à la jauge harmonique.

Cependant, si l'on voulait résoudre en toute généralité le problème du champ émis par une boule, il faudrait prendre au départ une métrique de la forme (1), et résoudre le système d'équations formé par les équations d'Einstein et par les équations de jauge (4), aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur de la boule !

Voici donc le système qui reste à résoudre à l'extérieur de la boule (tout en respectant le trop dévoyé théorème de Birkhoff) :

$$(6) \qquad 1 - \frac{2M}{C} = (C' - H\frac{\dot{C}}{F})/L^2 - (\frac{\dot{C}}{F})^2;$$

$$(C' - H\frac{\dot{C}}{F}))\frac{\dot{L}}{L} - (C' - H\frac{\dot{C}}{F})^{\cdot} + \frac{\dot{C}}{F}(F' - H\frac{\dot{F}}{F}) = 0$$

$$(\frac{(L^2 - H^2)C^2}{FL})^{\cdot} + (\frac{C^2H}{L})' = 0$$

$$(\frac{C^2H}{L})^{\cdot} + (\frac{C^2F}{L})' = 2rFL.$$

C'est un système de 4 équations aux dérivées partielles à 4 fonctions inconnues de DEUX variables ; inutile de dire qu'il doit exister un espace énorme de solutions.

Justifications diverses de la jauge harmonique sur $\mathbb{R}^4$ de Minkowski.

1- Par analogie avec l'électromagnétisme ; Dans cette théorie la jauge de Lorentz est incontournable, par une présentation similaire de l'électromagnétisme et de la gravitation, la condition dite de "coordonnées harmoniques" est établie : écrite de manière covariante, c'est la jauge harmonique : $D_\mu(\sqrt{\frac{g}{\gamma}}g^{\mu\nu}) = 0$, cf. S. Weinberg [4] chap.7.4.

2- Le champ gravitationnel se propage à la vitesse de la lumière car la jauge harmonique préserve le d'Alembertien, cf. S. Weinberg chap. 10.1. ou V. Fock [5] par. 53.

3- Les lois de conservation peuvent s'écrire sous forme intégrale cf. V. Fock par. 49. Le tenseur impulsion-énergie est interprété cf. V. Fock par. 55.

4- Le formalisme P.P.N. (i.e. l'approximation post-newtonienne) qui seul peut permettre l'interprétation des résultats d'observation, nécessite la jauge harmonique cf. S. Weinberg chap. 9.4.

5- Si le champ gravitationnel est transporté par le graviton (supposé de masse nulle et de spin 2) alors toute métrique traduisant un champ gravitationnel vérifie la jauge harmonique. C'est un théorème sur les représentations du groupe de Poincaré. Plus précisément, si l'on considère la représentation du groupe de Poincaré, i.e. le groupe des invariants de l'espace de Minkowski, dans l'espace des deux-tenseurs symétriques elle contient des représentations de spin 2, 1 et 0 ; aussi si l'on veut un champ gravitationnel qui ne soit pas transporté par une particule de spin 1 (le photon), i.e. compatible avec l'électromagnétisme, il faut restreindre cette représentation au sous-espace des deux-tenseurs symétriques tels que cette représentation ne contienne pas la représentation de spin 1, ce qui impose des équations d'orthogonalité.

6- L'étude des ondes gravitationelles est toujours faite dans un système de coordonnées harmoniques ; la justification souvent donnée vaut son pesant de gratons (comme on dit à Lyon) : les calculs sont plus simples !

Faut-il encore d'autres justifications, d'autres références ? Que les présupposés soient clairs : il n'est pas question, lorsque nous prenons deux métriques, d'une quelconque théorie bimétrique de la gravitation, il est seulement question de la relativité générale, les deux métriques s'imposant, de fait, lorsque dans un univers on considère le champ gravitationnel en l'absence ou en la présence d'un corps ! Pour le lecteur qui aurait des doutes sur la non complétude de la relativité générale, même lorsque l'on utilise les conditions de Cauchy, nous le renvoyons au chapitre 7.5. de l'ouvrage de S. Weinberg ou au travaux de Fock. Je pense que les théories bimétriques n'auraient jamais vu le jour si la relativité générale avait été bien traitée.

Renversons les rôles et disons tout simplement que pour le problème du champ émis par une boule dans l'univers $\mathbb{R}^4$,

La gravitation newtonienne fournit une approximation à l'ordre 0,

la solution de Schwarzschild est une approximation à l'ordre 1,

la solution de Fock est une approximation à l'ordre 2,

le formalisme PPN fournit une approximation à l'ordre au moins 2 ...

des solutions de la relativité générale obtenues avec la jauge harmonique.

Jauge harmonique dans un modèle de De Sitter.

Soit donc la métrique de De Sitter, traduisant un univers en expansion depuis un événement big-bang ; dans le système de coordonnées comobile avec le fluide cosmique, elle s'écrit :

$$(7) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{sh^2\lambda t}{\lambda^2}(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2).$$

Les symboles $\neq 0$ de la connexion associée sont :
$\Gamma^0_{11} = \frac{sh\lambda t ch\lambda t}{\lambda}$, $\Gamma^0_{33} = \Gamma^0_{22} sin^2\theta = sin^2\theta sh^2\alpha \Gamma^0_{11}$,
$\Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22} sin^2\theta = sh\alpha ch\alpha sin^2\theta$, $\Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{30} = \lambda coth\lambda t$,
$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = coth\alpha, \Gamma^2_{33} = -sin\theta cos\theta$, $\Gamma^3_{23} = cotg\theta$.

Cherchons les métriques g de la forme de Robertson-Walker :

$$(8) \quad ds^2 = dt^2 - R^2(t)(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2),$$

solutions des équations de la jauge harmonique $D_\mu(\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g^{\mu\nu}) = 0$. On obtient aisément :

$$(9) \quad R^2(t) = \frac{sh^2\lambda t}{\lambda^2} + k;$$

lorsque $k > 0$, c'est un modèle éternel, du genre des modèles avec couplage non minimal, développés par M. Novello [6]. Ce modèle est asymptote au modèle de De Sitter, l'événement big-bang n'est plus ponctuel. Il apparaît ici une différence avec le modèle de Minkowski, la jauge ne permettant pas de trouver d'autres modèles. Cependant si l'on considère le cône du futur d'un point dans l'espace $\mathbb{R}^4$ (dans le système de coordonnées de Milne), on obtient le même genre de résultat : $R^2(t) = t^2 + k$.

