Chapitre 7

Sur la problématique des modèles d'univers

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

SOMMAIRE

C) Gravitation et électromagnétisme
Forme conforme ; jauge ; vitesse de la lumière
Conclusion

Sur la problématique des modèles d'univers
Introduction :

Dans le cadre de la relativité générale, il est usuel d'interpréter le tenseur impulsion-énergie, représentant le contenu physique d'un univers homogène et isotrope, par un fluide hydrodynamique. Nous nous proposons d'examiner cette hypothèse (le fluide cosmique est hydrodynamique) qui, en plus de l'hypothèse fondamentale disant que les équations de la relativité générale sont valables sur l'univers tout entier, mène au modèle standard.

Une réflexion sur la notion de modèle d'univers et sur l'interprétation classique du tenseur impulsion-énergie est rendue d'autant plus urgente que les observations actuelles conduisent à des difficultés énormes ; citons-en quelques unes :

- La constante de Hubble nous donne un âge de l'univers de l'ordre de 11 à 13 milliards d'années, difficilement compatible avec l'âge d'amas d'étoiles (les amas globulaires) et un temps suffisant pour la formation des galaxies.
- Le rayonnement de fond cosmologique à 3 K (plus précisément à 2.735) tellement isotrope, et le phénomène d'horizon (semblant inhérent au modèle standard), sont impossibles à réconcilier sans le recours à des hypothèses plutôt ad hoc, comme par exemple des hypothèses menant à des scénario inflationnaires.
- L'univers serait en expansion accélérée, (cf. Perlmutter et autres [23) ou Riess et autres [24]), ce qui oblige à modifier le modèle usuellement admis en réintroduisant la constante cosmologique ... et - La constante cosmologique est toujours un mystère.
- Les observations sur les quasars posent problème. Etc.

A cela s'ajoute d'autres difficultés, comme par exemple l'instabilité du modèle standard par rapport au paramètre de densité (la densité critique est une valeur instable, cf. A. Coley et R. Tavakol [1]).

Nous nous proposons de montrer, après avoir essayé de bien poser les problèmes, qu'une hypothèse extrêmement faible sur le tenseur impulsion énergie, respectant le sens des équations de la relativité générale, permet de construire un modèle d'univers qui rend compte de toutes les observations actuelles, qui supprime tout mystère à la constante cosmologique, qui tient compte des exigences du mathématicien que je suis, et qui permet d'avancer dans la compréhension de ce qu'est la flèche du temps.

Insistons sur le nécessaire respect du sens des équations d'Einstein. Il est admis que le deuxième membre des équations de la relativité générale, le tenseur impulsion-énergie, ne peut s'interpréter en terme de densité et de pression que dans un repère localement inertiel et comobile. Or le modèle standard est basé sur une interprétation, par analogie de formules avec la thermodynamique, dans un repère comobile, qui n'est pas localement inertiel. En effet un repère comobile ne peut être localement inertiel qu'à un seul moment ! Là réside l'erreur de fond du modèle standard.

Sur l'histoire des modèles d'univers en expansion :

Dès les années 20, la relativité générale, élaborée au départ pour concilier relativité restreinte et gravitation, est utilisée pour construire des modèles d'univers. Cette recherche est d'abord purement spéculative, visant à explorer les possibilités de la nouvelle théorie. Elle aboutit en particulier à montrer la possibilité de construire des modèles d'univers en expansion. C'est à A. Friedmann (1922) que l'on doit l'étude d'une famille de modèles d'univers isotropes. Une étude d'une famille plus complète fut faite par G. Lemaître en 1927. Or, peu après, les observations de Hubble aboutissent à la conclusion que l'univers est effectivement en expansion ce qui provoque bien sûr un regain d'intérêt pour ces modèles d'univers "einsteiniens" rendant compte de ce phénomène. C'est à Robertson, en 1935, et Walker, en 1936, que l'on doit l'étude complète des modèles d'univers isotropes dans le cadre de la relativité générale.

La possibilité de fabriquer des modèles d'univers à partir de l'utilisation de la théorie newtonienne et de la relativité restreinte, mais sans appel à la relativité générale, est reconnue dans les mêmes années (Milne, 1934) ; ces modèles d'univers se placent essentiellement dans le cadre newtonien, mais modifié en supposant la vitesse de la lumière finie.

Cependant, il faut signaler que les premiers exemples de modèles d'univers en expansion ont été décrits par W. de Sitter (1917) et déjà par V. Varicak (1910) ! Ce fait trop peu connu mérite d'être signalé.

§1 **Quelques problèmes**

§1 A) **Notations et formulation du problème**

Une forme de Robertson-Walker d'une métrique d'univers homogène et isotrope sera notée :

(1) $ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)(d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2)$, où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$ et où , pour $\epsilon = 1,\ 0,\ -1$ suivant la nature de la partie spatiale de l'univers (plus précisément ϵ est le signe de la courbure de cette partie espace), on a respectivement :

$f_1(\alpha) = sin\alpha$, la partie espace est une sphère ,

$f_o(\alpha) = \alpha$, , la partie espace est l'espace euclidien ,

$f_{-1}(\alpha) = sh\alpha$, la partie espace est un hyperboloïde.

Nous noterons parfois $d\Omega_\epsilon^2$, la partie spatiale $d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2$ de la métrique.

Pour une telle forme de métrique, les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein (avec ou sans constante cosmologique), $T_{\mu\nu}$ le tenseur impulsion-énergie et κ un coefficient de proportionnalité (habituellement identifié à $\frac{8\pi G}{c^4}$), se réduisent à :

$$(2) \qquad \frac{8\pi G}{c^4}T_o^o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} - \frac{\Lambda}{3}),$$

$$(3) \qquad \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2R} - \Lambda,$$

où " $\cdot$ " $= \frac{d}{dt}$.

Premiers problèmes : G est-elle la constante de Newton ? α est-il un angle ou une longueur ? Suivants les ouvrages on trouve à la place du facteur c^4, dans le premier membre des équations (2) et (3), le facteur c^2 ou parfois même le facteur c^0, pourquoi ? Unicité de la forme de Robertson-Walker ? Hypothèses implicites et explicites ? Sur quelle variété est définie la deux-forme ds^2 ? Pourquoi choisir l'écriture équivariante des équations de la relativité générale ? Faut-il écrire les équations d'Einstein avec ou sans constante cosmologique ?

Avant d'aller plus loin dans les notations et avant même de réfléchir au tenseur impulsion-énergie, il est nécessaire de débroussailler certains de ces problèmes. Même si ces développements pourront paraître fastidieux ou longs, il sont nécessaires pour mettre en évidence des hypothèses implicitement admises, et pour mieux comprendre la relativité générale.

Je rappelle que je prend comme axiome initial le fait que la relativité générale fournit un cadre mathématique théorique de la gravitation. Il m'est évident que si certaines observations vont à l'encontre de cette théorie (par exemple l'observation de la formation d'un trou noir en un temps fini pour un observateur extérieur à la formation de ce trou noir), ce travail, de fait caduque, gardera son sens, d'une part dans l'exigence de rigueur mathématique, d'autre part au plan de l'épistémologie.

§1 B) **Sur la dimensionalité des équations d'Einstein**.

Il m'a été souvent demandé quelle est la valeur de κ dans les équations $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ de la relativité générale ; ma réponse ne varie pas : on a $\kappa = 8\pi G$, ou $\kappa = 8\pi\frac{G}{c^2}$, ou encore $\kappa = 8\pi\frac{G}{c^4}$; cela dépend du choix d'écriture de la métrique et aussi de la dimensionalité des coefficients $g_{\mu\nu}$, et de celle des coefficients du tenseur impulsion-énergie. Mais cette question qui semble anodine est en fait très pertinente. Commençons par rappeler que la valeur de κ est fondamentalement liée au besoin de retrouver pour les champs faibles, dans l'univers statique et vide de la relativité restreinte, l'approximation Newtonienne et expliquer les observations qui ne peuvent l'être par la théorie Newtonienne (par exemple lorsque l'on veut expliquer au moyen de la relativité générale l'avance du périhélie de mercure ou la déviation des rayons lumineux par le soleil) ! Mais quelle valeur donnée à κ si l'on veut appliquer les équations d'Einstein à l'univers tout entier ? Je laisse la question volontairement ouverte ; Aussi je demande au lecteur de prendre comme un acte de foi l'hypothèse sous-jacente à ce travail qui consiste à dire que **localement**, en chaque point d'un modèle d'univers les équations de la relativité générale ont un sens (ne serait-ce que pour pouvoir s'autoriser à traiter du champ gravitationnel émis par le soleil dans un univers non statique). Dois-je rappeler que le (ou les) modèle d'univers, dit standard, repose sur un acte de foi vertigineux : les équations d'Einstein sont valables **globalement** et le tenseur impulsion énergie a la signification d'un fluide thermo ou hydrodynamique, et dans le cadre de cette hypothèse quelle peut-être la valeur de κ ?

Désignons par des crochets [ ] la dimension physique des objets considérés, en notant par m la dimension de longueur, par g celle de masse et par s celle de temps. Par exemple pour la constante de Newton G, on a

$[G] = \frac{m^3}{gs^2}$, ou $[\frac{G}{c^2}] = \frac{m}{g}$.

* Pour la métrique $ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)d\Omega^2_\epsilon$, prenons $[ds] = [R(\tau)] = m$, alors $[d\tau] = m$ et $[d\Omega_\epsilon]$ est sans dimension. Soit $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein, alors $[G_{\mu\nu}]$ n'est pas homogène ;

par exemple $[R_{oo}] = m^{-2}$ et $[R_{11}]$ est sans dimension ; de même le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ ne l'est pas non plus. Par contre le tenseur équivariant G^μ_ν est homogène et de dimension $[G^\mu_\nu] = m^{-2}$.

Ainsi T^μ_ν est de dimension constante.

- Si l'on donne localement à T^μ_ν la signification d'une densité d'énergie, alors les équations d'Einstein s'écrivent :

$$8\pi G T^1_1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{R'^2}{R^2} + 2\frac{R''}{R} - \Lambda$$

$$8\pi G T^o_o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{R'^2}{R^2}) - \Lambda$$

où " $'$ " $= \frac{d}{d\tau}$ et donc $[\ '\ ] = m^{-1}$.

Et si l'on donne localement à T^μ_ν la signification d'une densité de matière, alors les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\frac{8\pi G}{c^2} T^1_1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{R'^2}{R^2} + 2\frac{R''}{R} - \Lambda$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} T^o_o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{R'^2}{R^2}) - \Lambda$$

* Pour la métrique $ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)d\Omega^2_\epsilon$, prenons $[ds] = [R(t)] = m$, alors $[dt] = s$ et $[d\Omega_\epsilon]$ est sans dimension. Le tenseur d'Einstein $[G_{\mu\nu}]$ n'est pas homogène, de même le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ ne l'est pas non plus. Par contre le tenseur équivariant G^μ_ν est homogène et de dimension $[G^\mu_\nu] = m^{-2}$.

- Si l'on donne localement à T^μ_ν la signification d'une densité d'énergie, alors les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^1_1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2R} - \Lambda$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^o_o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}) - \Lambda$$

où " $\dot{}$ " $= \frac{d}{dt}$ et donc $[\ \dot{}\ ] = s^{-1}$.

Et si l'on donne localement à T^μ_ν la signification d'une densité de matière, alors les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\frac{8\pi G}{c^2} T^1_1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2R} - \Lambda$$

$$\frac{8\pi G}{c^2} T^o_o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2}) - \Lambda$$

En résumé, nous avons choisi, avec les écritures (2) et (3), d'une part la formulation équivariante des équations d'Einstein, pour avoir une homogénéité dimensionelle qui facilitera par la suite l'interprétation physique et la confrontation aux observations, et d'autre part une signification d'énergie à chacun des coefficients du tenseur T^μ_ν. Au passage ce dernier fait montre que le contenu de matière étant exprimé en énergie par l'équation $E = mc^2$, une hypothèse implicitement admise est que la relativité restreinte est valable localement en tout point (i.e. en termes mathématiques : est valable sur l'espace tangent en chaque point de la variété sur laquelle est définie la métrique).

