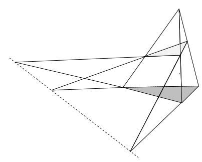
Chapitre 5

Les équations du mouvement associées à une métrique à symétrie sphérique.

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1



Introduction

L'ambiguïté de la relativité générale est très rarement mise en évidence dans les ouvrages sur la gravitation. Si cependant l'ambiguïté sur la métrique solution d'un problème est signalée et démontrée par certains auteurs (cf. S. Weinberg [1] sections 7.4 et 7.5, ou encore par S. Hawking et G. Ellis [2], chapitre 7) qui montrent qu'il faut une jauge pour lever l'ambiguïté de la métrique, il est très rare de voir une étude de l'ambiguïté de la relativité générale du point de vue des géodésiques suivies par les corps en chute libre (corps d'épreuve) ; voir cependant Logunov et autres [3]. Il y a une croyance disant que peu importe la métrique solution (peu importe la jauge), les géodésiques sont les mêmes ! Nous allons montrer que cette croyance est fausse, bien que fondée sur le concept de covariance, car elle s'appuie sur l'ambiguïté de l'expression "les géodésiques sont les mêmes", expression traduisant à la fois une covariance de nature locale (des équations des géodésiques) et à la fois des contraintes associées à des conditions aux limites (jamais covariantes).

Le plus rapide pour comprendre l'ambiguïté sur les géodésiques, est d'étudier le problème le plus simple, les géodésiques dans un champ central à symétrie sphérique (émis par une boule "statique").

Précautions - Dans la mesure où la notion de métrique à symétrie sphérique n'est pas covariante, mais celle d'univers à symétrie sphérique l'est, dans ce qui suit, cette notion de métrique à symétrie sphérique présupposera toujours un univers donné (en fait l'univers statique de Minkowski, sauf mention explicite d'un autre univers).

- Le principe géodésique, traduisant le principe d'équivalence faible, s'applique en toute rigueur à une particule de masse nulle ; en effet pour une particule de masse non nulle il faudrait tenir compte du champ gravitationnel créé par cette particule.

Dans un premier temps, nous donnerons les équations du mouvement dans le cadre le plus général d'une métrique à symétrie sphérique sur la variété de Minkowski. Pour obtenir ces équations trop rarement rappelées dans la littérature, nous utiliserons les isomorphismes musicaux. Puis dans le cas "statique", les géodésiques radiales, circulaires et même elliptiques seront données. L'ambiguïté apparaîtra aussi bien pour les géodésiques isotropes (corps d'épreuve de masse nulle) que pour les géodésiques suivies par les corps d'épreuves de masse non nulle (mais négligeable).
Nous allons mettre en évidence que, pour une particule de masse non nulle (même très faible), le principe des géodésiques amène des difficultés pour des champs forts ; plus précisément une particule de masse non nulle peut atteindre la vitesse de la lumière.
Nous mettrons également en évidence que pour les particules de masse nulle (le principe des géodésiques est un axiome dans le cadre de la relativité générale), les résultats vont dépendre de la métrique ; par exemple le redshift gravitationnel dû au corps central dépend de la métrique solution choisie.
Enfin nous montrerons que la loi de Titus-Bode est interprétable dans le cadre de la relativité générale, de même que l'atome de Bohr ! ; plus précisément il existe toujours des solutions (non formellement statiques), au problème d'une boule statique, dont l'ensemble des trajectoires circulaires stables soit donné a priori.

Dans les différents articles qu'il consacre à l'histoire de la relativité générale, J. Eisenstaedt [4,5] insiste fréquemment sur le fait que l'étude des géodésiques, notamment les géodésiques radiales dans un champ central, permet de mieux comprendre les problèmes soulevés par la relativité générale. Il a raison, et ses études sont une mine irremplaçable de renseignements historiques et bibliographiques. Dommage qu'il ait mis son savoir au service du mythe des trous noirs ; son travail, exemplaire par de nombreux aspects, est malheureusement une apologie de ce mythe produit par la science ; l'erreur qu'il commet est justement de ne pas avoir saisi que la notion de géodésique, qui est une notion localement covariante ne l'est pas globalement. Il est symptomatique de constater qu'il n'a pas compris le travail de Fock [6] qui s'est attaché à bien distinguer deux principes de relativité, celui de Copernic et celui de Galilée.