Pour ce qui est de l'étude d'un problème local comme par exemple celui du champ émis par une boule dans un univers de De Sitter, il est plus facile d'utiliser comme forme annexe de la métrique (7), celle qui est formellement statique : $ds^2 = (1 - \lambda^2 r^2)dt^2 - (1 - \lambda^2 r^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\omega^2$, et de transporter la jauge (par covariance). Cf. chapitre 8, annexe 2.

Si l'univers est celui de Minkowski, la jauge qui s'impose pour étudier un problème local est la jauge harmonique. En est-il de même si l'univers est celui de De Sitter ? La question est ouverte, bien que plusieurs résultats semblent d'ores et déjà pousser vers une réponse positive. La justification 3 est valable du fait du groupe d'invariants de dimension 10, cf. Fock [5] par.49 ; les justifications 1, 2 et 6 sont valables pour tout modèle d'univers et la justification 4 n'a aucun sens pour un univers en expansion ; Il reste la justification 5, qui sera valable dès l'établissement d'un théorème d'analyse harmonique sur le groupe de De Sitter, analogue à celui établi pour le groupe de Poincaré. Mais pour l'établir il faudra prendre en compte trois faits : a) les représentations irréductibles du groupe de Poincaré se restreignent en représentations du semi-groupe de Lie de causalité de Poincaré en restant irréductibles ; b) le formalisme hilbertien de la mécanique quantique s'établit très facilement en terme de représentations projectives hilbertiennes isométriques du semi-groupe de causalité ; c) Dans la contraction de l'algèbre de Lie de De Sitter vers l'algèbre de Lie de Poincaré, le groupe ne s'envoie pas sur le groupe de Poincaré, ni les représentations unitaires qui éclatent, mais le semi-groupe de causalité de De Sitter est envoyé sur celui de Poincaré et les représentations hilbertiennes isométriques du semi-groupe de De Sitter se contractent bien vers celles du semi-groupe de Poincaré (cf. Mizony [7]).

Il est important d'asseoir la validité de la jauge harmonique pour l'univers de De Sitter, car des conséquences importantes du point de vue astronomique peuvent en découler. Par exemple reprenons le problème du l'astre sphérique tel qu'il est traité au chapitre 6, mais dans un univers de De Sitter. Supposons que cette boule soit un nuage sphérique homogène de particules d'une densité donnée (nuage protostellaire ou protogalactique), existe-t-il également une dimension maximum, comme il en existe une dans l'univers vide ? Dans l'univers vide, en application de la jauge harmonique, un nuage de densité de l'ordre de 400 atomes/cm^3 admet un rayon maximal de l'ordre de 0,8Mpc et une masse maximale de l'ordre de $6.10^{18}M_\odot$. Si l'on prend en compte la dynamique étudiée au chapitre 8 (rayon d'attraction), c'est un ensemble de tests possibles du modèle de De Sitter et de la jauge harmonique qui s'ouvre, par l'étude des nuages protostellaires et protogalactiques.

Nous pouvons poser la définition suivante :

Définition : Soit (V, γ) un modèle d'univers et g une métrique sur V. Nous appellerons jauge de Lorentz (en référence au fait que le champ gravitationnel est transmis à la vitesse de la lumière), ou équations d'orthogonalité (en référence au fait que le champ gravitationnel est transmis par une particule de masse nulle et d'hélicité 2), cette équation (3) écrite de manière covariante : $D_\mu(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}g^{\mu\nu}) = 0$ où D_μ est la dérivation covariante par rapport à la métrique d'univers γ.

Equivalence théorique entre la gravitation newtonienne et la gravitation einsteinienne.

Pour bâtir dans le cadre de la relativité générale un modèle gravitationnel local rendant compte du mouvement des corps célestes dans une petite partie de l'univers il faut se donner *a priori* un modèle cosmologique décrivant l'univers et qui fournira des conditions à l'infini assurant que le problème a une solution unique. Nous nous limiterons au cas où le modèle d'univers est homogène et isotrope, ce qui est le choix usuel. Le calcul est ensuite mené en supposant que le mouvement du système local étudié n'a pas d'influence sur l'univers. Sans cette hypothèse, légitimée par le fait que l'hypothèse d'homogénéité peut être considérée comme résultant d'une intégration des systèmes locaux, on ne sait pas résoudre le problème.

On utilise en fait deux métriques : celle du modèle cosmologique, donnée *a priori*, et celle, inconnue, rendant compte du système gravitationnel étudié.

- La première métrique est solution d'un système d'équations obtenu par simplification des équations d'Einstein grâce aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.

- La deuxième métrique sera solution d'un autre système d'équations obtenu par simplification des équations d'Einstein provenant cette fois-ci d'hypothèses de symétrie propres au système gravitationnel que l'on étudie. Ce deuxième système est plus complexe que le premier.

La première métrique permet la description de ce que seraient les trajectoires des rayons lumineux en l'absence du système local étudié, cette référence est indispensable pour pouvoir confronter les résultats du calcul aux observations.

Par exemple, dans un modèle cosmologique d'univers vide et plat (métrique de Minkowski), on considère le soleil comme une sphère homogène et on calcule le champ gravitationnel à l'extérieur de cette sphère. Le modèle gravitationnel ainsi calculé rend compte, au premier ordre, des observations relatives au système solaire (ce calcul au premier ordre revient en fait à calculer directement avec la métrique de Schwarzschild), ce qui montre sa fonctionnalité, malgré le caractère radical des hypothèses de symétrie faites ici.

Nous avons déjà vu, au chapitre 6 en particulier, que les conditions aux limites imposées par le modèle cosmologique n'assurent pas l'unicité des solutions des équations décrivant le système gravitationnel étudié. Ce fait était déjà connu d'Einstein (cf. Stachel []). Cependant, les différences entre ces solutions se traduisent par des termes négligeables par rapport à la précision actuelle des observations, situation toutefois provisoire vu l'accroissement rapide de cette précision.

Sur le formalisme post-newtonien (PPN formalism).