§1 C) **Retour sur les équations de la relativité générale**

Il est "bien connu" que les équations de la relativité générale, écrites dans un système de coordonnées locales, forment un système de 10 équations à 10 inconnues, se divisant en deux groupes d'équations : Un premier groupe est formé des équations, dites équations de contraintes, ce sont les quatre qui contiennent un indice nul dans la formulation usuelle et qui fournissent des conditions aux limites ou conditions initiales ; Le deuxième groupe est celui formé des équations ne comprenant aucun indice nul, ce sont les six équations dynamiques ou équations d'évolution. Voir par exemple le chapitre 7.5 sur les conditions de Cauchy de S. Weinberg [2] pour le lecteur physicien, ou l'énorme travail de A. Lichnérowicz [3] pour le mathématicien qui voudrait comprendre l'ampleur des problèmes mathématiques soulevés.

Cette division se retrouve-t-elle lorsque l'on regarde les deux équations restantes servant à étudier les modèles d'univers homogène et isotrope. C'est l'objet de ce qui va suivre.

Le problème de la séparation entre équations de contraintes et équations dynamiques est rendu plus délicat à étudier dans la mesure où ces équations ne sont pas fonctionnellement indépendantes. Elles sont reliées entre elles par les identités de Bianchi (pour le mathématicien) ; ces identités (quatre équations dans un système de coordonnées locales) sont identiquement vérifiées par le premier membre G^μ_ν des équations d'Einstein. Ces mêmes identités ont un sens pour le physicien, elles portent le nom de lois de conservation et relient entre elles les deuxièmes membres T^μ_ν des équations d'Einstein.

Ecrivons donc ces équations $\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$ (identités de Bianchi) donc $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ qui, pour une métrique d'univers de la forme (1) se réduisent à l'équation sur le tenseur T^μ_ν à :

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}(R^3 T^o_o) = 3R^2 \dot{R} T^1_1 (= R^2 \dot{R} T^i_i).$$

Rappelons les équations 2 et 3 :

$$(2) \qquad \frac{8\pi G}{c^4} T^o_o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3}),$$

$$(3) \qquad \frac{8\pi G}{c^4} T^1_1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2 R} - \Lambda,$$

Et regardons les liens existants entre les équations (2), (3) et (4) :

On a de manière évidente les relations suivantes :

(2) et (3) impliquent (4)

(4) et (2) impliquent (3),

mais on n'a pas (2) conséquence de (3) et (4) ; on a :

(4), $(2)_{t_O}$ et (3) impliquent (2) ,

où $(2)_{t_O}$ signifie que cette équation est vérifiée en un moment t_o fixé (concrètement t_o est aujourd'hui, au sens cosmologique du terme).

Cette constatation est importante, car elle signifie que les deux équations d'Einstein (2) et (3) n'ont pas le même statut. On retrouve le fait que l'équation (2) est une équation de contraintes (ou de conditions "initiales"), et que l'équation fondamentale à intégrer est l'équation dynamique (3) .

Revenons maintenant sur chacune de ces équations, en insistant sur le fait que dans la logique inhérente à la relativité générale, nous avons à résoudre le système :

(4) , (3) et $(2)_{t_O}$.

En effet pour qu'il existe une solution il faut et il suffit que (4) soit vérifiée : i.e. $\frac{d}{dt}(R^3 T_o^o) = 3R^2 \dot{R} T_1^1$; Autrement dit, si on se donne T_o^o, alors on a T_1^1 et on peut résoudre les autres équations.

Ceci signifie que le contenu physique du problème se réduit à se donner T_o^o.

Ce fait va à l'encontre de la "démarche usuelle" qui consiste à dire que (pour faire bref) T_ν^μ est le tenseur impulsion-énergie d'un fluide parfait. Au risque de me répéter, le contenu physique consiste uniquement à se donner la fonction **d'énergie** de l'univers, à savoir la fonction qui à t associe $T_o^o(t)$. On est loin du concept d'état qui consiste à dire qu'il faut se donner la "pression" T_1^1 en fonction de la "densité" T_o^o, ou vice-versa, dans le cadre de la théorie thermodynamique des fluides parfaits.

Examinons maintenant l'équation $(2)_{t_O}$, qui s'écrit :

$\frac{8\pi G}{c^4} T_o^o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3})$, alors on a :

$$\frac{\epsilon}{R^2(t_o)} = \frac{8\pi G}{3c^4} T_o^o(t_o) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{H_o^2}{c^2}$$

ce qui signifie que si l'on se donne la valeur de la constante de Hubble aujourd'hui (i.e. $H_o = \frac{\dot{R}}{R}(t_o)$), et la "densité d'énergie" aujourd'hui (i.e. $T_o^o(t_o)$ et Λ), alors le signe ϵ de la courbure de la partie espace est imposé, ainsi que le "rayon" $R_o = R(t_o)$ de l'univers aujourd'hui, indépendamment de la connaissance de la fonction R(t), lorsque $\epsilon \neq 0$.

Il ne reste plus alors qu'à résoudre l'équation dynamique (3) du deuxième ordre en R : (3) $\frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2 R} - \Lambda$, qui nous donnera la forme générale de la fonction R(t) ; cette forme dépend a priori de deux constantes d'intégration, mais l'équation aux contraintes $(2)_{t_O}$ en fixe une. Ainsi R(t) ne dépend que d'un paramètre arbitraire, qui correspond à un choix d'une origine des temps.

En résumé : on se donne la fonction T_o^o, par (4) on obtient T_1^1 ; on prend les données observationelles d'aujourd'hui, par $(2)_{t_O}$ on obtient la courbure aujourd'hui de la partie espace $\frac{\epsilon}{R_o^2}$; puis l'équation dynamique (3) permet de trouver R(t) et donc de déterminer complètement la métrique du modèle.

La seule question qui reste, apparemment, est celle de se donner la fonction d'énergie de l'univers $T_o^o(t)$.

§1 D) **La forme de Robertson-Walker et sa non unicité**

En fait il reste un autre problème important à examiner. Celui de savoir sur quelle variété est définie la solution. En effet une métrique g est un objet mathématique vivant sur une variété ; plus précisément c'est une deux-forme sur une variété. Aussi pour parler d'une métrique g, il faut se donner une variété. Nous allons illustrer ce point en montrant qu'une même métrique peut admettre plusieurs formes de Robertson-Walker. Nous allons montrer le :

Théorème 1 Les formes de **Robertson-Walker** sur l'hyperboloïde $SO_o(1,4)/SO_o(1,3)$ muni de sa métrique canonique g, invariante par le groupe de De Sitter $SO_o(1,4)$, sont les suivantes :

$$(5) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{sh^2\lambda t}{\lambda^2}(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2).$$

$$(6) \quad ds^2 = du^2 - \frac{ch^2\lambda u}{\lambda^2}(d\xi^2 + sin^2\xi d\omega^2).$$

$$(7) \quad ds^2 = dv^2 - e^{2\lambda v}(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2).$$

(Ces trois formes sont définies sur des ouverts différents de l'hyperboloïde).

Cette métrique ds^2 est solution des équations d'Einstein pour un tenseur impulsion-énergie nul et une constante cosmologique $\Lambda = 3\lambda^2$ positive.

Il existe encore d'autres formes de cette même métrique, (formes définies sur des ouverts différents de la variété de De Sitter). En particulier signalons :

La forme statique standard (obtenue par le théorème de Birkhoff) :

$$ds^2 = (1 - \frac{\Lambda}{3}\rho^2)d\tau^2 - (1 - \frac{\Lambda}{3}\rho^2)^{-1}d\rho^2 - \rho^2 d\omega^2.$$

La forme conforme (modèle de V. Fock [4]) :

$$ds^2 = (1 - \frac{\Lambda}{12}(T^2 - R^2))^{-2}(dT^2 - dR^2 - R^2 d\omega^2)$$

Notations : Soit $\mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 et soit $G = SO_o(1,4)$ la composante connexe neutre du groupe des transformations de $\mathbb{R}^5$ qui respectent la forme quadratique $\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, où $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5$.

Pour $x \in \mathbb{R}^5$, soit $G(x)$ l'orbite de x sous l'action de G et H_x le stabilisateur de x, i.e. $H_x = \{g \in G \ / \ g(x) = x\}$. La sous-variété $G(x)$ de $\mathbb{R}^5$, qui s'identifie à l'espace homogène G/H_x, est munie canoniquement d'une métrique $g_{\mu\nu}$, restriction à $G(x)$ de la métrique invariante par G :

$dx^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2.$

Cette métrique $g_{\mu\nu}$ est Lorentzienne si le stabilisateur H_x de x est isomorphe au groupe de Lorentz. C'est la métrique de De Sitter. Sans perte de généralité nous prendrons $x = \lambda^{-1}e_4$ et donc $H_x = H = SO_o(1,3)$ le stabilisateur de e_4.

Pour chaque $\lambda > 0$, l'orbite $G(\lambda^{-1}e_4)$, que nous noterons $\mathcal{H}_\lambda$ dans la suite, est une réalisation de l'espace symétrique G/H.

Soit $K = S0(4)$ le stabilisateur du point e_0.

Soit MN le stabilisateur du point $e_0 - e_4$ où $M = H \cap K$ est le groupe des rotations du sous-espace (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^5$, et où N, isomorphe à $\mathbb{R}^3$, est l'ensemble :

$$N = \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 + x^2/2 & x & x^2/2 \\ {}^t x & I & {}^t x \\ -x^2/2 & -x & 1 - x^2/2 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et ${}^t x$ est le transposé de x.

Et soit $A = SO_o(1,1)$ le sous-groupe de G formé des rotations hyperboliques du plan (e_0, e_4) et notons A_*^+ le sous semi-groupe des rotations hyperboliques strictement positives.

Lemme : Le groupe G admet les trois décompositions suivantes par rapport au sous groupe H :

i) Une décomposition d'Iwasawa : NAH est un ouvert de G (avec unicité de décomposition pour chaque élément de cet ouvert).

ii) Une première décomposition du type décomposition de Cartan : G= KAH (la décomposition d'un élément étant unique au centralisateur M de A dans K près).

iii) Une deuxième décomposition du type décomposition de Cartan : $S = HA_*^+H$ est un sous semi-groupe ouvert de G (la décomposition d'un élément étant unique au centralisateur M de A dans H près).

Pour la preuve, valable plus généralement pour les groupes $SO_o(1,n)$, voir Sekiguchi [5] par exemple et Mizony [6].

A ces trois décompositions précisées par le lemme ci-dessus nous pouvons associer trois paramétrages (plus précisément trois atlas) sur des ouverts de cet hyperboloïde $\mathcal{H}_\lambda$ et donc écrire la métrique $g_{\mu\nu}$ sur ces ouverts : soient

$U_1 = HA_*^+H(\lambda^{-1}e_4)$, $U_2 = KAH(\lambda^{-1}e_4)$ et $U_3 = NAH(\lambda^{-1}e_4)$.