"Les géodésiques sont les mêmes" : Ceci est vrai par covariance, mais faux lorsque l'on veut confronter les résultats aux observations. En fait la difficulté, pour ne pas dire l'incompréhension vient de ce que l'on entend par "les géodésiques sont les mêmes". Ce qui est vrai du point de vue de la covariance ne l'est pas forcément du point de vue de la confrontation aux observations ! Pourquoi ? le plus simple est de donner un exemple, la forme d'une boule de matière n'est pas une notion covariante ! et la confrontation aux observations tient nécessairement compte de données non-covariantes. De fait C. Will [7], utilise pour la confrontation aux observations une jauge, la jauge harmonique, qui pour les champs faibles permet de définir le formalisme post-newtonien.

Les équations des géodésiques.

Soit $p \to x^\mu(p)$ une trajectoire ; cette trajectoire est une géodésique pour la métrique g, si elle vérifie le système d'équations :

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0.$$

Les équations du mouvement d'une particule d'épreuve dans le plan équatorial ($\theta = 0$) autour d'une boule à laquelle est associée une métrique extérieure de la forme $ds^2 = F^2(r,t)dt^2 - L^2(r,t)dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2$ sont

$$(1)\quad a)\quad C^2\frac{d\phi}{dp} = \ell\ ;$$

$$(1)\quad b)\quad \frac{d}{dp}(F^2\frac{dt}{dp}) - F\dot{F}(\frac{dt}{dp})^2 + L\dot{L}(\frac{dr}{dp})^2 + \frac{\dot{C}}{C^3}\ell^2 = 0;$$

$$(1)\quad c)\quad \frac{d}{dp}(L^2\frac{dr}{dp}) - LL'(\frac{dr}{dp})^2 + FF'(\frac{dt}{dp})^2 - \frac{C'}{C^3}\ell^2 = 0;$$

$$(1)\quad d)\quad F^2(\frac{dt}{dp})^2 - L^2(\frac{dr}{dp})^2 - \frac{\ell^2}{C^2} = \epsilon\ ;$$

(ℓ *et* ϵ sont les constantes du mouvement) ; La dernière équation est une intégrale première provenant de la métrique. En particulier, pour une particule d'épreuve de masse nulle on a $\epsilon = 0$.

Supposer que $\theta = 0$, ne constitue pas une hypothèse restrictive car toute géodésique est dans un plan de R^3 passant par l'origine, lorsque une métrique, exprimée dans une carte, possède la symétrie sphérique.

Forme intrinsèque des équations en utilisant les formes $du = Fdt$ et $d\delta = Ldr$, deux 1-formes intrinsèques, et $du^\sharp = (Fdt)^\sharp = \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial t}$, noté " $^-$ ", et $d\delta^\sharp = (Ldr)^\sharp = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial r}$, noté " $^\sim$ " , les deux champs de vecteurs associés, on obtient :

$$C^2\frac{d\phi}{dp} = \ell \quad ; \quad (\frac{du}{dp})^2 - (\frac{d\delta}{dp})^2 = \epsilon + \frac{\ell^2}{C^2}\ ;$$

(ℓ et ϵ sont les constantes du mouvement) et les deux équations équivalentes suivantes :

$$\frac{d}{dp}(\frac{du}{dp}) + \frac{\tilde{F}}{F}(\frac{du}{dp})^2 + \frac{\bar{L}}{L}(\frac{d\delta}{dp})^2 + \frac{\bar{C}}{C^3}\ \ell^2 = 0\ ;$$

$$\frac{d}{dp}(\frac{d\delta}{dp}) + \frac{\bar{L}}{L}(\frac{d\delta}{dp})^2 + \frac{\tilde{F}}{F}(\frac{du}{dp})^2 - \frac{\tilde{C}}{C^3}\ \ell^2 = 0\ .$$