Prenons par exemple le cas du système solaire : lorsqu'on s'est préoccupé de confronter la relativité générale aux observations réalisables à cette échelle, on s'est trouvé devant la nécessité de calculer la trajectoire d'un photon au voisinage du soleil ou celle d'une planète comme Mercure. Or dans les deux cas, on ne connaît que des solutions approchées dont le calcul a abouti à dégager peu à peu ce qui est appelé maintenant le formalisme post-newtonien (parametrized postnewtonian formalism, Fock, Weinberg, Will, Damour) lequel s'introduit de deux manières équivalentes :

- lorsqu'on recherche, dans le cadre de la relativité générale, une solution approchée des équations d'Einstein, il est classique que, à l'ordre zéro, on retrouve la théorie de Newton usuelle, mais un développement à l'ordre un apporte des termes correctifs qui permettent de confronter le modèle aux observations usuelles dans le système solaire (déviation des rayons lumineux au voisinage du soleil, avance du périhélie de Mercure, retard dans le retour des signaux électromagnétiques réfléchis sur les planètes ou les satellites artificiels) et de vérifier à cet ordre là la relativité générale. Le formalisme post-newtonien apparaît ici comme le moyen de dégager, à partir d'une technique de résolution approchée purement mathématique, des paramètres confrontables aux observations. Le caractère inévitable de ce formalisme est bien souligné par G.F.R. Ellis et D.R. Matravers [6].

- *a posteriori*, il apparaît que les solutions approchées ainsi trouvées peuvent être calculées directement dans un cadre post-newtonien, au sens où l'on considère les modifications relativistes de la théorie de Newton, modifications liées à la finitude de la vitesse limite; par exemple en considérant les corps célestes comme des corps non ponctuels constitués d'un fluide parfait auquel on applique les lois de l'hydrodynamique relativiste et en faisant l'hypothèse que les variations de la force gravitationelle dues à la déformation de ces corps se transmettent à la vitesse de la lumière (cf Will et Weinberg ch. 10). Dans la mesure où cela signifie que l'on prend l'espace-temps de Minkowski comme espace sous-jacent, nous appellerons newton-lorentzienne cette approche pour ne pas la confondre avec le formalisme post-newtonien. Une résolution approchée au même ordre un des équations ainsi obtenues donne exactement les mêmes solutions que dans le cas précédent.

Faisons explicitement la résolution approchée des équations d'Einstein à l'ordre deux. A cet ordre, on obtient une infinité de solutions; pour obtenir une solution unique sous des conditions aux limites raisonnables, on ajoute implicitement ou explicitement dans le modèle mathématique la "jauge harmonique" (ou système de coordonnées harmoniques). La solution unique ainsi obtenue coïncide encore avec l'unique solution approchée au même ordre deux des équations obtenues dans le cadre newton-lorentzien. Nous avons ainsi le théorème (cf. Weinberg ch. 9.4 ou Will ch. 4) :
Théorème : Les développements limités à l'ordre 2 des solutions obtenues dans le cadre de la relativité générale avec la jauge harmonique sont les mêmes que ceux obtenus dans le cadre newton-lorentzien.

Plus précisément, considérons les développements limités à l'ordre 2, 3 ou 4 en fonction de l'inverse de la vitesse de la lumière de la connexion Γ, de la métrique g, du tenseur impulsion-énergie T, des équations des géodésiques etc... Alors le théorème obtenu est le suivant :

i) Tous les coefficients de ces développements limités s'expriment en fonction de quantités obtenues à partir de potentiels newtoniens construits à partir des coefficients du développement limité du tenseur T; ce sont les potentiels post-newtoniens.

ii) Les équations du mouvement d'une particule d'épreuve, calculées par la mécanique newtonienne (et l'hydrodynamique relativiste), sont identiques, à l'ordre 2, à celles obtenues par la relativité générale, à condition d'adjoindre aux équations d'Einstein une jauge, la jauge harmonique .
Ici encore les deux modèles prédisent les mêmes observations, il est donc hors de question de les départager ainsi.

Résultat : équivalence observationelle des deux théories aujourd'hui.

Ce résultat découle du fait que la précision observationellement possible aujourd'hui ne dépasse pas, et de loin, l'approximation post-newtonienne à l'ordre 2.

Supposons maintenant, la précision des observations allant en s'améliorant, que nous ayons besoin d'un formalisme post-newtonien à l'ordre 3, 4, $...n$.
On introduit naturellement de nouveaux potentiels post-newtoniens, et on obtient l'approximation de la théorie de Newton-Lorentz de la gravitation aux ordres 3, 4, $...n, ...$, avec comme espace-temps sous-jacent toujours le même espace plat de Minkowski. on pourra alors toujours trouver une jauge J_n telle que si l'on complète la relativité générale au moyen de cette jauge, cette théorie Einsteinienne de la gravitation va coïncider, à la

précision n requise, avec la théorie de Newton-Lorentz. Il est important de rappeler qu'il existe autant de théories de la gravitation que de jauges, dans le cadre de la relativité générale.
Le problème est alors le suivant : est-ce que la jauge harmonique va rester valable ? autrement dit la jauge harmonique et la jauge J_n vont elles coïncider à l'ordre n ? Elles coïncident à l'ordre 2 en vertu du théorème ci-dessus.
Comme par construction les jauges J_{n+k} et J_n sont les mêmes à l'ordre n, nous pouvons définir une jauge abstraite à partir de ces jauges J_n. En tenant compte du fait que chacune des jauges est un ensemble d'équations et que toute équation peut toujours être écrite de manière covariante par rapport à la métrique d'univers choisie, on peut supposer de plus cette covariance pour ces jauges.

Définition de la jauge post-newtonienne : C'est la jauge que nous noterons JP, définie comme la limite inductive des jauges J_n, pour $n \geq 2$.

Nous avons évidemment tout fait pour obtenir le

Théorème : Il existe une jauge (la jauge JP), telle que la relativité générale complétée par cette jauge soit mathématiquement équivalente à la théorie de Newton de la gravitation tenant compte de la finitude de la vitesse de la lumière.

Le problème de savoir si la coïncidence à l'ordre deux de la jauge harmonique avec la jauge abstraite JP se poursuit à des ordres supérieurs, voire à tous les ordres, est ouvert. Ce problème semble ardu. Il est tentant de conjecturer que la jauge abstraite qui assure cette équivalence n'est autre que la jauge harmonique qui a elle un sens physique précis puisqu'elle exprime que le graviton est de spin 2. Il faudrait montrer :
Conjecture : la jauge harmonique est la jauge post-newtonienne.
Cette conjecture est sans doute un peu forte ; il me semble que le bon résultat sera du genre : les équations de la jauge post-newtonienne comprennent celles de la jauge harmonique plus d'autres équations dont il faudra comprendre la signification.