Pour $V = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in U_1 \subset U_3 \subset U_2 = \mathcal{H}_\lambda \subset \mathbb{R}^5$, on a

$V = R_\omega h_\alpha a_{\lambda t}(\lambda^{-1}e_4) = R_\omega k_\xi a_{\lambda u}(\lambda^{-1}e_4) = R_\omega n_{\lambda\rho} a_{\lambda v}(\lambda^{-1}e_4)$,

où $R_\omega \in M$, a_t, a_u *et* $a_v \in A$, $h_\alpha \in H$ (via la décomposition de Cartan usuelle de H par rapport à M), $k_\xi \in K$ (via la décomposition de Cartan usuelle de K par rapport à M) et $n_{\lambda\rho} \in N$; i.e. :

$$V = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda^{-1} R_\omega \begin{pmatrix} sh\lambda t \; ch\alpha \\ 0 \\ 0 \\ sh\lambda t \; sh\alpha \\ ch\lambda t \end{pmatrix} = \lambda^{-1} R_\omega \begin{pmatrix} sh\lambda u \\ 0 \\ 0 \\ ch\lambda u \; sin\xi \\ ch\lambda u \; cos\xi \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^{-1} R_\omega \begin{pmatrix} sh\lambda v + \frac{\lambda^2\rho^2 e^{\lambda v}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \lambda\rho e^{\lambda v} \\ ch\lambda v - \frac{\lambda^2\rho^2 e^{\lambda v}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ecrivons la métrique $dx^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2$ sur ces trois cartes et nous obtenons (sans calculs!) le résultat précis suivant :

Proposition : La métrique $g_{\mu\nu}$, définie sur l'hyperboloïde $\mathcal{H}_\lambda$ et invariante par l'action du groupe de De Sitter S0(1,4), admet les trois formes (dites de Robertson-Walker) équivalentes suivantes :

i) sur l'ouvert U_1 : (5) $\quad ds^2 = dt^2 - \frac{sh^2\lambda t}{\lambda^2}(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2)$.

ii) sur l'ouvert U_2 : (6) $\quad ds^2 = du^2 - \frac{ch^2\lambda u}{\lambda^2}(d\xi^2 + sin^2\xi d\omega^2)$.

iii) sur l'ouvert U_3 : (7) $\quad ds^2 = dv^2 - e^{2\lambda v}(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)$.

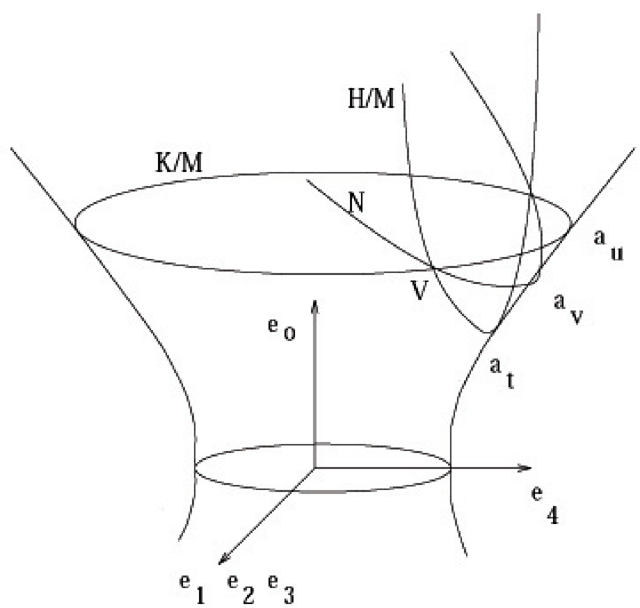

Figure 1 : L'hyperboloïde $\mathcal{H}_\lambda$ sur lequel sont représentées les trois paramétrisations du point V, associées aux trois décompositions du groupe SO(1,4).

A partir du lemme et de la proposition ci-dessus, on peut remarquer que le semi-groupe de Lie, de dimension 10, $S = HA_*^+H$ agit sur les trois ouverts U_1, U_2 et U_3 en les laissant stables et la métrique invariante ; nous appellerons ce semi-groupe le semi-groupe de Lie de causalité, dans la mesure où il permet de définir le cône du futur de chaque point de l'hyperboloïde $\mathcal{H}_\lambda$ d'une part et dans la mesure où il est engendré par le groupe de Lorentz

H et les translations strictement positives de temps A_*^+ d'autre part.
on obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 2 : Ces différents modèles de De Sitter $(U_1,\ dx^2)$, $(U_2,\ dx^2)$ et $(U_3,\ dx^2)$ sont invariants par le semi-groupe de Lie de causalité

$$S \ = \ HA_*^+H$$

engendré par les transformations de Lorentz et les translations positives de temps.

Autrement dit, ce SEMI-GROUPE de CAUSALITE définit une structure causale et donc une FLECHE du TEMPS sur ces modèles d'univers.

Remarques : 1 - Les changements de variables qui permettent de passer d'une forme à l'autre de la métrique $g_{\mu\nu}$ sont donnés par les différents paramétrages du point $V \in \mathcal{H}_\lambda$ et illustrés par la figure 1 : ils sont donc donnés par :

$$\begin{pmatrix} sh\lambda t\ ch\alpha \\ sh\lambda t\ sh\alpha \\ ch\lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh\lambda u \\ ch\lambda u\ sin\xi \\ ch\lambda u\ cos\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh\lambda v + \frac{\lambda^2\rho^2 e^{\lambda v}}{2} \\ \lambda\rho e^{\lambda v} \\ ch\lambda v - \frac{\lambda^2\rho^2 e^{\lambda v}}{2} \end{pmatrix}.$$

2 - Par une extension du théorème de Birkhoff les trois formes ci-dessus peuvent **localement** s'écrire sous la forme (en posant $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) :

$$ds^2 = (1 - \tfrac{\Lambda}{3}r^2)d\tau^2 - (1 - \tfrac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}dr^2 - r^2 d\omega^2.$$

3 - Les formes Minkowski-conformes de la métrique $g_{\mu\nu}$ s'obtiennent aisément en faisant la projection stéréographique de pôle $-\lambda^{-1}e_4$ sur l'hyperplan $x_4 = \lambda^{-1}$, la forme (6) devenant

$ds^2 = (1 - \frac{\Lambda}{12}(T^2 - r^2))^{-2}(dT^2 - dr^2 - r^2 d\omega^2)$, cf. V. Fock [4], et la forme (5) $ds^2 = (1 - \frac{\Lambda}{12}\tau^2)^{-2}(d\tau^2 - \tau^2(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2)$, c'est à dire conforme à la forme de Milne de la métrique de Minkowski.

4 - Les notions d'angles et de distances. Si pour les métriques (5) et (6) les variables α et ξ ont, de manière évidente une signification d'angles (respectivement ξ est un angle sphérique et α un angle hyperbolique) et non pas de distance, il en est de même pour la variable ρ dans la métrique (7) dont la partie espace est de courbure nulle. Cela apparaît clairement sur la figure 1, en effet la variable ρ paramètre une parabole, (ξ un cercle et α une hyperbole), pour cela nous dirons que $\lambda\rho$ est un angle parabolique. L'élément de distance euclidien associé est $dr = e^{\lambda v}d\rho$. De fait cette classification en terme d'angle (sphérique, parabolique, hyperbolique) est étroitement liée à l'obtention des coniques par section d'un hyperboloïde par un plan. Rappelons également qu'aussi bien F. Klein que W. K. Clifford utilisaient les noms de géométries elliptique, hyperbolique et parabolique (à la place d'euclidienne).

Ainsi, pour une même métrique, on peut obtenir trois formes de Robertson-Walker très différentes essentiellement par la partie "espace" : (5) décrit un modèle d'univers en expansion à partir d'un événement big-bang ;

(6) décrit un modèle d'univers éternel en rétraction puis en expansion sans événement big-bang ;

(7) est la métrique du célèbre modèle d'univers de F. Hoyle en expansion sans événement big-bang (plus précisément avec un événement big-bang à l'infini passé). La notion de forme de Robertson-Walker d'une métrique a un sens localement, elle ne peut donc à elle seule définir un modèle d'univers. Cet exemple, ne nécessitant aucun calcul du fait du recours à la théorie des groupes de Lie, permet de dire qu'à un tenseur impulsion-énergie donné et à une constante cosmologique donnée, il peut correspondre trois modèles d'univers différents.

Un autre exemple bien connu est celui du modèle de Milne qui est une forme de Robertson-Walker (non-statique) de la métrique de Minkowski ; rappelons ce résultat :

Lemme : La métrique de Minkowski admet deux formes de Robertson-Walker : $dt^2 - dr^2 - r^2 d\omega^2$, et $d\tau^2 - \tau^2(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2)$.

Pour passer de la forme usuelle, à la forme de Milne, définie sur le cône du futur de l'origine, il suffit de poser : $t = \tau ch\alpha$ et $r = \tau sh\alpha$.

L'utilisation des décompositions du groupe de Lie $SO_o(1,4)$ par rapport au groupe de Lorentz permet d'obtenir très simplement un autre nouveau résultat :

Théorème 3 : Tout modèle d'univers isotrope se plonge isométriquement dans l'espace $\mathbb{R}^5$ muni de sa métrique invariante par le groupe de De Sitter.

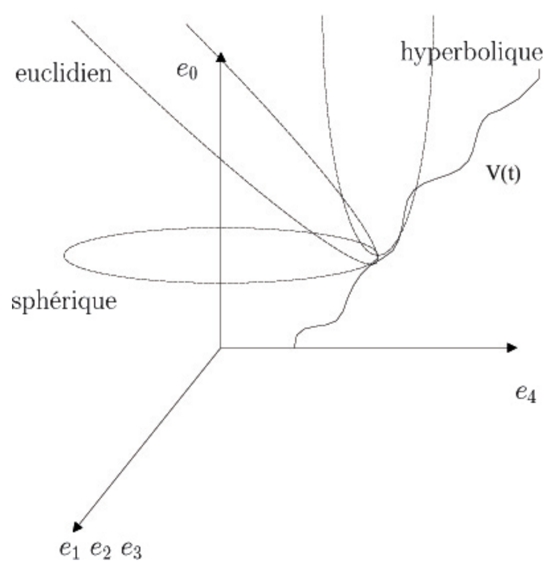

Illustration du plongement isométrique dans $\mathbb{R}^5$, où V est définie par :

$$V(t) = (\frac{1-\epsilon}{2}R + \epsilon\frac{1+\epsilon}{2}\int\sqrt{R'^2+\epsilon} + \frac{1-\epsilon^2}{2}\int\frac{1}{R'})e_0$$

$$+(\frac{1+\epsilon}{2}R - \epsilon\frac{1-\epsilon}{2}\int\sqrt{R'^2+\epsilon} - \frac{1-\epsilon^2}{2}\int\frac{1}{R'})e_4\ .$$

Ce théorème découle du lemme suivant :

Lemme : Le plongement des métriques de Robertson-Walker dans $\mathbb{R}^5$;

Pour chacune des trois formes d'univers homogènes et isotropes

$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2)$,

$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(d\xi^2 + sin^2\xi d\omega^2)$ et

$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)$, posons respectivement

$x = R_\omega h_\alpha(R(t)e_0 + \int\sqrt{R'^2 - 1}\ e_4)$, soit U_- la partie de $\mathbb{R}^5$ formée de ces points lorsque $\alpha\in\mathbb{R}$, $R_\omega \in SO(3)$ et t réel ;

$x = R_\omega k_\xi(\int\sqrt{R'^2 + 1}\ e_0 + R(t)e_4)$, soit U_+ la partie de $\mathbb{R}^5$ correspondante ;

$x = R_\omega n_\rho(R(t)\frac{e_0+e_4}{2} + \int\frac{1}{R'}\frac{e_0-e_4}{2})$ définit U_o ;

alors pour les trois formes on a : $dx^2 = ds^2$
où dx^2 est la restriction à U_ϵ de la métrique sur $\mathbb{R}^5$ invariante par SO(1,4).

La seule difficulté pour établir ce lemme fut de définir ces plongements, en particulier les applications $t \to V(t)$ à partir de $R(t)$ et ϵ.

Remarque : Lorsque $\epsilon = -1$, pour que le plongement soit possible, il faut que $R'^2 - 1$ soit positif, ce qui équivaut à T_0^0 positif, il n'y a donc pas de restriction du point de vue du physicien. Cependant, lorsque T_0^0 est négatif, on peut toujours faire un plongement dans $\mathbb{R}^5$, muni de la métrique anti-De Sitter, c'est à dire invariante par le groupe SO(2,3).

On a ainsi obtenu la réalisation de tous les modèles d'univers homogène et isotrope, comme sous-variétés de $\mathbb{R}^5$, muni de la métrique induite par la métrique invariante par le groupe de De Sitter.

Quel est l'intérêt de ces trois théorèmes ?