Ces deux dernières équations pouvant encore s'écrire, en tenant compte du fait que $\bar{L}\tilde{C} = L\tilde{\bar{C}}$ ou (et) $\bar{C}\tilde{F} = F\tilde{\bar{C}}$:

$$\frac{d}{dp}(\frac{du}{dp}) + \frac{\tilde{\bar{C}}}{\bar{C}}(\frac{du}{dp})^2 + \frac{\tilde{\bar{C}}}{\tilde{C}}(\frac{d\delta}{dp})^2 + \frac{\bar{C}}{C^3}\ \ell^2 = 0\ ;$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{d\delta}{dp}\right) + \frac{\tilde{\bar{C}}}{\tilde{C}}\left(\frac{d\delta}{dp}\right)^2 + \frac{\bar{\tilde{C}}}{\bar{C}}\left(\frac{du}{dp}\right)^2 - \frac{\tilde{C}}{C^3}\ \ell^2 = 0\ .$$

Ces formules permettent d'écrire les équations des géodésiques lorsque la métrique est donnée sous la forme la plus générale $ds^2 = F^2(r,t)dt^2 + 2F(r,t)H(r,t)drdt - (L^2(r,t) - H^2(r,t))dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2$, en utilisant les opérateurs $du^\sharp = (Fdt + Hdr)^\sharp = \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial t}$, noté " $^-$ ", et $d\delta^\sharp = (Ldr)^\sharp = \frac{1}{L}(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{H}{F}\frac{\partial}{\partial t})$, noté " $^\sim$ " .
Dans la mesure où nous allons bien mettre en évidence ce phénomène d'ambiguïté pour les solutions statiques du problème de la boule sphérique, utilisons quelques notations :
La solution statique la plus générale est de la forme suivante : Soit $H = H(r)$ une fonction quelconque et soit $C = C(r)$ également quelconque (ou presque, car il faut que C soit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et équivalente à r à l'infini) ; alors on a : $F^2 = 1 - \frac{2M}{C(r)}$ et $FL = C'$.
Nous considérerons les choix suivants $H \equiv 0$ et C quelconque pour les formules générales ; puis particulièrement les solutions de Schwarzschild, de Fock et la solution harmonique ; i.e. respectivement associées à $C(r) = r$ pour la solution de Schwarzschild, $C(r) = r + M$ pour celle de Fock et $C(r) = r + M + \frac{A}{r^2} + etc...$ pour la solution harmonique la plus générale (A est une constante qui pour les champs faibles est de la forme $A = aMr_o^2$ et dont la valeur dépend en fait des propriétés internes à la boule).

Cas des métriques statiques.
L'équation (1) b) se réduit, pour les métriques statiques, à l'équation du temps propre $\frac{d}{dp}(F^2\frac{dt}{dp}) = 0$. Mettons en évidence quelques notions intrinsèques (covariantes) : l'élément de distance radiale $d\delta = L(r)dr$, l'élément de temps propre pour un observateur fixe dans la carte canonique $du = F(r)dt$, l'élément de temps propre pour un observateur comobile $dp = F^2(r)dt$ (rappelons que cet objet est intrinsèque dans la mesure où une particule de masse non nulle vérifie les équations des géodésiques, ce qui n'est pas dans le "credo" de la relativité générale, mais seulement dans l'usage). Ainsi ne devrait-on pas toujours avoir, pour une particule en chute libre dans son temps propre, $\frac{d\delta}{\sqrt{\epsilon}dp} <$ vitesse de la lumière ?

Sur le mouvement radial (dans le cas statique) :
Les équations (1) se réduisent à $F^2\frac{dt}{dp} = 1$, $\epsilon F^4 - F^2 = -L^2(\frac{dr}{dt})^2$.
Considérons alors les trois observateurs suivants :
i) L'observateur fixe à l'infini (ou très éloigné), pour lequel son temps est dt ;
ii) L'observateur fixe sur la boule, pour lequel son temps est $du = Fdt$;
iii) L'observateur en chute libre, pour lequel son temps propre est $dp = F^2(r)dt$.
Ces trois temps dt, du *et* dp caractérisent une horloge pour chacun des observateurs. Signalons la possibilité de choisir d'autres horloges par exemple celle associée au temps photonique $d\tau = dt + \frac{L}{F}dr$.
Calculons la vitesse du corps en chute radiale libre pour ces trois observateurs, i.e. le rapport entre l'élément de distance riemannienne radiale $d\delta = Ldr$ et l'horloge de l'observateur considéré :

$$i)\ \frac{d\delta}{dt} = F\sqrt{1-\epsilon F^2}\ ;\ ii)\ \frac{d\delta}{du} = \sqrt{1-\epsilon F^2}\ ;\ iii)\ \frac{d\delta}{d\tau} = \frac{F\sqrt{1-\epsilon F^2}}{1+\sqrt{1-\epsilon F^2}}\ ;$$