Résultat : Nous avons ainsi deux modélisations mathématiquement équivalentes (donc observationellement indiscernables) et conceptuellement différentes de la gravitation : l'espace-temps est l'espace plat de Minkowski dans l'une (la théorie de Newton-Lorentz), il est courbe dans l'autre (la théorie de la relativité générale complétée avec la jauge post-newtonienne).

Remarque 1 : L'équivalence mathématique des deux théories ne doit pas masquer les différences qualitatives qu'on peut formuler comme suit : la théorie einsteinienne s'attache à trouver une métrique telle que les corps en chute libre suivent les géodésiques de cette métrique, tandis que la théorie de Newton-Lorentz, partant des géodésiques de l'espace-temps plat de Minkowski, s'attache à considérer les trajectoires des corps en chute libre comme déformations de ces géodésiques dues aux potentiels newtoniens et post-newtoniens.

Remarque 2 : Il existe une théorie de la gravitation dans laquelle l'espace-temps est plat et identifié à R^4, strictement équivalente à la relativité générale (Deser, 1970). Elle est restée relativement négligée sans doute du fait que, contrairement à la théorie lorentzienne, elle n'intervient pas dans la confrontation de la relativité générale aux observations. Ce modèle, signalé par Weinberg (ch. 7.6) est bien présenté par Lévy-Leblond (1979).

Remarque 3 : Le formalisme post-newtonien a été introduit en vue de confronter la relativité générale aux observations. En effet, du point de vue mathématique, la relativité générale se traduit par les équations d'Einstein, qu'on ne sait résoudre qu'exceptionnellement, en supposant que les solutions vérifient suffisamment de symétries. Mais, dans la plupart des cas, on sait calculer des solutions approchées à l'ordre 1, 2 ou parfois 3, à condition de se placer dans certains systèmes de coordonnées dans lesquels ces solutions approchées, qui sont appelées postnewtoniennes, produisent des résultats s'exprimant en termes de grandeurs physiques classiques. Il est bien connu, quoique rarement explicité, que ce sont les résultats de ces calculs qui sont confrontés aux observations et qui valident la relativité générale.

On peut aussi étudier les modifications relativistes à la théorie de Newton, autrement dit mener une résolution approchée dans le cadre newton-lorentzien qui produit en fait les mêmes résultats que le formalisme postnewtonien. Du fait qu'elles conduisent aux mêmes résultats aux ordres d'approximation actuellement calculés, ces deux démarches sont souvent confondues. Au total, on ne mesure jamais que des grandeurs qui relèvent de la physique classique.

Remarque 4 : La question de savoir si les propriétés de courbure de l'espace-temps, voire la notion d'espace-temps, ont une signification physique, doit alors être posée.
L'équivalence mathématique des deux théories remet en cause le statut d'affirmations comme "la matière courbe l'espace-temps" énoncées dans un langage qui pourrait laisser croire qu'il s'agit d'un fait empirique alors qu'il s'agit d'une affirmation théorique dans le cadre de la relativité générale, qui n'est susceptible d'aucune vérification expérimentale. Il en est de même plus généralement de toute déclaration sur l'espace-temps. Toutefois, dans l'espace-temps de Newton-Lorentz, on pourrait dire que la matière courbe les géodésiques de la métrique de Minkowski et cette affirmation sur le mouvement peut être confrontée à l'observation. On peut considérer que les deux théories de Newton-Lorentz et d'Einstein (complétée) sont, non pas deux théories de l'espace-temps, mais deux théories du mouvement utilisant comme cadre de description des espace-temps mathématiquement différents.

Un exemple de mécanique qui pose question
L'oscillateur et la jauge harmonique

Sur la problématique de l'oscillateur harmonique (pendule simple ou ressort). Plaçons-nous dans le contexte d'un des plus simples des systèmes mécaniques : celui du système masse-ressort idéal, à petites oscillations, soumis à une force extérieure F(t). L'équation du mouvement de la masse est traditionnellement écrit sous la forme $\ddot{x} + Kx - F(t) = 0$, ou K est une constante associée au ressort. Expérimentalement les mécaniciens se sont vite aperçus qu'il existait un terme complémentaire en x , appelé force de " frottement " plus précisément force de dissipation, du fait qu'il est proportionnel à la vitesse, et ce bien qu'il n'existe aucune source de frottement. On a donc l'équation $\ddot{x} + \alpha\sqrt{K}\dot{x} + Kx - F(t) = 0$, où α est bien mesuré. Mais des expériences plus fines, lors d'études sur l'amortissement en régime transitoire rapide, montrent qu'il faut remplacer ce coefficient $\alpha\sqrt{K}$ par une fonction $\gamma(t) = \alpha\sqrt{K}+\beta t+...$; et le coefficient β commence à être bien mesuré. Le problème est donc le suivant : Soit $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx - F(t) = 0$ cette équation du mouvement, comment obtenir théoriquement cette fonction γ. Question ouverte, mais importante. En effet, il est une expérience que l'on fait souvent, celle de constater que la plupart des pannes mécaniques interviennent pendant la mise en route ou lors de l'arrêt d'un système. Peut-on limiter les sources de ces pannes qui proviennent lors d'un changement de régime brutal (changement de régime modélisé par notre force extérieure $F(t)$, par exemple de la forme $Asin(w(t))$). Il semble important de connaître γ en fonction de F, pour mieux comprendre certaines causes de pannes. En régime normal, on sait qu'il suffit d'éviter des plages de résonances, mais le problème reste incompris en régime transitoire (démarrage, arrêt, ou ... panne secondaire qui perturbe soudainement le régime normal). De fait avec des collègues de l'INSA de Lyon (Ahmad Al Majid et Régis Dufour) nous avons cette année trouver un premier résultat, i.e. la piste de modélisation qui semble bonne à l'épreuve des expérimentations ; cette piste est basée sur le fait que le temps propre de la pièce mobile n'est pas forcément celui des pièces fixes (autrement dit celui du laboratoire), ce qui oblige à utiliser toute la théorie tensorielle de la relativité générale. Même si les vitesses en jeu ne sont pas relativistes, il se trouve que les phénomènes vibratoires liés à des régimes transitoires rapides nécessitent de recourir au temps propre. C'est ce que viennent de montrer Ahmad Al Majid et Régis Dufour du laboratoire de Mécanique des Structures, UMR CNRS 5006 de l'INSA de Lyon cf. [8] et [9], qui ont mis en évidence l'existence d'un temps propre de la pièce mobile.