Pour illustrer un modèle d'univers, il est très souvent utilisé l'image du ballon que l'on gonfle ; cette image peut donner parfois une fausse idée : pour les modèles de De Sitter, le ballon à l'instant t est représenté par la "sphère" K/M, sphère qui représente la partie espace à l'instant t que si $\epsilon = +1$. Pour $\epsilon = -1$, il faudrait prendre un "ballon" ouvert en forme d'hyperboloïde (H/M) et pour $\epsilon = 0$ ce "ballon" ouvert aurait la forme d'un paraboloïde (N). Le deuxième théorème, celui du plongement conduit exactement à la même représentation visuelle. C'est le premier intérêt, en l'espèce celui de pouvoir se donner une image plus juste de la forme d'un modèle d'univers, dans le cadre géométrique de la relativité générale.

Le deuxième intérêt est celui de bien mettre en évidence que pour obtenir un modèle d'univers, il faut non seulement trouver la fonction $R(t)$, mais aussi la variété V sur laquelle va vivre la métrique.

Le troisième intérêt, vient des observations astronomiques récentes qui nécessitent la réintroduction de la constante cosmologique, qui seule permet d'expliquer l'expansion accélérée constatée. Or pour tout modèle accéléré (décrit par sa forme de Robertson-Walker), il est immédiat de montrer que la fonction $R(t)$ tend asymptotiquement vers $\frac{sh(\lambda t)}{\lambda}$ ou $\frac{ch(\lambda t)}{\lambda}$

ou $\frac{exp(\lambda t)}{\lambda}$, suivant le signe de ϵ. Autrement dit **les modèles de De Sitter fournissent une approximation (asymptotique) des modèles d'univers accélérés**.

Le quatrième intérêt provient de la structure causale dont sont canoniquement munis ces modèles de De Sitter qui sont donc exempts du problème dit de l'horizon.

Dans ce cadre géométrique, on peut alors considérer certains objets.

Par exemple considérons la courbe décrivant la trajectoire comobile d'un corps en chute libre ; elle s'écrit : $t \rightarrow V(t)$ (voir l'illustration du plongement).

Considérons alors la courbure $\lambda(t)$ dans le plan (e_o, e_4) pseudo-euclidien, car muni de la métrique induite, de cette trajectoire comobile :

$\lambda(t) = \frac{det(V'(t), V"(t))}{\|V'(t)\|^3} = \frac{R"}{\sqrt{R'^2+\epsilon}}$, autrement dit, par intégration, on a :

$R(t) = \int(e^{\int \lambda} + \frac{\epsilon}{2}(e^{-\int \lambda} - \epsilon e^{\int \lambda}))$; Cette formule, qui utilise un objet intrinsèque (la courbure $\lambda(t)$), n'a que le mérite de généraliser simplement les trois formes de Robertson-Walker de la métrique de De Sitter (cas pour lequel λ est une constante). En utilisant les équations d'Einstein, cette courbure peut s'écrire uniquement à l'aide du tenseur impulsion-énergie :

$\lambda(t) = \sqrt{\frac{8\pi G T_0^0}{3} \frac{3T_1^1 - T_0^0}{2T_0^0}}$.

Cette jolie formule ne présente pas d'intérêt pour calculer $\lambda(t)$ puis $R(t)$, dans la mesure où T_0^0 et T_1^1 dépendent de $R(t)$.

En fait l'intérêt le plus important de cette interprétation géométrique, par plongement dans $\mathbb{R}^5$ d'une forme de Robertson-Walker, est l'interprétation angulaire des variables ξ, α et ρ :

α est un angle hyperbolique et ξ un angle sphérique et

ρ ... un ANGLE PARABOLIQUE.

Ainsi pour une métrique donnée sous la forme

$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)$, $R(t)$ sera toujours une distance et ρ un angle (parabolique), ce qui permet d'une part de bien unifier les notations et d'autre part d'éviter des erreurs trop souvent rencontrées provenant de la non prise en compte du fait que ρ est une grandeur sans dimension.

§E) **La forme la plus générale de métrique d'univers homogène et isotrope**.

Tous les ouvrages de cosmologie présentent le modèle standard de l'univers à partir d'une hypothèse simple mais forte, (en plus des hypothèses sous tendues par la Relativité Générale) : l'univers est homogène et isotrope à grande échelle.

Cette hypothèse, appelée Principe Cosmologique, est d'une part une expression des observations, les super-amas de galaxies semblent répartis de manière uniforme dans toutes les directions, d'autre part l'expression d'un postulat, notre position, à cette échelle le super-amas de la Vierge, est un point quelconque de l'espace cosmique.

Ce principe cosmologique est traduit en termes mathématiques, et les auteurs, par une voie ou par une autre, arrivent à la formulation mathématique de ce principe dans le cadre de la Relativité Générale.

Théorème : Un modèle d'univers homogène et isotrope est décrit par une métrique qui, dans des coordonnées comobiles avec le fluide cosmique, a la forme :

(8) $ds^2 = g^2(\tau)d\tau^2 - f^2(\tau)d\Omega^2_\epsilon$

où $d\Omega^2_\epsilon$ est la métrique canonique soit de $\mathbb{R}^3$ ($\epsilon = 0$), soit de la sphère S^3 dans $\mathbb{R}^4$ ($\epsilon = +1$), soit d'une nappe $\mathcal{H}^3$ de l'hyperboloïde à deux nappes dans $\mathbb{R}^4$ ($\epsilon = -1$).

La preuve repose sur la traduction de l'homogénéité et de l'isotropie par le fait que l'espace des vecteurs de Killing est de dimension 6 et contient la sous-algèbre de Lie des rotations (aspect infinitésimal), ou (aspect global) qu'il existe un groupe de Lie de dimension 6 agissant sur V en laissant la métrique g invariante et contenant un groupe isomorphe au groupe des rotations. La traduction globale est une hypothèse légèrement plus forte que la traduction infinitésimale, mais c'est celle qui est usuellement prise.

Une habitude trop fréquente est le fait de "normaliser" cette métrique en posant $dt = g(\tau)d\tau$, ce qui permet d'obtenir la forme, dite de Robertson-Walker de la métrique ds^2

(1) $ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\Omega^2_\epsilon$

Deux aspects restent imprécis dans la réalisation mathématique de ce principe cosmologique :

a) Avant de définir une métrique, il faut avoir préalablement défini l'espace, la variété de dimension 4, sur laquelle cette métrique est définie. C'est nécessaire, en particulier pour ne pas faire d'erreur dans d'éventuels changements de variables. De fait dans les ouvrages il n'est jamais précisé le domaine de définition des variables "temporelles" τ ou t.

b) Pourquoi affaiblir la métrique (8) qui dépend de deux fonctions arbitraires g et f en la métrique (1) qui ne dépend plus que d'une seule fonction R, appelée souvent rayon de l'univers (!) ?

Ces deux aspects a) et b) ne seraient par gênants, si au bout du compte on aboutissait à des résultats cohérents. En fait, il n'en est rien !

En adoptant (1) comme métrique, il est implicitement admis qu'un modèle d'univers est bien défini par la fonction R(t), une fois fixés, bien sûr, un tenseur impulsion-énergie et une valeur de la constante cosmologique Λ.

Voici un contre-exemple à ce théorème implicite :

Nous allons présenter trois modèles d'univers qui sont différents, à l'aide de la métrique (8) : le premier décrit un univers en expansion monotone depuis le "big-bang", le deuxième décrit un univers en expansion accélérée depuis le "big-bang", le troisième décrit un univers oscillant entre deux "big-bang" consécutifs. Pourtant pour ces trois modèles, la forme de Robertson-Walker (1) de la métrique est la même !

i) Soit U_0 le cône du futur de l'origine O dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4$, muni de la métrique

(9) $ds^2 = d\tau^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ pour $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$.

Paramétrons U_0 en utilisant l'hyperboloïde $\mathcal{H}^3$. $U_0 = \mathbb{R}^*_+ \times \mathcal{H}^3$. Alors dans cette réalisation de la variété U_0 la métrique s'écrit

(10) $ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 d\Omega^2_{-1}$, où $d\Omega^2_{-1}$ est la métrique canonique sur $\mathcal{H}^3$ (c'est-à-dire la métrique invariante par le groupe de Lorentz $SO_0(1, 3)$). C'est la métrique de Milne.

Voici une représentation de U_0 en dimension 3 :

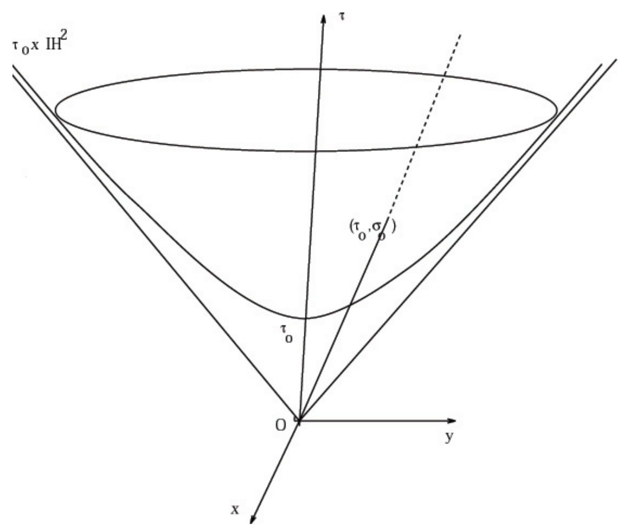

Figure 2 : l'hyperboloïde $U_0 = \{(\tau, x, y)/\tau^2 > x^2 + y^2;\ \tau > 0\}$.
Les équations d'Einstein du vide ($\Lambda = T_{\mu\nu} = 0$) sont vérifiées par la métrique (10).

Ce modèle correspond à un univers en expansion monotone à partir du point O, qui n'appartient pas à U_0 , censé représenter le big-bang. Pour s'en persuader, il suffirait par exemple de considérer les demi-droites (τ, σ_0), où σ_0 est un point fixé de $\mathcal{H}^3$; ce sont les géodésiques suivies par les corps en chute libre.

ii) Soit, pour $\lambda > 0$, le modèle d'univers $U_\lambda = \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{H}^3$ muni de la métrique

(11) $ds^2 = \frac{1}{ch^4 \frac{\lambda\tau}{2}}(d\tau^2 - \frac{sh^2\lambda\tau}{\lambda^2} d\Omega_{-1}^2)$

Cette métrique a bien la forme (8) avec $g(\tau) = \frac{1}{ch^2 \frac{\lambda\tau}{2}}$ et $f(\tau) = \frac{sh\lambda\tau}{\lambda ch^2 \frac{\lambda\tau}{2}}$.
En fait cette métrique (11) est solution des équations d'Einstein du vide. Comme $g(\tau) = f'(\tau)$, la forme de Robertson-Walker de (11) est $ds^2 = dt^2 - t^2 d\Omega_{-1}^2$, c'est-à-dire la même que la forme de Robertson-Walker de (10). Pourtant ce modèle décrit un univers en expansion accélérée à partir d'une singularité initiale. Pour le voir, on peut regarder la trajectoire d'un corps en chute libre.

(iii) Soit enfin, pour $\lambda > 0$, le modèle d'univers
$U_{i\lambda} =]0\ ,\ \frac{\pi}{\lambda}[\times \mathcal{H}^3$ muni de la métrique

(12) $ds^2 = \frac{1}{cos^4 \frac{\lambda\tau}{2}}(d\tau^2 - \frac{sin^2\lambda\tau}{\lambda^2} d\Omega_{-1}^2)$

Comme on peut s'en douter, la métrique (12) est solution des équations d'Einstein du vide et sa forme de Robertson-Walker est encore $ds^2 = dt^2 - t^2 d\Omega_{-1}^2$. Ce modèle représente un univers oscillant entre deux big-bang successifs (obtenus lorsque $\tau \to 0$ ou $\tau \to \frac{\pi}{\lambda}$) .

Je pense que, à cause de ce contre-exemple, il est temps de se défaire définitivement de cette forme de métrique (1) prise a priori. Il faut dire cependant que les modèles de Friedmann qui en sont issus ont eu le mérite de proposer des modèles d'univers prenant en compte des faits nouveaux et faisant considérablement avancer la cosmologie ; mais ce sont des modèles qu'il faut maintenant oser abandonner pour pouvoir avancer.