Notons que $\frac{d\delta}{dp}=\sqrt{\frac{1-\epsilon F^2}{F^2}}$ n'est susceptible d'aucune confrontation simple aux observations car $d\delta$ désigne une distance dans une carte et dp un temps dans une autre carte (celle où l'observateur est fixe).
En fait ces formules brutes cachent plusieurs problèmes, essayons de les expliciter.
a) pour un corps d'épreuve lâché à une vitesse nulle d'un point :

Soit la boule de rayon euclidien r_o et soit un corps d'épreuve lâché en un point (r_2, θ_o, ϕ_o) avec une vitesse nulle ; considérons l'observateur fixe au point (r_1, θ_o, ϕ_o), mesurant la vitesse de passage de ce corps en chute libre.
Calculons cette vitesse. La vitesse étant nulle en r_2, on a $\epsilon = \frac{1}{F^2(r_2)}$. Le temps propre pour l'observateur en r_1 est $du = F(r_1)dt$.
Ainsi la vitesse du corps d'épreuve au point (r, θ_o, ϕ_o), pour l'observateur fixe au point (r_1, θ_o, ϕ_o) et lâché à une vitesse nulle du point (r_2, θ_o, ϕ_o), est $v_1(r) = \frac{d\delta}{du}(r) = \frac{d\delta}{F(r_1)dt}(r)$ i.e.

$$v_1(r) = \frac{F(r)}{F(r_1)}\sqrt{1-\frac{F^2(r)}{F^2(r_2)}}\ ;$$

et en particulier cet observateur peut mesurer le corps d'épreuve passer devant lui à une vitesse de
(2) $v_1(r_1) = \sqrt{1-\frac{F^2(r_1)}{F^2(r_2)}}$;
l'observateur fixe à la surface de la boule voit arriver sur lui le corps d'épreuve à la vitesse de
(3) $v_o(r_o) = \sqrt{1-\frac{F^2(r_o)}{F^2(r_2)}}$;
et pour l'observateur très éloigné, ou à l'infini, le corps d'épreuve arrive à la surface de la boule à une vitesse de
(4) $v_\infty(r_o) = F(r_o)\sqrt{1-\frac{F^2(r_o)}{F^2(r_2)}}$.

Premières conséquences :
- La vitesse $v_o(r_o)$ doit être strictement inférieure à un (la vitesse d'une particule de masse non nulle ne peut atteindre la vitesse de la lumière) ; ceci impose que $F(r_o) > 0$ donc $C(r_o) > 2M$. Ceci signifie que pour un champ fort, $C(r_o) \leq 2M$ (un "trou noir"), le principe géodésique ne peut pas s'appliquer pour une particule de masse non nulle, ou (et) des objets célestes tel que $C(r_o) \leq 2M$ sont interdits par la relativité générale.
- Les vitesses $v_o(r_o),\ v_\infty(r_o)\ ou\ v_1(r_o)$ dépendent explicitement de F donc de la fonction arbitraire $C(r)$; examinons plus précisément cette dépendance.

b) Pour un photon émis radialement en un point (r_2, θ_o, ϕ_o), en direction de la boule, on a $\epsilon = 0$, et pour l'observateur fixe en (r_1, θ_o, ϕ_o) la vitesse du photon au point (r, θ_o, ϕ_o) est $v(r) = \frac{d\delta}{du}(r) = \frac{F(r)}{F(r_1)}$; en particulier le photon arrive sur lui à la vitesse unité (i.e. la vitesse de la lumière).
Remarque Nous venons de remarquer qu'un photon, tombant radialement vers le corps massif, va à la vitesse de la lumière $d\delta/du$ (ce qui n'est que la confirmation du principe des

géodésiques pour les particules de masse nulle) ; considérons maintenant le temps que met ce photon pour arriver à la surface de l'astre, du point de vue de l'observateur fixé. Pour cela il est plus facile de calculer la distance riemannienne parcourue :
$\delta = \int_{r_0}^{r_2} L(r)dr$ (cf. figure précédente) ; δ tend vers l'infini lorsque $C(r_0)$ tend vers $2M$. Ceci signifie d'une part qu'un photon met un temps infini, pour un observateur fixé, pour atteindre "l'horizon" d'un trou noir et d'autre part que le temps mis pour atteindre la boule de périmètre riemannien $2\pi C(r_0)$ dépend de la métrique solution choisie !