Remarque : bien des problèmes que l'on croit bien modélisés ne le sont pas.

En examinant les résultats expérimentaux, Ahmad est parti de l'idée simple qui consiste à se poser la question de savoir si le temps propre d'une pièce en mouvement était bien le même que celui de l'observateur fixe (expérimentateur). Aussi a-t-il introduit un tenseur métrique et trouvé des solutions telles que l'une des équations des géodésiques avait la forme théorique voulue. Une des solutions était même assez bonne du point de vue expérimental. Mais cette solution a un gros inconvénient, celui de paraître une solution ad hoc. Un traitement systématique s'imposait donc.

Sur le calcul tensoriel. L'on sait que pour assurer l'unicité de solution pour un problème de gravitation, dans le cadre de la relativité générale, il faut une jauge, nous utiliserons la jauge harmonique sans d'autre justification que celle consistant à dire qu'elle permet de bien poser des problèmes et peut-être que le mouvement d'un front d'onde s'écrit très simplement, il n'y a pas encore à ce jour de véritables vérifications de cette jauge. A l'aide de la puissance des ordinateurs et de logiciels de Calcul Formel (Maple), nous avons dans un premier temps cherché toutes les 2-métriques $g = \begin{bmatrix} \tau(t,x) & f(t,x) \\ f(t,x) & -h(t,x) \end{bmatrix}$ telles que l'une des équations des géodésiques soit de la forme voulue. Evidemment il y a beaucoup, énormément de solutions. Puis nous avons cherché celles qui de plus vérifient les équations de la jauge harmonique. Le résultat est là, qui résiste à l'expérimentation.

Formulation tensorielle

Voici les résultats de calcul tensoriel (obtenus avec le logiciel Maple) dont nous aurons besoin.
Soit (t,x), l'espace-temps de l'observateur qui regarde les oscillations du système. Pour cet observateur la métrique est la métrique canonique grr de Lorentz. Soit g la métrique associée à la masse qui oscille. Prenons son écriture dans la carte associée à l'observateur ; elle est de la forme $\begin{bmatrix} \tau(t,x) & f(t,x) \\ f(t,x) & -h(t,x) \end{bmatrix}$. Mais pour obtenir des équations "simples", il est pratique de la prendre sous la forme $g(t,x) = h(t,x) \begin{bmatrix} \tau(t,x) & 1/2\, f(t,x) \\ 1/2\, f(t,x) & -1 \end{bmatrix}$, avec pour conditions initiales au point $(0,0)$: $g(0,0) = grr(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, (absence de force extérieure F). Pour une 2-métrique le tenseur d'Einstein est toujours identiquement nul, ce qui correspond au cadre expérimental (les forces de gravitation s'exercant sur la pièce mobile sont négligeables).

Une des équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{h'}{h}\dot{x}^2 + \frac{\dot{h}}{h}\dot{x} + \frac{1}{2}\tau\frac{h'}{h} - \frac{1}{2}f\frac{\dot{h}}{h} = 0 \qquad (1)$$

l'autre équation, étant l'intégrale première du mouvement, est donnée par la métrique :

$$h(\tau + f\dot{x} - \dot{x}^2) = 1 \ .$$

Ecrivons maintenant les deux équations provenant de la jauge harmonique écrites de manière grr-covariante : elles s'obtiennent en calculant : $D_\mu(\sqrt{\frac{g}{grr}}g^{\mu\nu}) = 0$ où D_μ est la dérivation covariante par rapport à la métrique plate grr.

Lemme 1 : Les équations provenant de la jauge harmonique sont :

$$\{\ \dot{\tau} = f'\tau - f\dot{f},\ \ \tau' = \dot{f}\ \}\ .$$

D'après ce lemme 1, pour $u(t,x)$ telle que $\dot{u} = \tau$ et $u' = f$, alors la métrique g s'écrit :
théorème 1 :

$$g(t,x) = h(t,x) \begin{bmatrix} \dot{u}(t,x) & 1/2\, u'(t,x) \\ 1/2\, u'(t,x) & -1 \end{bmatrix}$$

et vérifie la jauge harmonique si et seulement si u est solution de l'équation :

$$(*) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)\right)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right)\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}u(t,x) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation pour déterminer $f(t,x) = u'(t,x)$ (et par suite τ).
Pour cela, posons $f(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t)x^i$. Alors l'équation (*) se réduit au système d'équations (linéaires et du premier ordre en $f_i(t)$) : pour $i > 0$,

$$(**) \qquad \left(\frac{d}{dt}f_i(t)\right) f_0(t) + f_i(t)\frac{d}{dt}f_0(t) + \frac{\frac{d^2}{dt^2}f_{i-1}(t)}{i} + \sum_{j=1}^{i-1} f_j(t)\frac{d}{dt}f_{i-j}(t) = 0.$$

Ce système s'intègre et on a
Lemme 2 : pour $i > 0$ impair :

$$f_i(t) = \frac{1}{f_0(t)}\left(C_i - \frac{1}{i}\frac{d}{dt}f_{i-1}(t) - \sum_{j=1}^{i-1} f_j(t)f_{i-j}(t)\right) \ ,$$

et pour $i > 0$ pair :

$$f_i(t) = \frac{1}{f_0(t)}\left(C_i - \frac{1}{i}\frac{d}{dt}f_{i-1}(t) - \frac{1}{2}f_{i/2}^2(t) - \sum_{j=1, j\neq i/2}^{i-1} f_j(t)f_{i-j}(t)\right) \ .$$

Formulation Lagrangienne

Il est évidemment tentant de poser tout de suite $h' = 0$ et $-\frac{1}{2}f\frac{\dot{h}}{h} = Kx - F(t)$; et de fait dans le processus de résolution du problème, c'est bien ce que nous avons fait, avant de mettre en évidence les résultats ci-dessus. Mais restons dans un cadre général, en examinant la formulation Lagrangienne du problème.
Le Lagrangien classique est

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)$$

et pour tenir compte du temps propre, nous avons introduit un facteur conforme en prenant :

$$L = e^{\nu(t,x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x))$$

dont l'équation du mouvement, donné par $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x}$, s'écrit

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}\nu'\dot{x}^2 + \dot{\nu}\dot{x} + Kx - F(t) \ + \nu'(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x) \qquad (2)$$

Cette équation (2) ressemble beaucoup à l'équation (1) obtenue dans le cadre tensoriel, en remplaçant K par K/m, F par F/m et en posant

$$e^{\nu(t,x)} = h(t,x).$$

Mais dans ce cadre Lagrangien, comment trouver ce facteur conforme ? Il manque des équations. Le cadre tensoriel en fournit, mais ces équations sont difficiles à obtenir (même avec l'aide de la puissance du calcul formel). Et si il y a deux dimensions d'espace au lieu d'une, je ne sais pas faire grand chose.