Commentaires sur les modèles U_0, U_λ et $U_{i\lambda}$.

a) Ces modèles ne tombent pas du ciel mais proviennent de l'étude des trois groupes cinématiques compatibles avec l'électromagnétisme. Ils sont construits à partir du groupe de Poincaré et des deux groupes de De Sitter qui sont des sous-groupes du groupe conforme, groupe des invariants des équations de Maxwell. Ils réconcilient donc électromagnétisme et gravitation à grande échelle et traduisent par construction le caractère en expansion monotone, accélérée et oscillant de ceux-ci.

b) Réalisés comme cône du futur d'un point dans un espace homogène associé à chaque groupe cinématique, ces modèles présentent l'intérêt d'expliquer directement l'isotropie du rayonnement cosmologique à 3^oK et l'absence de phénomène d'horizon, ce qui ne peut en aucun cas être expliqué dans le cadre du modèle standard de Friedmann.

c) Une métrique du type (1) ou (8) définie sur une variété V, possède toujours un groupe de Lie de dimension 6, contenant les rotations (le groupe SO(3)) et qui laisse invariant $d\Omega^2_\epsilon$ donc ds^2 ; c'est ce que l'on appelle le groupe d'isotropie. Dans le modèle standard, ce groupe d'isotropie contient les translations géométrique d'espace et ce groupe est différent suivant la nature (expansion monotone, accélérée, oscillant) de l'univers. Par contre pour les métriques (10), (11) et (12), le groupe d'isotropie est toujours le même et a la signification des transformations de Lorentz (on retrouve l'hypothèse cosmologique de V. FOCK). En fait, les translations d'espace d'un groupe d'isotropie sont des transformations mathématiques, en aucun cas elles ont la signification d'un déplacement physique dans l'univers.

d) Il faut signaler que, comme le tenseur de courbure des métriques (10), (11) et (12) est identiquement nul, ces modèles correspondent à des univers vide de matière. Ils sont donc bien trop simples, mais compatible avec l'électromagnétisme.

e) Toutes les métriques de la forme $ds^2 = f'^2(\tau)d\tau^2 - f^2(\tau)d\Omega^2_{-1}$ possèdent la même forme de Robertson-Walker, la métrique de Milne :

$ds^2 = dt^2 - t^2 d\Omega^2_{-1}$. Ceci pose le problème de la signification des variables temporelles τ et t et de leur rapport.

f) Notons encore la forme conformément statique de la métrique (8), qui peut s'écrire : $ds^2 = \theta^2(u)(du^2 - d\Omega^2_\epsilon)$, ce qui fait apparaître une autre variable temporelle.

§F) **Sur les variables temporelles**

Qu'est-ce le temps cosmologique ? Quel est son rapport avec le temps atomique ? En revenant sur l'exemple ci-dessus à partir duquel on a fait apparaître plusieurs variables temporelles différentes, nous allons montrer qu'une hypothèse est implicitement admise : C'est une hypothèse cinématique qui qualifie l'additivité du temps ou si l'on préfère l'horloge d'un observateur comobile.

Prenons donc un modèle d'univers homogène et isotrope et prenons le système de coordonnées comobiles pour lequel l'observateur en chute libre possède une horloge additive ; d'après le théorème sur la forme générale d'une telle métrique on a : $ds^2 = g^2(\tau)d\tau^2 - f^2(\tau)d\Omega^2_\epsilon$.

Définition : Nous appellerons temps cosmologique un tel temps additif τ pour l'observateur comobile en chute libre.

L'hypothèse implicitement admise est de dire, en prenant la forme de Robertson-Walker, que $g(\tau) = 1$ (à une constante multiplicative de normalisation près), autrement dit que le temps atomique coïncide avec ce temps cosmologique (défini par l'horloge de l'observateur en chute libre). Il est également admis qu'un tel temps cosmologique existe ! Autrement dit, l'hypothèse implicitement admise est celle de la validité du principe géodésique pour les corps massifs en chute libre.

Lorsque le temps cosmologique est différent du temps atomique se pose alors un autre problème, celui de la complétude géodésique. En effet reprenons l'exemple du paragraphe précédent. La variété U_λ, munie de la métrique (11), n'est pas futur géodésiquement complète mathématiquement parlant, mais elle est "futur géodésiquement complète" pour l'observateur en chute libre si l'on fait l'hypothèse que son horloge (additive) est paramétrée par τ.

Nous dirons cependant qu'elle est futur géodésiquement complète par rapport à la variable temporelle additive τ.

Les quatre temps :

Soit donc une métrique d'univers homogène et isotrope écrite dans le système de coordonnées comobiles tel que la variable temporelle soit additive pour tout observateur comobile (on suppose qu'un tel temps existe) ; cette métrique est de la forme

$ds^2 = g^2(\tau)d\tau^2 - f^2(\tau)d\Omega_\epsilon^2$.

Par définition τ est le temps cosmologique.

Le temps atomique est défini par la forme de Robertson-Walker

$ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\Omega_\epsilon^2$ de cette métrique (Relativité restreinte sur l'espace tangent oblige).

Ce temps atomique t n'est donc pas additif en général : En effet, comme $dt = g(\tau)d\tau$ on a $t = G(\tau)$ et donc $t_1 + t_2 \neq G(G^{-1}(t_1) + G^{-1}(t_2))$ sauf si ces deux temps sont proportionnels. Si le temps cosmologique est différent du temps atomique alors le facteur $g(\tau)$ peut être interprété comme représentant un modèle d'univers pour lequel la vitesse de la lumière $g(\tau)$ est variable (cf. J. P. Petit [7]).

Outre ces deux variables temporelles privilégiées, il en existe d'autres :

Par exemple le temps température est défini en écrivant la métrique sous une forme conforme à une métrique statique (cf. J. M. Souriau [8]), ce qui est toujours possible :

$ds^2 = \theta^2(u)(du^2 - d\Omega_\epsilon^2)$; I. Segal [9] appelle cette variable temporelle u, un temps propre et J.M. Souriau identifie $\theta(u)$ à $\frac{1}{kT}$ où k désigne la constante de Boltzmann et T désigne la température de l'univers (dans le cas particulier où l'on suppose que les temps cosmologique et atomique coïncident).

Le temps cinématique est obtenu en écrivant la métrique de manière conforme à celle de De Sitter : $ds^2 = h^2(\nu)(d\nu^2 - (\frac{e^{\lambda\nu} + \epsilon e^{-\lambda\nu}}{2\lambda})^2 d\Omega_\epsilon^2)$. Il permet d'écrire la métrique sous une forme conforme à une métrique invariante par un des groupes cinématiques possibles, compatible avec l'électromagnétisme, dans ce cas il s'agit du groupe cinématique de De Sitter.

Nous venons d'écrire ces formes d'une même métrique en faisant apparaître différents facteurs conformes, chacun de ces facteurs conformes exprime une propriété de la variable temporelle choisie. Il est à noter que beaucoup de définitions de modèles d'univers font appel à cette notion de métriques conformément équivalentes (ou de facteur conforme).

Par exemple celle de Segal [9], un univers est un ouvert du recouvrement universel du compactifié conforme de l'espace de Minkowski, muni d'une métrique conformément équivalente à la métrique canonique. Celle de Dirac, Canuto etc. [10] pour lesquels le facteur conforme exprime une relation évolutive entre un système d'unités atomique et un système d'unités cosmologique. Celle de V. Fock [4] pour lequel une métrique d'univers doit être invariante par l'action du groupe de Lorentz et donc est de la forme $ds^2 = S(T^2 - r^2)(dT^2 - dr^2 - r^2 d\omega^2)$, c'est à dire une métrique Minkowski-conforme.

§G) **Récapitulatif d'hypothèses implicitement ou explicitement admises.**

Après les différentes études théoriques des paragraphes précédents, faisons le point en écrivant explicitement les hypothèses qui sous-tendent la construction des modèles d'univers. Cette mise en évidence d'hypothèses est rarement faite, voir cependant le joli travail de J.-M. Souriau [8] qui va dans ce sens.

Si l'on se réfère au schéma de modélisation donné en introduction, une "hypothèse" pourra être lue comme une explicitation de la flèche de traduction **axiome** $\leftarrow$ **principe**.

Hypothèse 1 : Un modèle d'univers est la donnée d'une variété V, de dimension 4, munie d'une métrique g de signature (1,3).

Hypothèse 2 : Les rayons lumineux suivent les géodésiques isotropes de la métrique d'univers g.

Hypothèse 3 : Le modèle (V, g) est homogène et isotrope.

Mathématiquement cela se traduit par le fait que l'espace des vecteurs de Killing est de dimension 6 et contient la sous-algèbre de Lie des rotations (aspect infinitésimal), ou (aspect global) qu'il existe un groupe de Lie de dimension 6 agissant sur V en laissant la métrique g invariante et contenant un groupe isomorphe au groupe des rotations. La traduction globale est une hypothèse légèrement plus forte que la traduction infinitésimale, mais c'est celle qui est usuellement prise dès que l'on admet que la métrique g peut se mettre sous une forme de Robertson-Walker (forme (1)). Se donner une forme de Robertson-Walker, c'est se donner un système de cartes particulières sur V et écrire la métrique g dans ce système particulier de coordonnées comobiles.

Hypothèse 4 : Il existe un temps cosmologique (additif) et la variété V est futur géodésiquement complète relativement à ce temps.

Si on suppose qu'elle est géodésiquement complète, on s'interdit les modèles provenant d'un big-bang ponctuel.

Hypothèse 5 : La relativité restreinte est valide localement (i.e. l'espace tangent TV est un fibré sur V de fibre l'espace de Minkowski).

Cette hypothèse est trop souvent implicite et pourtant elle est admise pour retrouver la physique de laboratoire. Par ailleurs, comme nous l'avons signalé plus haut, elle est admise dès que l'on veut parler du contenu énergétique de l'univers à travers le tenseur impulsion-énergie (en utilisant $E = mc^2$). Cette hypothèse a pour conséquence la fixation, une fois pour toute, d'un système d'unités atomiques. Mais l'acceptation du fait que les constantes atomiques sont des constantes devra faire l'objet d'une hypothèse supplémentaire.

Hypothèse 6 : Les équations d'Einstein, $G^\mu_\nu = \kappa T^\mu_\nu$, sont valables sur tout le modèle (V, g).

C'est une hypothèse qui est locale, bien que sa formulation semble globale. En effet comme ces équations, écrites dans un système de cartes, forment un système différentiel, comme tout système différentiel, elles sont de nature locale.

Hypothèse 7 : La constante κ, reliant le tenseur d'Einstein G^μ_ν et le tenseur impulsion-énergie T^μ_ν, est proportionnelle à la constante de Newton G.

Cette hypothèse, implicitement admise, a une conséquence importante :
Le tenseur impulsion-énergie T^μ_ν ne peut qu'avoir une interprétation locale (cf. § C ci-dessus), dans un système de coordonnées localement inertiel et comobile.

Hypothèse 8 : La composante T^0_0 du tenseur impulsion énergie, écrite dans une carte d'un système de coordonnées comobiles, représente le contenu énergétique (local) de l'univers, en tout point où ce repère comobile est inertiel.

Il n'est pas besoin de faire une hypothèse sur les autres composantes qui sont fixées par les identités de Bianchi (cf. § C).

Cette hypothèse est de nature locale, et non pas globale comme l'hypothèse usuellement prise disant que le fluide cosmique est un fluide parfait (ce qui n'est qu'une interprétation thermodynamique de l'équation (4)).

Cette importante hypothèse 8 dit que T^0_0 représente une densité dans un système de coordonnées localement inertiel et a pour conséquence que T^0_0 **représente une COdensité dans un système de coordonnées COmobiles**, comme nous le montrerons au § suivant.

Ce système d'hypothèses devra être complété par d'autres hypothèses, de nature physique, précisant d'une part le contenu de l'univers (i.e. T^0_0), par exemple univers de matière sans rayonnement, de rayonnement pur (qui suit la loi des corps noirs ?) etc..., d'autre part le rapport existant entre le temps cosmologique et le temps atomique.