c) La vitesse d'impact sur la boule d'un corps d'épreuve dépend de la métrique solution (statique) extérieure à une boule :
Pour la métrique de Schwarzschild, $F^2(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ on a, pour la vitesse d'impact d'un projectile à la surface de la boule (pour l'observateur à la surface qui mesure la vitesse d'impact) $v_s(r_o) = \sqrt{\frac{2M(r_2-r_o)}{r_o(r_2-2M)}}$; rappelons cependant que, pour la solution de Schwarzschild, la confusion entre distance radiale et rayon de courbure enlève toute signification à ce résultat.
Pour la métrique de V. Fock, i.e. la plus "simple" vérifiant la condition de jauge harmonique, $F^2(r) = \frac{r-M}{r+M}$, on obtient $v_f(r_o) = \sqrt{\frac{2M(r_2-r_o)}{(r_o+M)(r_2-M)}}$, ce qui ne donne pas la même vitesse. Dans le cadre d'une vérification, le champ gravitationnel dans le système solaire est trop faible pour pouvoir trancher entre les deux résultats ; en tout cas, il est évident sur cet exemple que, du choix d'une solution extérieure à une boule, dépend la vitesse d'impact d'un corps d'épreuve en chute libre ! En particulier, notons que pour une étoile à neutrons (d'un rayon de l'ordre de 10km pour une étoile d'une masse solaire) la différence se manifeste dès le deuxième chiffre significatif.
Signalons que si $r_o = 2M$, on a un quasi trou noir pour la métrique de Fock et un trou noir pour celle de Schwarzschild ; Autrement dit, on ne peut pas donner une **définition covariante d'un trou noir !** On peut certes reprocher de comparer des choses incomparables du point de vue d'un observateur physique, alors mettons les choses au point. Comparons la métrique de Fock et celle de Schwarzschild, qui admettent le même "redshift" gravitationnel par rapport à une étoile fixe (un observateur très lointain fixé) ; la masse M étant égale, la correspondance (entre les "rayons" de courbure), doit se faire par l'application $r \to r - M$, pour que les vitesses d'impact soient les mêmes (pour être plus précis, pour l'observateur à la surface de la boule). Si l'on calcule les "redshifts" (c'est à dire le décalage spectral) d'origine gravitationnel ; ils ne sont égaux que si l'étoile fixe est strictement à l'infini ! La vérification est laissée au lecteur.

Sur le mouvement circulaire

Posons $F^2\frac{dt}{dp} = g(r,t)$, alors si la métrique admet les géodésiques circulaires $\frac{dr}{dp} = 0$, les deux dernières équations du mouvement ((1) c) et d)) se réduisent à : $\ell^2 = \frac{F'C^3g^2}{F^3C'}$ *et* $\frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{F}}{F} = -\frac{\dot{C}F^2\ell^2}{C^3g^2}$; (il faut , pour l'existence, que $\frac{d}{dt}(\frac{F'C^3g^2}{F^3C'}) = 0$). En utilisant $T_0^1 = 0$ on obtient $\frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{F}}{F} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{C}'}{C'}$; ainsi $g(r,t) = k(r)\frac{FL}{C'}$ où k est une fonction quelconque.