En résumé, le cadre Lagrangien nous donne rapidement l'équation fondamentale du mouvement et le cadre de la relativité générale les équations supplémentaires nécessaires, à partir des équations de la jauge harmonique.

Résultats pour l'oscillateur harmonique

Revenons dans la situation de l'expérimentation faite ; les vitesses ($\dot{x}$) sont très petites, aussi nous allons négliger les termes en $\dot{x}^2$ dans les équations (1) et (2) tout simplement en prenant $h' = \nu' = 0$ et en posant $\gamma(t) = \dot{\nu} = \frac{\dot{h}}{h}$.
L'équation du mouvement se réduit à

$$\ddot{x} + \gamma(t)\dot{x} + Kx - F(t) = 0 \ ,$$

avec

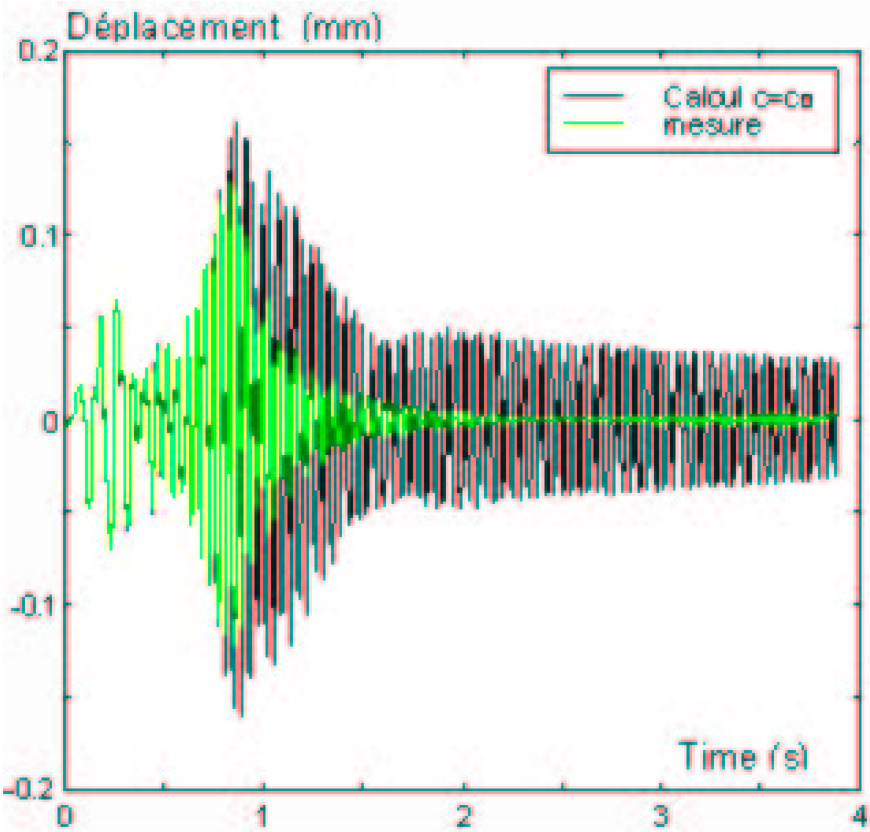
$$-\frac{1}{2}f(t, x(t) \ \frac{\dot{h}}{h} = Kx(t) - F(t)$$

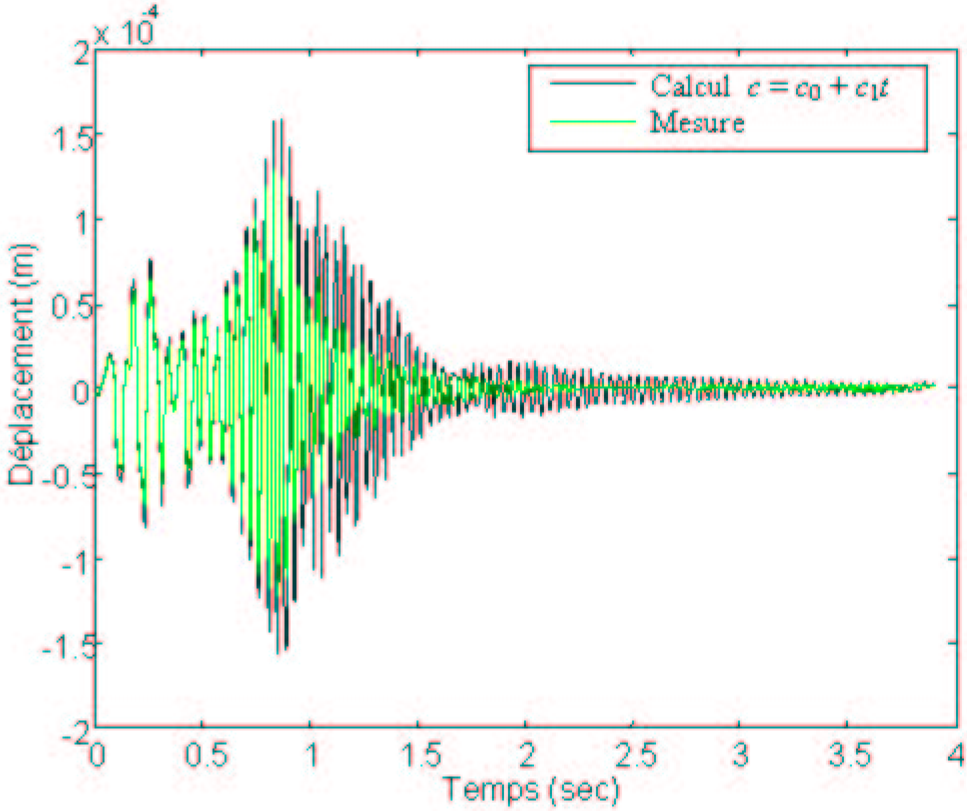
pour la solution $t \to x(t)$ de l'équation du mouvement vérifiant les conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Nous allons aussi tenir compte des conditions aux limites en particulier celle qui stipule que si la force F(t) est périodique ($F(t) = A \ sin(\omega t)$) alors l'équation du mouvement se réduit à $\ddot{x} + \alpha \ sqrt(K)\dot{x} + Kx - F(t) = 0$.
Il reste donc à calculer $\gamma(t)$ en fonction de K, $F(t)$, en utilisant la jauge harmonique, i.e. le lemme 2.
Corollaire :
Sous l'hypothèse de la jauge harmonique, l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur harmonique contient un terme d'amortissement (ou de dissipation) dont le coefficient $\gamma(t)$ admet le développement limité à l'ordre 4 suivant lorsque $F(0) = 0$ et $\dot{F}(0) \neq 0$:

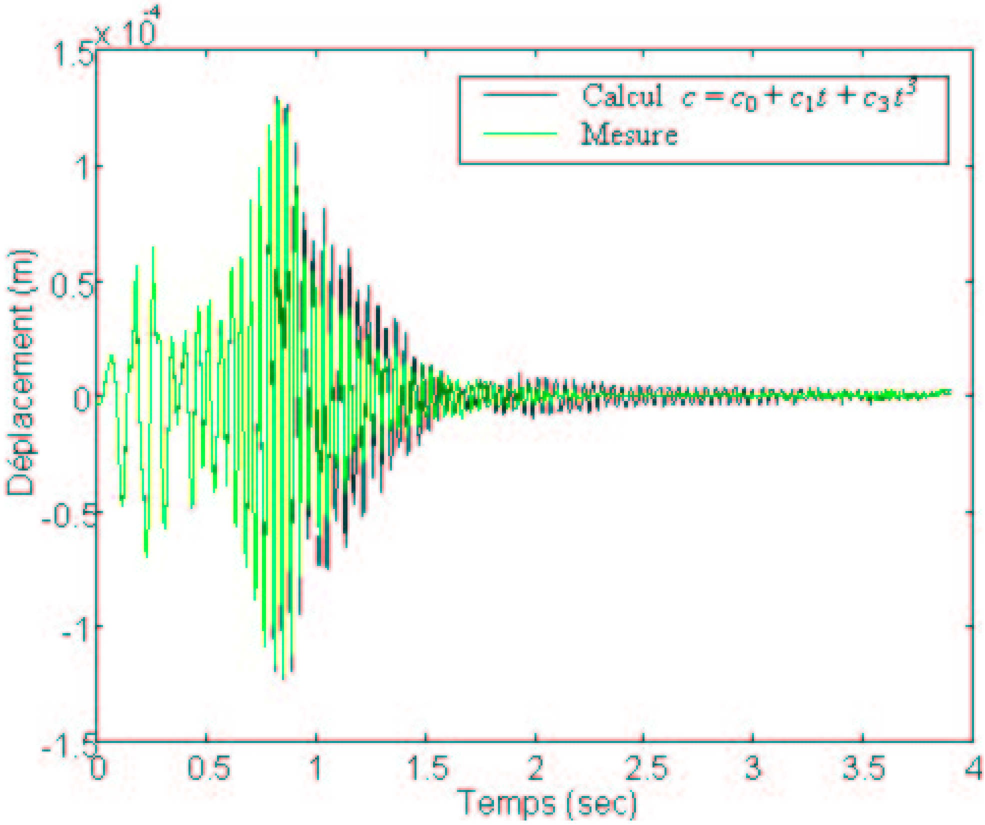
$$\gamma(t) = \alpha\sqrt{K}(1 + \frac{t}{2}\frac{\ddot{F}(0)}{\dot{F}(0)} + \frac{t^3}{24}\frac{\ddddot{F}(0)\dot{F}(0) - 2\dddot{F}(0)\ddot{F}(0) + \ddot{F}(0)\dot{F}(0)}{\dot{F}(0)^2} + ...)$$

La preuve ne pose pas de difficultés, mais pour les calculs pénibles il est intéressant de recourir à un logiciel de calcul formel.

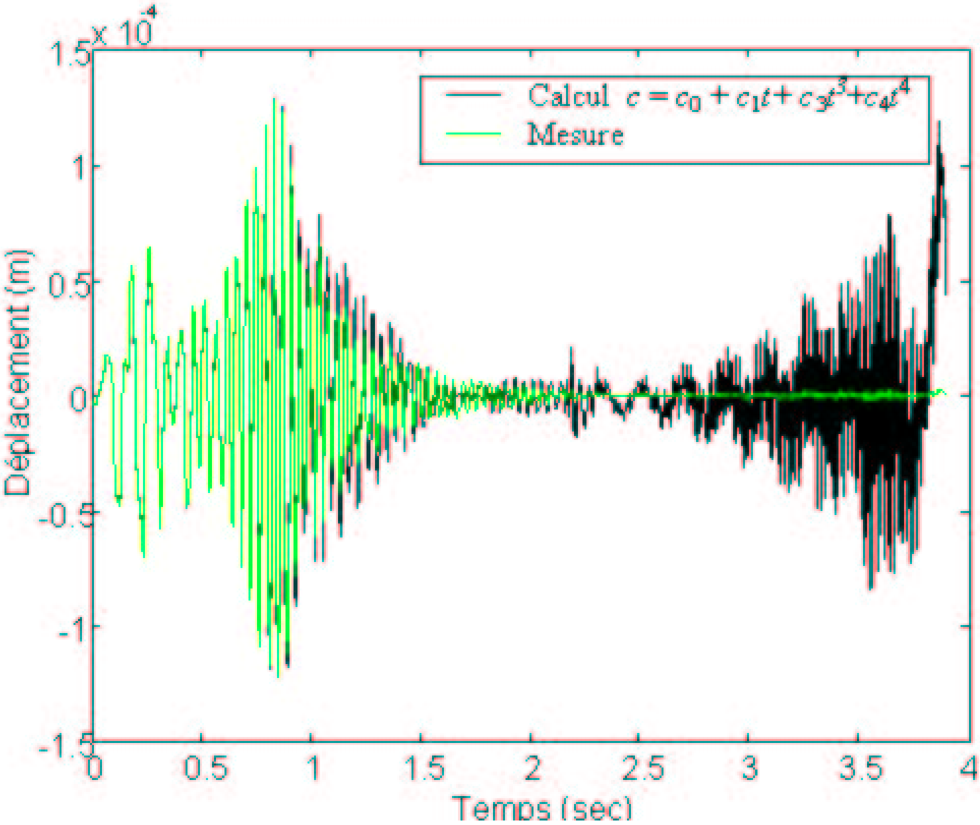
Voici ce que donne la confrontation à l'expérimentation (réalisée par A. Al Majid à l'INSA de Lyon).
Pour les figures $\gamma(t)$ est noté $c(t) = co + c1 * t + c3 * t^3 + c4 * t^4$.