Nous noterons en lettres majuscules latines les hypothèses de nature physique qui permettent l'achèvement d'un modèle. Plusieurs systèmes (incompatibles entre eux) nous donneront des modèles différents.

Les hypothèses simples le plus généralement prises (implicitement ou explicitement) sont les suivantes :

Hypothèse A : Le temps cosmologique et le temps atomique coïncident.

Ceci signifie que l'on suppose que $d\tau = dt$, autrement dit la métrique d'univers écrite dans le système de coordonnées comobiles pour lequel le temps est additif, est une métrique de Robertson-Walker. Cette hypothèse signifie que, si on admet le principe des géodésiques pour les corps massifs en chute libre, les constantes sont effectivement constantes, en particulier la vitesse de la lumière, la constante de la gravitation, la masse des particules élémentaires, la constante de Planck etc... Il est évident que contrairement aux hypothèses ci-dessus, celle-ci peut être modifiée par exemple en prenant en compte le fait que les constantes atomiques ne sont pas forcément des constantes à l'échelle cosmologique (hypothèse de P.A.M. Dirac, Canuto, etc...), ce qui nous obligera à introduire un facteur conforme.

Hypothèse A' : Les constantes atomiques sont des constantes cosmologiques.

Hypothèse A" : (Elle résume les deux hypothèses précédentes) ; Les corps massifs en chute libre suivent les géodésiques.

Hypothèse B : La matière cosmique comobile est sans création de matière et sans interaction avec le rayonnement de fond cosmologique (depuis le découplage matière - rayonnement).

Cette hypothèse est traduite, par analogie avec la thermodynamique, en disant que le tenseur impulsion-énergie représentant la matière comobile est celui d'un gaz parfait à pression nulle et que $T_0^0 R^3 = constante$. Le paragraphe suivant examinera ce problème en montrant qu'une telle traduction de cette hypothèse est en contradiction avec les hypothèses précédentes, en particulier les hypothèses 5 et 7.

Hypothèse C : Le rayonnement de fond cosmologique suit la loi des corps noirs.

Cette hypothèse est basée sur les observations, chaque jour de plus en plus précises, sur ce rayonnement isotrope, trace du découplage matière-rayonnement. Le problème est de transcrire cette propriété observée en propriété du tenseur impulsion-énergie. C'est l'objet du paragraphe suivant.

J'espère n'avoir pas oublié d'hypothèses implicitement admises, pouvant soulever d'autres questions de fond que celles présentées précédemment.

§2 **Sur le tenseur impulsion-énergie**.

Nous allons étudier l'hypothèse 8, en sachant que, sous l'hypothèse A (le temps cosmologique coïncide avec le temps atomique), le tenseur impulsion-énergie représente une densité d'énergie calculée dans le système d'unités défini sur l'espace de Minkowski tangent.

Pour pouvoir confronter un modèle aux observations (densité estimée de matière comobile, valeur actuelle du paramètre de Hubble, etc...), il faut se fixer **une fois pour toute un système d'unités atomiques**. Par exemple on peut le choisir de telle sorte que la métrique (1) approxime celle de Minkowski de l'espace tangent en un point $(t_0, \alpha_0, \omega_0)$ fixé, autrement dit le repère comobile est localement inertiel en ce point.

§2 A) **Hypothèse sur le tenseur impulsion-énergie** :

La densité d'énergie est représentée localement par $T_0^0(t)$ (dans un système comobile de coordonnées, localement inertiel au temps t) ; c'est l'hypothèse 8 qui signifie que, un champ de système d'unités physiques
u : $(t, \alpha, \omega) \rightarrow\ u(t, \alpha, \omega)$ ayant été fixé dans l'espace tangent en chaque point (t, α, ω),
$T_0^0(t, \alpha, \omega) = \rho_u(t, \alpha, \omega)$, où $\rho_u(t, \alpha, \omega)$ est la densité locale d'énergie observée au point (t, α, ω), dans le système d'unités $u(t, \alpha, \omega)$.

L' hypothèse usuellement prise, est globale et confortée par une analogie avec l'hydrodynamique (je le souligne après S. Weinberg [2]) du fait que l'équation de conservation (provenant des identités de Bianchi) est formellement celle d'un fluide parfait. Nous ne supposons qu'une l'hypothèse faible et locale, mais par contre nous utiliserons, à la place, le fait que localement on a la relativité restreinte. La thermodynamique, pourra alors permettre une interprétation.

Choix d'un système particulier d'unités :

Un système d'unités, sauf l'unité de longueur, ayant été fixé une fois pour toute sur l'espace de Minkowski, pour que ce système coïncide avec celui de l'espace de la relativité restreinte tangent en un point du modèle de l'univers défini par la métrique de Robertson-Walker, il faut définir l'unité de longueur. Cette définition peut se faire, en un temps t_1 fixé, par le choix de $R(t_1)$ comme unité de longueur. Soit $u(t_1)$ ce système d'unités, et soit R_1 la fonction $t \rightarrow\ R_1(t) = \frac{R(t)}{R(t_1)}$, alors l'élément de longueur est $dl = R_1(t_1)d\alpha = d\alpha$ sur l'espace de Minkowski. Ainsi un choix de système d'unités $u = u(t_1)$ dépend du choix du temps de la normalisation de la fonction R(t), mais ne dépend pas du point pris dans la section d'espace associé au temps t_1.

Notons $t\ \rightarrow\ \rho_1(t) = \rho_{u(t_1)}(t)$, l'évolution de la densité calculée dans le système d'unités $u(t_1)$, i.e. avec l'unité de longueur $R(t_1)$. De même notons $t\ \rightarrow\ \rho_0(t) = \rho_{u(t_0)}(t)$, l'évolution de la densité calculée avec l'unité de longueur $R(t_0)$ au temps t_0.
D'après l'hypothèse on a : $T_0^0(t)(t_0) = \rho_0(t_0)$, et $T_0^0(t_1) = \rho_1(t_1)$; comparer $T_0^0(t)(t_0)$ et $T_0^0(t_1)$ revient à étudier les rapports existants entre les fonctions densité $\rho_0(.)$ et $\rho_1(.)$.

D'autre part, dans les notations utilisées, la métrique (1) peut s'écrire sous les deux formes suivantes (en notant $R_0(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)}$) :

(13) $ds^2 = c_1^2 dt^2 - R_1^2(t)(d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2))$,

(14) $ds^2 = c_0^2 dt^2 - R_0^2(t)(\frac{R_1^2(t_1)}{R_0^2(t_1)}(d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2))$,

la première formule est une normalisation de la métrique au temps t_1, la deuxième servira à comparer ces normalisations en des temps t_0 et t_1 différents . On a donc $R_1(t) =$

$\frac{R_1(t_1)}{R_0(t_1)}R_0(t)$. Rappelons que, dans ces notations, α est un angle (hyperbolique, parabolique ou sphérique suivant la valeur de ϵ).
Comparons $\rho_0(t)$ et $\rho_1(t)$; pour cela calculons la densité d'énergie $\frac{dM(t)}{dV(t)}$ au temps t ; on a, dans le système d'unités $u(t_0)$, $\frac{dM(t)}{dV(t)} = \rho_0(t) = \frac{dM(t)}{R_0^3(t)d\alpha^3}$ et, dans le système d'unités $u(t_1)$, $\frac{dM(t)}{dV(t)} = \rho_1(t) = \frac{dM(t)}{R_1^3(t)d\alpha^3}$, et donc $\frac{\rho_0(t)}{\rho_1(t)} = \frac{R_1^3(t)}{R_0^3(t)}$.

Proposition : Sous l'hypothèse 8 suivant laquelle la composante T_0^0 du tenseur impulsion-énergie représente localement la densité d'énergie, le rapport des densités $\rho_0(t)$ et $\rho_1(t)$ (calculées dans les unités $u(t_0)$ et $u(t_1)$ respectivement) vérifie :

$$(15) \qquad \frac{\rho_0(t)}{\rho_1(t)} = \frac{R_1^3(t)}{R_0^3(t)} = \frac{R^3(t_0)}{R^3(t_1)} \ .$$

Réécrivons ce résultat au temps $t = t_0$, on a : $\rho_0(t_0) = \frac{R^3(t_0)}{R^3(t_1)}\rho_1(t_0)$ et donc, comme $T_0^0(t_0) = \rho_0(t_0)$ et $T_0^0(t_1) = \rho_1(t_1)$, on obtient la relation suivante :

$$(16) \qquad T_0^0(t_0) = \rho_0(t_0) = \frac{R^3(t_0)}{R^3(t_1)}\frac{\rho_1(t_0)}{\rho_1(t_1)}T_0^0(t_1) \ ,$$

indépendamment d'une équation d'état de la matière d'un modèle d'univers. C'est cette équation qui servira par la suite pour l'étude de modèles d'univers.

Remarque : On aurait pu se donner un système d'unités u, fixé une fois pour toute sur l'espace de Minkowski, puis se donner en chaque point $(t_0, \alpha_0, \omega_0)$ un élément d'unité de longueur $d\alpha(t_0)$ tel que la métrique en ce point admette le système u sur l'espace tangent. Pour cela il suffit de poser $d\alpha(t_0) = R(t_0)d\alpha$ et la métrique s'écrit :
$ds^2 = c^2dt^2 - R_0^2(t)(d\alpha(t_0)^2 + R^2(t_0)f_\epsilon^2(\frac{\alpha(t_0)}{R(t_0)})d\omega^2)$; La comparaison des normalisations en deux temps t_0 et t_1 conduit à la même proposition.

Deuxième preuve de la formule (16) :
Nous venons d'établir la formule (16) sans utiliser explicitement le concept de repère localement inertiel. Voici une deuxième preuve (courte) qui ne fera appel qu'à ce concept, sans utiliser (explicitement) un champ de système d'unités.
Soit donc $ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)(d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2)$, la métrique isotrope écrite dans un système de coordonnées comobiles.
Sachant que localement le tenseur impulsion-énergie s'interprète dans un système localement inertiel, écrivons cette métrique dans un système inertiel (et comobile) pour aujourd'hui, au temps t_0, et pour hier, au temps t_1.
(13 bis) $ds^2 = c^2dt^2 - \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)}(R^2(t_0)d\alpha^2 + R^2(t_0)f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2)$;
(14 bis) $ds^2 = c^2dt^2 - \frac{R^2(t)}{R^2(t_1)}(R^2(t_1)d\alpha^2 + R^2(t_1)f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2)$;
Donc, en notant $d\alpha_0 = R(t_0)d\alpha$ et $d\alpha_1 = R(t_1)d\alpha$, on obtient exactement les repères comobiles et inertiels respectivement au temps t_0 et t_1, au point $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Ainsi le rapport des éléments de volume est $(\frac{d\alpha_0}{d\alpha_1})^3 = \frac{R^3(t_0)}{R^3(t_1)}$; Le calcul des densités dans ces deux repères donne immédiatement :

$\rho_0(t) = \frac{dM(t)}{d\alpha_0^3} = \frac{dM(t)}{d\alpha_1^3}\frac{R^3(t_1)}{R^3(t_0)}$ et par conséquent la loi :
$\rho_0(t)R^3(t_0) = \rho_1(t)R^3(t_1)$.
Comme $T_0^0(t_0) = \rho_0(t_0)$ et $T_0^0(t_1) = \rho_1(t_1)$, on obtient la formule (16).

Nous venons de montrer (par deux présentations équivalentes des calculs) que le concept de repère inertiel est d'une part fondamental et d'autre part a été le grand oublié dans l'établissement du modèle standard de l'univers.

En fait nous pouvons résumer cette formule (16) en disant que dans un système de coordonnées COmobile, T_0^0 exprime une COdensité.

Utilisons cette formule (16) pour étudier le modèle d'univers le plus simple.

§2 B) **Univers sans création continue de matière, ni rayonnement**.