Si de plus les orbites circulaires sont stables alors on a $g = 1$ c'est à dire

$$(\frac{FL}{C'})^{\cdot} = 0$$

et les constantes du mouvement sont (5) $\ell^2 = \frac{F'C^3}{F^3C'}$ *et* $\epsilon = \frac{C'F-F'C}{F^3C'}$.
Remarque : Soit $\delta(r,t) = \int_0^r L(u,t)du$, le rayon riemannien à l'instant t de la sphère euclidienne S_r, alors $\frac{d\delta}{dp} = L\frac{dr}{dp} + \dot{\delta}\frac{dt}{dp}$; donc les notions de géodésiques circulaire au sens riemannien et circulaire au sens euclidien ne coïncident pas, sauf si $\dot{\delta} = 0$, i.e. $\dot{L} = 0$. Dans ce cas la notion de géodésique circulaire est non ambiguë ainsi que les concepts de périastre et d'apoastre. Cette hypothèse supplémentaire $\dot{L} = 0$ semble s'imposer si l'on veut étudier les mouvements d'une particule d'épreuve dans un champ à symétrie sphérique non statique.

Sur le mouvement circulaire (cas statique) :
Nous pouvons utiliser les résultats précédents pour étudier la notion de période de rotation d'une particule d'épreuve en rotation autour d'une boule. Etant donné que ℓ et ϵ dépendent de $C(r)$ et de $F(r)$, regardons ce que cela donne pour une étoile à neutrons.
Soit donc un observateur fixe en un point (r_1, θ_o, ϕ_o) qui étudie la période de rotation $T_1(r)$ d'un corps d'épreuve en mouvement circulaire à une distance euclidienne r de la boule.
On a $Cd\phi = F\sqrt{\frac{CF'}{FC'}}dt$ $(= \sqrt{\frac{M}{C}}dt$ pour les solutions de Schwarzschild ou de Fock), autrement dit $\frac{T_1(r)}{F(r_1)} = 2\pi C\sqrt{\frac{C}{M}}$ et en particulier pour l'observateur éloigné on a :
(6) $T_\infty(r) = 2\pi C\sqrt{\frac{C}{M}}$. On vient ainsi de démontrer :
bf Proposition : La période de rotation dépend du choix de la fonction $C(r)$.
Pour une étoile à neutrons la différence se manifeste dès le deuxième chiffre significatif. Certains oserons encore objecter que les situations ne sont pas comparables du fait par exemple d'un "redshift" gravitationnel différent ; Notons $Tr_{1,s}(r)$ la période associée à la solution de Schwarzschild et $Tr_{1,f}(r)$, celle associée à la solution de Fock ; le calcul de la différence entre ces deux périodes montre qu'il n'y a égalité, à même "redshift" gravitationnel pour l'observateur en r_2, que si $r_1 = r_2$!
Note : il n'y a pas lieu d'y voir rouge et de se mettre dans une colère bleue, quand des "experts" osent encore poser de telles questions, il n'y a qu'à constater un décalage, d'origine idéologique, reposant sur le principe "Paroles d'experts priment la raison".
problème. Quels sont les liens théoriques et (ou) expérimentaux entre $C(r_0)$, $\delta(r_0)$ et r_0, pour différents objets astrophysiques, en particulier pour les étoiles à neutrons ou les quasi trous noirs ? Il me semble que cette question, aussi incongrue soit-elle, mérite une réponse, si possible simple ; en l'absence de réponse claire ou de piste de recherche précise sur ce sujet, cela signifierait-il que, comme le disait quelqu'un, que la physique théorique, ce sont des maths sans la rigueur ou de la physique sans expérimentation ?

Sur les orbites "elliptiques" (cas statique)
Pour le mouvement dit elliptique qui a permis la première confrontation aux observations de la relativité générale (avance du périhélie de Mercure en 1915), nous ne donnerons que

les résultats pour un champ supposé faible et en première approximation. Dans ce qui suit le temps est celui de l'observateur à l'infini.
Soit un astre de masse relativiste M, de rayon r_o (pour la métrique d'univers sous-jacente); soit $\rho = C(r)$ la variable périmètre de courbure; alors il existe des géodésiques elliptiques pour cette variable périmétrique, (mais évidemment non elliptique pour les variables r comme distance radiale euclidienne ou δ comme distance radiale riemannienne).
Soit un satellite qui suit une telle géodésique (elliptique en ρ) de périastre r_- et d'apoastre r_+; notons $\rho_+ = C(r_+)$ et $\rho_- = C(r_-)$; notons a le demi-grand axe de l'ellipse, $a = \frac{1}{2}(\rho_+ + \rho_-)$, e l'excentricité de l'ellipse, $e = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}$,
ℓ le rayon focal, $\frac{2}{\ell} = \frac{1}{\rho_-} + \frac{1}{\rho_+}$. Ces longueurs sont reliées entre elles par les équations $\ell = (1-e^2)a$; $\rho_+ = a(1+e)$ *et* $\rho_- = a(1-e)$.
On a les approximations suivantes :
Avance du périastre $\Delta\phi = \frac{6\pi M}{\ell}(1 + \frac{9M}{2\ell}((1 + \frac{e^2}{18}) + \ ...)$;
Période de rotation :