Déplacement (mm)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
1
2
3
4
Time (s)
Calcul c=c
mesure


x 10^-4
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Déplacement (m)
Calcul $c = c_0 + c_1 t$
Mesure
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Temps (sec)



Il est manifeste que l'adéquation entre la courbe expérimentale et la courbe théorique augmente avec l'ordre du développement limité. A l'ordre suivant cette adéquation est encore meilleure dans un premier temps, puis se manifeste sans doute un problème d'instabilité dans la résolution numérique.



Remarques en vrac

1- Au niveau de la confirmation expérimentale, les premiers résultats sont probants, mais ils restent à les conforter. La question de la compréhension de ce coefficient de dissipation γ à travers le concept de temps propre reste à approfondir. De fait, dans le cadre d'un régime transitoire rapide, l'amortissement peut être modélisé comme phénomène métrique.

2- Il reste à comprendre pourquoi la jauge harmonique est essentielle pour de simples problèmes de mécanique. Est-ce lié au fait que la force extérieure se transmet à la vitesse de la lumière, ou plus profondément à une invariance du mouvement de tout "front d'onde" dans la terminologie de Vladimir Fock [5] ?

3- On sait que le groupe de Poincaré est fondamental au niveau de la relativité restreinte et générale, ainsi qu'au niveau de la mécanique quantique, pourquoi ne jouerait-il pas un rôle à l'échelle intermédiaire de la mécanique usuelle ? En fait la jauge harmonique possède un rapport étroit avec ce groupe de Poincaré.

4- Relativisons. Ceci n'est évidemment qu'un début, et pour plusieurs raisons : la constante K n'est constante qu'à une première approximation ; les mouvements de l'oscillateur sont supposés petits ; nous avons regardé un problème à une seule dimension spatiale ; enfin nous avons supposé que le coefficient de dissipation γ ne dépend que de t (en négligeant l'aspect relativiste des vitesses).

5- Au risque de me répéter, sans la puissance de calcul des ordinateurs, et celle du logiciel "Maple", je n'aurais pas pu trouver que la forme à adopter pour le tenseur métrique soit :$g(t,x) = \begin{bmatrix} \tau(t,x)h(t,x) & 1/2\, f(t,x)h(t,x) \\ 1/2\, f(t,x)h(t,x) & -h(t,x) \end{bmatrix}$.

6- Une certitude : pour espérer traiter de manière similaire l'étude de phénomènes vibratoires dans le plan ou l'espace, on ne peut pas faire l'économie de la traduction de la jauge harmonique dans le cadre Lagrangien.

7- Une deuxième certitude : l'oscillateur harmonique nous fournit un test d'un aspect de la relativité générale (celui de la pertinence de la jauge harmonique), un test en laboratoire sur terre, de plus extrêmement peu coûteux financièrement, et renouvelant le problème de l'étude de la limite entre mécanique classique et mécanique relativiste.

En guise de conclusion Il reste beaucoup de travail pour mieux comprendre cette jauge harmonique qui nous a permis

- d'une part deux modélisations différentes de la gravitation dont les conséquences épistémologiques seront examinées au chapitre suivant et
- de mettre en évidence que la distinction entre mécanique classique et mécanique relativiste est plus subtile que l'on croit.

"La relativité générale est une synthèse entre la gravitation newtonienne et la relativité restreinte."
J.P. Luminet
dans "Le Temps et sa Flèche" (cf. [11], p.71).

Bibliographie.

[1] K. LANCZOS : Ein vereinfacendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen ; Phys. Zeitschrift, 23, (1922).

[2] T. DE DONDER : La gravifique Einsteinienne ; Gauthier-Villars, Paris (1921).

[3] A. LOGUNOV, Y. LOSKUTOV et M.A. Mestvirishvili : Relativistic theory of gravity ; Moscow university press (1988).

[4] S. Weinberg : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York (1972).

[5] V. Fock : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1964).

[6] M. Novello : Vth Brazilian School of cosmology ; World Scient. publ. Co (1988).

[7] M. Mizony : Analyse harmonique hyperbolique ... ; Publ. Dép. Math. Lyon 2/P (1982), p.1, Publ. Dep. Math. Lyon 3/B, 1 (1982) et 3, 47 (1984).

[8] A. Al Majid et R. Dufour : An Event Dimension for Modeling Damping Due to Time-Varying Forcing Frequency ; in Nonlinear Dynamics, Kluwer Academic Publishers, (2000).

[9] A. Al Majid et R. Dufour : Modelling damping effect due to high transient motion using the Riemannian space ; ASME, Pittsburg (Pennsylvanie), (2001).

[10] M. Mizony et G. Arsac "Que peut nous apprendre la gravitation sur l'espace-temps ?" preprint de l'Institut Girard Desargues (UCBL), no 12, (1998).

[11] E. KLEIN et M. SPIRO : Le Temps et sa Flèche ; Ed. Frontières (1994).

J.-J. STACHEL : "Einstein's search for general covariance, 1912-1915" ; pp 63-100, in Einstein and the history of general relativity, North Andower, MA, (1986).

T. DAMOUR : Testing gravity to second post-Newtonian order : a field theory approach ; Phys. Rev. D(3) Vol 53 n^o 10 (1996).

S. DESER : Self-Interaction and Gauge Invariance ; General Relativity and Gravitation Vol 1, n^{o}1 pp.9-18 (1970).
J.-M. LEVY-LEBLOND : The Importance of Being (a) Constant ; in Problems in the foundations of Physics, pp. 237-263, Soc. Italiana di Fisica, Bologna (1979).
[6] G.F.R. ELLIS et D.R. MATRAVERS : General Covariance in General Relativity ; G.R.G. vol 27, no 7, (1995).
[9] L. KRAUSS and M. TURNER : The Cosmological Constant is back. G.R.G. Vol 27, no 11, (1995).
[4] C. WILL : Theory and experiments in gravitational physics. Cambridge university press, London (1981).