Nous supposons que toute l'énergie se trouve dans la matière comobile (nous supposons donc qu'il n'y a pas d'énergie de rayonnement, ni du vide) et écrivons le fait qu'il n'y a pas de création de matière :

$$(17) \quad \rho(t)R^3(t) = \rho* = constante,$$

où $\rho(t)$ désigne la densité de matière comobile, cette formule n'ayant de sens que si un système d'unités a été préalablement fixé. En particulier pour le système d'unités $u(t_1)$, on a :
$\rho_1(t)R_1^3(t) = constante$, et donc $\rho_1(t_0)R_1^3(t_0) = \rho_1(t_1)R_1^3(t_1)$. Compte tenu de la formule (16) on a

$$T_0^0(t_0) = T_0^0(t_1).$$

Nous venons donc simplement de montrer que :

Théorème : Pour une métrique de Robertson-Walker (métrique d'univers écrite dans un système de coordonnées comobiles) le tenseur impulsion-énergie EST CONSTANT si il n'y a pas de création de matière et si il n'y a pas de rayonnement.

En fait nous avons montré que T_0^0 est constant, mais la résolution des équations d'Einstein, évidente dans ce cas là, achève la démonstration et même donne les modèles possibles, ce sont les trois formes de Robertson-Walker de la même métrique de De Sitter (cf. § D) ci-dessus).

Remarques : i) Ce résultat ne dépend que de l'interprétation locale du tenseur impulsion-énergie, c'est à dire dans l'espace de Minkowski tangent en un point ; aucun recours analogique n'est présupposé.

ii) Il n'y a plus de mystère pour la constante cosmologique qui exprime simplement la constance de la densité d'énergie comobile ; en effet les équations d'Einstein nous disent que que si T_0^0 est constant, alors T_1^1 est constant et est égal à T_0^0, autrement dit le tenseur $T_{\mu\nu}$ est de la forme $\Lambda g_{\mu\nu}$.

iii) Nous venons d'étudier les modèles sans création de matière et sans rayonnement, ce dernier fait est une faiblesse si l'on souhaite étudier le rayonnement de fond cosmologique (à environ $2.735^o K$, si l'on se réfère aux dernières mesures).

iv) Ce modèle cosmologique, construit uniquement dans le cadre de la relativité générale (plus précisément sans aucun recours à la thermodynamique ou l'hydrodynamique) représente un fluide cosmique de matière parfaitement idéalisé, fluide ne contenant et ne produisant aucun rayonnement. Il y a une interprétation thermodynamique très simple : l'entropie est constante, ce qui est particulièrement intéressant dans la mesure où, dans un tel univers idéalisé, rien ne se produit.

§2 C)**Univers sans création continue et avec rayonnement n'interagissant pas avec la matière**.

Soient ρ_r et ρ_m les densités respectives de rayonnement et de matière. L'interprétation locale de ces densités $t \to \rho_r(t)$ et $t \to \rho_m(t)$ est donnée par les équations :

$\rho_r(t)R^4(t) = \rho_r* = constante$ pour le rayonnement (de corps noir) et

$\rho_m(t)R^3(t) = \rho_m* = constante$ pour la matière.

Reprenons le même raisonnement qu'au paragraphe précédent en comparant les densités $\rho_{r,0}(t)$ et $\rho_{m,0}(t)$ dans une normalisation au temps t_0, et $\rho_{r,1}(t)$ et $\rho_{m,1}(t)$ dans celle au temps t_1. On obtient :

$T^0_0(t_0) = \rho_{r,0}(t_0) + \rho_{m,0}(t_0)$;

$T^0_0(t_1) = \rho_{r,1}(t_1) + \rho_{m,1}(t_1) = \frac{R^3(t_1)}{R^3(t_0)}(\rho_{r,0}(t_1) + \rho_{m,0}(t_1))$. La formule (16) permet alors d'obtenir la forme de $T^0_0(t)$:

$$(18)\ T^0_0(t) = \rho_{m,0}(t_0) + \frac{R(t_0)}{R(t)}\rho_{r,0}(t_0).$$

C'est à dire $T^0_0(t)$ est de la forme

$$T^0_0(t) = A + \frac{BR(t_0)}{R(t)}.$$

Par l'équation de conservation (4), on a :

$$T^i_i(t) = A + \frac{2BR(t_0)}{3R(t)}.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation dynamique (3) , ce qui donne, en posant $\lambda^2 = \frac{8\pi GA}{3}$:

$$(19) \quad R(t) = -\frac{BR(t_0)}{2A} + \lambda_1 e^{\lambda t} + \lambda_2 e^{-\lambda t},$$

avec $4\lambda_1\lambda_2 = \frac{B^2R^2(t_0)}{4A^2} + \epsilon c^2\lambda^{-2}$.

Ceci montre que, en prenant une origine des temps convenable, la métrique obtenue approxime asymptotiquement les trois formes de Robertson-Walker de la métrique de De Sitter : $R(t) = c(\frac{e^{\lambda t}}{2\lambda} + \epsilon\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}\ )$.

Ces modèles, qui approximent asymptotiquement **les trois modèles** de De Sitter obtenus en prenant $B = 0$ et $\Lambda = 8\pi GA$, ne sont valables qu'après le temps du découplage rayonnement-matière. Il ne reste plus qu'à les confronter aux observations. Notons d'ores et déjà que ces modèles sont stables (par rapport à la densité critique) et que lorsque $\epsilon = 0$ ou -1 (ce qui correspond à une densité d'énergie inférieure ou égale à la densité critique) nous avons d'une part l'isotropie parfaite du rayonnement de fond cosmologique et d'autre part l'absence de problème d'horizon (ainsi point n'est besoin d'avoir recours à un hypothétique modèle inflationnaire pour résoudre ces problèmes inexplicables par le modèle standard).

§2 D) **Remarques** :

i) Un univers purement radiatif (au sens où la trace du tenseur impulsion énergie est nulle) s'obtient avec l'équation d'état $\rho(t)R^7(t) = constante$; pour $\epsilon = 0$, on obtient le modèle de Gamov, pour lequel R(t) est proportionnel à $\sqrt{t}$ et $T_0^0(t)$ à t^{-2}.

ii) Si l'on veut décrire un modèle sans création d'énergie et avec un rayonnement vérifiant la loi d'un corps noir (pour interpréter le rayonnement à 3^oK) il faudrait prendre l'équation d'état plus générale : $\rho_r(t)R^4(t) + \rho_m(t)R^3(t) = constante$;
Elle ne se traduit pas par une équation simple pour le tenseur impulsion-énergie qui, formellement, est celui d'un fluide parfait.

iii) Il peut-être objecté, comme contre le modèle de Hoyle, que la "pression", représentée par $T_i^i(t)$, est négative, mais cette objection est basée sur une interprétation globale du tenseur impulsion énergie et en ayant un recours **analogique** avec la thermodynamique (cf. S. Weinberg [2] formules 14.2.17 et 14.2.20). Ne faut-il pas plutôt chercher une interprétation de la négativité de $T_i^i(t)$, en termes de "pression" gravitationnelle liée à l'expansion ? En posant "pression" gravitationnelle = - densité d'énergie, alors dans les deux cas étudiés on constate que la pression est égale à la pression thermodynamique augmentée de la pression gravitationnelle (négative). Ceci pourrait mettre sur la voie d'une éventuelle interprétation globale du tenseur impulsion-énergie. (Mais est-il nécessaire de chercher une interprétation globale, dans la mesure où le système différentiel formé par les équations d'Einstein ne peut avoir de sens que localement, comme tout système différentiel ?).

iv) Notons également que le semi-groupe de causalité de De Sitter nous fournit une flèche du temps, c'est à dire un sens de l'écoulement du temps, qui est de nature globale ; ce fait n'est en aucune manière en contradiction avec le fait que nombre d'équations de la physique sont temporellement réversibles (en effet ce n'est pas parce qu'une équation est localement réversible en chaque point, qu'elle l'est globalement !). Plus généralement une symétrie d'un système différentiel (objet mathématique de nature locale) n'implique pas, ipso facto, la symétrie globale des solutions.

v) Comme nous avons supposé que le temps cosmologique coïncide avec le temps atomique de tout observateur comobile, les constantes sont effectivement constantes, en particulier la vitesse de la lumière, la constante de la gravitation, la masse des particules élémentaires, la constante de Planck etc... Que de questions !

vi) Notons que le choix d'unités relatif à un point peut être transcrit, sans problème, en termes de choix d'un observateur privilégié. Aussi, on peut dire que pour interpréter le tenseur impulsion-énergie d'un modèle d'univers ou pour confronter ce modèle aux observations, il faut non seulement se donner ce modèle (une **variété** munie d'une métrique de Robertson-Walker par exemple, sous l'hypothèse A), mais encore se préciser un observateur (et donc son système d'unités).

Ainsi une interprétation locale du tenseur impulsion-énergie nous conduit à des modèles en contradiction avec les modèles standards (qui sont basés sur une interprétation globale de ce tenseur par analogie avec la thermodynamique). Il apparaît que le recours à la notion d'observateur (auquel est attaché un système d'unités) pour interpréter le tenseur impulsion-énergie est préférable au recours à la thermodynamique (recours lié au fait que ce tenseur représente **formellement** celui d'un fluide parfait, interprétation cependant valable dans un modèle statique). Notons que l'interprétation locale du tenseur impulsion-énergie enlève tout le mystère de la constante cosmologique qui s'interprète comme le tenseur impulsion-énergie de la matière comobile ou de l'énergie comobile (on peut penser au fait que, pour de nombreux physiciens, l'énergie du vide, si elle existe, est comobile puisque traduite par la constante cosmologique !).

Aussi le problème de savoir si il faut écrire les équations d'Einstein avec ou sans constante cosmologique, est un faux problème. En tout cas, si on écrit ces équations avec une constante cosmologique, celle-ci doit figurer dans le deuxième membre de ces équations puisqu'elle qualifie un contenu énergétique (donc physique). A ce propos, rappelons qu'en mathématique, une variété munie d'une métrique g telle que le tenseur $G_{\mu\nu} = constante\ g_{\mu\nu}$, s'appelle variété d'Einstein !

Résumons la démarche de ce chapitre en disant que le "mystère de la constante cosmologique" n'a pu être levé que par cette longue étude, qui passe par une étude "fine" ou plutôt instructive des équations d'Einstein, avec la distinction entre l'équation de contraintes, l'équation dynamique et l'équation de conservation (cf. § C)) et qui passe par une étude sérieuse du tenseur impulsion-énergie (cf. § 2 A) et B)). Ainsi la question naïve, posée au début, de savoir si il faut écrire les équations d'Einstein avec ou sans constante cosmologique était en fait très pertinente, puisqu'il a fallu de nombreuses pages de développements pour répondre clairement à cette question.

De manière médiatique il aurait fallu intituler ce chapitre :

"De la problématique des modèles d'univers au non-mystère de la constante cosmologique".

La confrontation aux observations, réservée au chapitre suivant, sera édifiante, je l'espère, dans la mesure où, de toute la série de difficultées énoncées au début, de l'isotropie du rayonnement de fond cosmologique au phénomène d'horizon en passant par l'âge de l'univers et la stabilité des modèles, il n'en restera qu'une petite, celle dite du problème de la masse manquante. Nous reviendrons sur les problèmes de masse manquante plus loin (courbe de rotation des galaxies, masse des amas de galaxies, etc...), en les posant bien ... .

§3 **L'équivalence entre la cosmologie Einsteinienne et celle de Newton revisitée**.

§3 A) **Sur l'interprétation thermodynamique et la gravitation de Newton**.

Nous avons remarqué que, si l'on veut une interprétation thermodynamique du tenseur impulsion-énergie d'un modèle d'univers, alors pour les deux exemples simples étudiés, on doit considérer qu'il existe une "pression" gravitationnelle égale à l'opposée de la densité d'énergie.

En effet si on interprète le tenseur impulsion-énergie comme le tenseur d'un fluide parfait, on obtient
pour la matière comobile $p = -\rho$ (donc $p = 0 + -\rho$)
et pour le rayonnement $p = -\frac{2}{3}\rho$ (donc $p = \frac{1}{3}\rho + -\rho$)
c'est à dire : la pression de ce fluide cosmique est égale à la pression thermodynamique usuelle augmentée de la "pression" gravitationnelle négative. Cette constatation est-elle une simple coïncidence ou signifie-t-elle quelque chose de plus profond ? Cette "pression" gravitationnelle négative apparaît déjà au chapitre 6 ; elle permet de définir un astre thermodynamiquement mort.