$$(7) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^3}{M(1-e^2)^3}}(1 + \frac{3M}{\ell}(1-e^2)^{3/2}((1-e^2)^{1/2} - \frac{1-e}{1+e}) + ...).$$

Ces formules montrent bien la non unicité (au second ordre en $\frac{M}{r}$ pour l'avance du périastre et au premier ordre pour la période de rotation) des prédictions théoriques. A chaque choix de la fonction $C(r)$ correspond des prédictions différentes; certes les écarts entre ces formules sont difficilement mesurables dans le système solaire, néanmoins, dans la mesure où des satellites sont actuellement envoyés vers le soleil, il n'est pas impensable de pouvoir les tester un jour; en particulier la formule (7) ne se réduit à la troisième loi de Kepler $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^3}{M(1-e^2)^3}}$ que si l'excentricité de l'orbite est nulle et si $C(r) = r$!. Dans le cas circulaire, la solution de Fock $C(r) = r + M$, et la solution harmonique (plus générale) $C(r) = r + M + \frac{A}{r^2} + \ ...$ prédisent un allongement de la période de rotation par rapport à la période Keplerienne.
Cette formule (7) est donc très importante pour tester la jauge harmonique ou toute autre jauge permettant de fixer la fonction "rayon" de courbure $C(r)$. Il est surprenant qu'aucun test de la troisième loi de Kepler ne soit proposé dans la littérature, même si un tel test exige une précision très grande sur les distances.

Pour d'autres tests, comme la déviation des rayons lumineux, l'effet Shirokov etc., l'étude de la dépendance de la jauge choisie des résultats escomptés est faite dans l'article de Logunov et autres [3].

Vers la loi de Titus-Bode. Les planètes du système solaire sont situées suivant la répartition de distance $1 + \frac{3}{4}2^n$, à partir de la première planète située à la distance 1 du soleil; cette loi est également valable pour le système jupiterien. Comment rendre compte simplement de ce phénomène dans le cadre de la relativité générale? Même s'il existe une explication de ce phénomène provenant d'un principe de covariance d'échelle, nous allons montrer qu'il existe beaucoup de métriques solutions de la forme $ds^2 = F^2(r,t)dt^2 -$

$L^2(r,t)dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2$ permettant d'en rendre compte (dans le but non caché de tirer à boulets rouges dans le jardin de l'interprétation autant classique que fausse du théorème local mathématiquement juste de Birkhoff).
Pour cela posons (8) $FL = k(r,t)C'$; alors l'intégrale première des équations d'Einstein (9) $L^2(1 - \frac{2M}{C} + \frac{\dot{C}^2}{F^2}) = C'^2$ nous dit que $F^2 = \frac{k^2}{2}(1 - \frac{2M}{C} + \sqrt{(1-\frac{2M}{C})^2 + \frac{4\dot{C}^2}{k^2}})$; et l'équation restante $\frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{C}'}{C'} + \frac{\dot{C}F'}{C'F} = 0$, se réduit à $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{C}F'}{C'F}$.
Or l'équation des orbites circulaires stables est $(\frac{FL}{C'})^{\cdot} = 0$, ce qui se traduit par $\dot{k} = 0$. Prenons k tel que $\dot{k}(r_n) = 0$, où (r_n) désigne une suite de points suivant la loi de Titus-Bode. Par exemple pour $k(r,t) = 1 + f(t,r)g(r)$ avec g tel que $g(r_n) = 0$ et f quelconque, la loi de Titus-Bode sera vérifiée. Pour cela il faut encore que les équations (8) et (9) soient vérifiées. Ces équations se réduisent à une équation aux dérivées partielles en k (du premier ordre) ou en C :

$$(\frac{\dot{C}}{C'} = \frac{\dot{k}}{k}\frac{\dot{C}}{C'} + \frac{kk'}{C'^2}(\frac{F^2}{k^2}\sqrt{(1-\frac{2M}{C})^2 + \frac{4\dot{C}^2}{k^2}} - \frac{\dot{C}^2}{k^2}).$$

Il est évident qu'au moins localement il existe énormément de couples (C,k) solutions. Ainsi la loi de Titus-Bode peut s'interpréter dans le cadre de la relativité générale. Par ailleurs parmi toutes les solutions possibles il resterait le problème de trouver les solutions vérifiant la jauge harmonique.
L'exemple de la loi de Titus-Bode montre également que pour avoir une unicité de solution en relativité générale, on peut recourir à des conditions portant sur des géodésiques, plutôt qu'à des conditions initiales fixées à un temps t_o. Par ailleurs, en supposant que la boule centrale est un noyau d'atome, un raisonnement semblable (en tenant compte de la charge électrique) montre qu'il existe des solutions permettant d'obtenir les orbites stables des électrons : l'atome de Bohr est donc compatible avec la relativité générale, autrement dit la relativité générale est d'une telle richesse qu'on peut la compléter avec des exigences provenant de la mécanique quantique.

Conclusion

L'étude des géodésiques montre, à l'évidence, qu'il faut une jauge pour confronter sans ambiguïté la relativité générale aux observations. A propos de jauge, il est intéressant de revenir sur le travail de K. Schwarzschild (cf. Eisenstaedt [4]) ; En fait on donne à tort son nom à une métrique qui n'a rien à voir, sinon comme astuce technique, avec son travail. La solution proposée par Schwarzschild provient d'une "jauge", celle de déterminant un ; de plus, K. Schwarzschild avait déjà signalé (avant sa disparition en avril 1916 !), l'ambiguïté de la relativité générale dont les principes généraux ont été établis 6 mois plus tôt par A. Einstein. Nul doute que dans un proche avenir on puisse tester la validité de la jauge harmonique.

La position d'Einstein sur la signification d'un système de coordonnées est clairement exprimée dans une lettre qu'il adresse en 1921 à P. Painlevé :

“ Lorsque dans le ds^2 de la solution à symétrie centrale statique, on introduit à la place de r n'importe quelle fonction de r, on n'obtient pas une nouvelle solution, car la

grandeur r n'a en elle-même aucune signification physique [...]. Il faut sans cesse garder à l'esprit que les coordonnées ne possèdent pas de signification physique, ce qui veut dire qu'elle ne représentent pas le résultat d'une mesure, seules les conclusions, accessibles par l'élimination des coordonnées, peuvent prétendre à une signification objective. L'interprétation métrique de la grandeur ds n'est en outre pas "pure imagination" mais le noyau profond de la théorie elle-même."
Autrement dit, n'ont de signification objective que les conclusions indépendantes de jauge. Au vu des considérations ci-dessus, cette position orthodoxe pose question car on ne peut plus parler de manière univoque de la déviation des rayons lumineux par le soleil, de la période de rotation d'un satellite, du concept d'horizon d'un trou noir, etc.

Bibliographie .

[1] S. WEINBERG ; Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York (1972).
[2] S. HAWKING et G. ELLIS ; The large scale structure of spacetime ; Cambridge university press, Cambridge (1973).
[3] A. LOGUNOV, Y. LOSKUTOV et Y. CHUGREEV ; Does general relativity explain gravitational effects ; Moscou (1987).
[4] J. EISENSTAEDT ; Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild ; Arch. for history of exact sciences, vol 27 n^o 2, Springer-Verlag(1982).
[5] J. EISENSTAEDT ; La relativité générale à l'étiage 1925-1955 ; Arch. for history of exact sciences, vol 35 n^o 2, Springer-Verlag (1986).
[6] V. FOCK ; Les deux principes de relativité et la théorie d'Einstein ; dans "Fluides et champ gravitationnel en relativité générale" Colloques internationaux du C.N.R.S. n^o 170, Paris (1969).
[7] C. WILL ; Theory and experiments in gravitational physics ; Cambridge university press, London (1981).