Comme l'interprétation thermodynamique est globale, employons la dynamique Newtonienne correspondant à un tel fluide parfait. Pour cela il n'y a qu'à suivre l'exemple traité par J. M. Souriau [8] pour retrouver ou reconstruire les mêmes modèles d'univers ; plus précisément cet auteur montre que lorsque la pression du fluide cosmique est nulle, l'équation de Poisson, l'équation d'Euler et l'équation de continuité permettent de retrouver les mêmes équations, la même dynamique, mais dans un cadre Newtonien. Seule l'interprétation géométrique n'est plus la même.

Les équations de la cosmologie Newtonienne revisitées.

En mécanique Newtonienne, un point matériel qui occupe la position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t gravite selon l'équation :

$$(20) \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}\ ,$$

où $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, t)$ désigne le champ de gravitation.

Supposons que $t \rightarrow \vec{r}(t)$ décrive la trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'un point comobile avec le fluide parfait de densité $\rho = \rho(t)$ et de pression $\vec{p} = \vec{p}(t)$ de composantes $p(t)$, emplissant de manière homogène et isotrope l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notons $\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la vitesse en chaque point $\vec{r}$.
En interprétant la loi Newtonienne (20) comme l'équation des géodésiques d'une connexion abstraite sur $\mathbb{R}^4$, J. M. Souriau établit que le champ $\vec{g}$ est de la forme

(21) $\vec{g}(t) = -\lambda(t)\vec{r}(t)$, à une constante additive près, que l'on peut supposer nulle (par changement de l'origine de l'espace).

Supposons que $\vec{v}$ et $\vec{r}$ soient colinéaires et notons :

$\vec{v}(t) = H(t)\vec{r}(t)$, (H s'interprète comme le coefficient de Hubble), alors on trouve que l'équation d'Euler $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(t)$ s'écrit, en utilisant (20) et (21) :

$$(22) \qquad \frac{dH}{dt} + H^2 = -\lambda.$$

Nous avons ainsi montré que la mécanique Newtonienne est compatible avec une expansion, devant vérifier l'équation d'Euler (22) .

Utilisons maintenant la thermodynamique en disant que le fluide cosmique est parfait. La loi de conservation de ce fluide s'écrit alors dans les notations précédentes :

$$(23) \qquad \frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0.$$

Nous donnerons plus loin l'interprétation Newtonienne (conservation de l'énergie). En tout cas, pour une pression nulle, elle se réduit à la conservation de la masse.

Prenons maintenant l'équation de Poisson qui relie le contenu énergétique au champ gravitationnel $\vec{g}(t)$. Pour un fluide sans pression elle se réduit à : $Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G\rho(t)$. Prenons l'équation de Poisson suivante, qui tient compte de la pression :

$$(24) \qquad Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t)).$$

En utilisant l'équation (21) et l'équation d'Euler (22), l'équation de Poisson s'écrit alors :

$$(25) \qquad 3(\frac{dH}{dt} + H^2) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t)).$$

Dans ce cadre Newtonien, il nous reste donc deux équations à résoudre : les équations (23) et (25) , puis l'équation d'Euler permet alors de calculer le champ gravitationnel newtonien $\vec{g}(\vec{r}, t)$.

Remarque fondamentale : Les équations (23) et (25) admettent une intégrale première :

$$(26) \qquad 3(H^2 + \frac{K}{\|\vec{r}\|^2}) = 8\pi G\rho,$$

où K est une constante. Cette constante K est donc fixée par des conditions initiales. Elle a également une interprétation Newtonienne lorsque K est positive, celle de la conservation de l'énergie (cinétique plus potentielle) d'une particule comobile avec le fluide cosmique. Cf. par exemple E. Elbaz [11] qui prend cette équation (26) à la place de l'équation (25) dans son approche Newtonienne des modèles cosmologiques.

Il est évident que si on note $R(t) = \|\vec{r}(t)\|$, ces équations Newtoniennes (23), (25) et (26) sont strictement équivalentes aux équations (2), (3) et (4) de la relativité générale (on a pris ici la vitesse de la lumière égale à 1). Si l'interprétation du temps t, du coefficient de Hubble H et de la densité ρ sont les mêmes, la constante d'intégration K n'a pas d'interprétation en terme de courbure d'espace. Le champ gravitationnel $\vec{g}$, dans cette présentation Newtonienne, a bien la signification d'un champ d'accélération $\vec{g} = \frac{d^2R}{dt^2}$.

Ainsi nous venons de démontrer le résultat intéressant suivant :

théorème : Un modèle d'univers homogène et isotrope fourni par la relativité générale est identique, au niveau des équations, au modèle correspondant basé sur l'hydrodynamique relativiste, la mécanique Newtonienne et l'équation de Poisson modifiée.

Autrement dit **les théories Einsteinienne et (post) Newtonienne de la cosmologie sont mathématiquement équivalentes**.

Ce résultat nous permet en particulier de justifier et de comprendre a posteriori l'utilisation en relativité générale de la loi de corps noir qui est une loi thermodynamique. Pour cela nous avons dû cependant tenir compte de la pression dans l'équation de Poisson, pour la modifier en conséquence.

Au niveau de la partie espace, le modèle Newtonien développé est défini sur $\mathbb{R}^4$. Il y a donc adéquation complète avec le modèle Einsteinien correspondant si la courbure (ou la constante K) est négative ou nulle. Si la constante K est strictement positive, les deux modèles ne vont coïncider que localement, sur une carte de la partie espace sphérique du modèle Einsteinien. Si l'on veut une adéquation complète dans ce cas, il faut reprendre le modèle Newtonien en plongeant la sphère dans $\mathbb{R}^4$, dont le rayon r(t) évolue ; seule la présentation change, les équations étant les mêmes.

Remarque : Dans ce modèle Newtonien on retrouve une différence de statut entre les trois équations, la même différence que celle mise en évidence dans le cadre de la relativité générale. L'équation dynamique est évidemment l'équation de Poisson (25) , l'équation des contraintes est l'intégrale première (26) , l'équation de conservation (23) étant la même que celle de la relativité générale.

De même qu'une "hypothèse" peut être vue comme une explicitation de la flèche de traduction axiome $\leftarrow$ principe, un "résultat" pourra être compris comme l'explicitation de l'autre flèche de traduction : théorème $\rightarrow$ loi(s).

Résultat : L'équivalence mathématique entre les formalisations Einsteinienne et Newtonienne de la cosmologie signifie, entre autres, que :

i) la loi de corps noir peut être utilisée et donc la constante k de Boltzmann a un sens, ainsi que la formule $E = k\ T$.

ii) Il existe une pression gravitationnelle pure (égale à l'opposée de la densité d'énergie).

iii) Le concept d'espace-temps est méta-scientifique ; en particulier il n'est pas possible de "mesurer la courbure de l'espace".

Achèvement des modèles dans ce cadre Newtonien : l'entropie.

Comment maintenant achever un modèle d'univers ? Par exemple, supposons que l'on veuille décrire un univers de matière sans rayonnement. Dans la logique de la construction de ces modèles Newtonien, il faut prendre une hypothèse thermodynamique, pour traduire le fait que le fluide cosmique d'une matière parfaitement idéalisée est un fluide sans rayonnement, donc sans production de rayonnement (sans échange d'informations, sans création de structures locales plus complexes), bref ce fluide est à entropie nulle ; cette hypothèse d'entropie nulle caractérise au mieux un univers de matière en expansion dans lequel "il ne se passe rien", et il traduit le fait, généralement admis, que l'entropie est proportionelle au rayonnement et est constante dans un volume comobile. L'équation de l'entropie étant

$s(V,T) = \frac{V}{T}(\rho(T) + p(T)) + K$, où V désigne un volume d'espace, K une constante et T la température du fluide cosmique ; une entropie constante nous donne $\frac{ds}{dV} = 0$ donc $\rho = -p$. On retrouve ainsi aisément le résultat obtenu dans le cadre de la relativité générale, la pression gravitationnelle est égale à l'opposée de la densité de matière. La résolution des trois équations (23), (25) et (26) conduit à un des trois modèles de De Sitter, suivant la valeur de la constante d'intégration de l'intégrale première (26). Dans ce cas on obtient que les densités ρ et p, qui sont constantes, ne peuvent interpréter que comme des densités comobiles, aussi bien dans l'équation de conservation de l'entropie que dans les trois équations de la cosmologie Newtonienne. C'est ce que nous supposerons par la suite pour permettre une interprétation.

Supposons que l'on décrive maintenant un univers de rayonnement pur sans matière ; l'entropie reste constante (strictement positive) dans tout volume comobile V. D'autre part, comme le fluide cosmique est un rayonnement en équilibre, on a la pression qui est proportionelle à la densité de ce gaz : $p = (\gamma - 1)\rho$. Donc $constante = s(V,t) = \gamma V \frac{\rho(t)}{T(t)}$; Ainsi, comme ρ est une densité comobile et V un volume comobile, $\rho(t)$ est proportionnel à T(t). Si l'on veut en plus que la loi de corps noir soit valable ($T(t) = \frac{k}{r(t)}$) on obtient que ρ est de la forme $\rho(t) = \frac{B}{r(t)}$. La résolution des équations donnent alors $\gamma = \frac{1}{3}$ et comme dans le cas précédent les densités ρ et p s'interprètent comme des densités comobiles.

Cependant il se pose un autre problème : puisque l'on peut construire les modèles d'univers (homogène et isotrope à grande échelle) en ayant recours uniquement à la gravitation newtonienne et à la thermodynamique, pourquoi utiliser la relativité générale ? Le fait de donner deux théories (conceptuellement très différentes) d'une même "réalité" physique, ici d'un univers, montre qu'on ne peut pas confondre une réalité physique et un modèle traduisant cette réalité. Mais outre cet intérêt épistémologique, ces deux conceptualisations différentes s'interrogent l'une l'autre, par exemple en mettant en évidence qu'il existe une pression purement gravitationnelle, pression a priori indétectable, sinon par l'adéquation de ces deux modèles aux observations.

Une conséquence importante de l'équivalence de la gravitation Newtonienne et de la relativité générale pour la construction des modèles isotropes de l'univers, est à souligner : **Théorème** : Le coefficient κ de proportionnalité entre les deux tenseurs des équations d'Einstein est égal à :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4};$$

Plus n'est besoin d'avoir recours à l'approximation pour un champ faible pour obtenir la valeur de κ.

En effet la valeur de κ est approximativement égale à $\frac{8\pi G}{c^4}$ si pour un champ faible on veut retrouver la gravitation newtonienne au premier ordre de développement ; ce qui signifie que $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}(1+\epsilon(1/c))$ où $\epsilon(1/c)$ est petit et inconnu. Il est intéressant de constater que l'équivalence entre les cosmologies Newtonienne et Einsteinienne n'a lieu que si $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, où G est la constante de Newton figurant dans l'équation de Poisson (24).

Discussion sur la modification de l'équation de Poisson

La modification proposée (pour obtenir l'équivalence mathématique des équations des cosmologies Newtonienne et Einsteinienne) pose le problème de l'existence ou non d'une **pression purement gravitationnelle égale à l'opposé de la densité de matière-énergie** ;

Elle est très difficile à mettre en évidence (le nuage de Oort, aux confins du système solaire, semble la plus petite structure permettant de la vérifier) ;

Son existence montre que la modification de l'équation de Poisson n'est pas purement ad hoc.

Que permet cette pression gravitationnelle pure ?

- Le tenseur impulsion-énergie T - dont Einstein disait qu'il n'était qu'une "pièce de bois vulgaire" - est interprétable de la manière classique lorsqu'on se place dans un repère "localement inertiel".

- La loi de corps noir qui est à la base de la caractérisation du rayonnement cosmologique à 3 degrés Kelvin est une loi thermodynamique qui ne peut être introduite en toute rigueur que dans le cadre cosmologique Newtonien. L'équivalence valide son utilisation en relativité générale.

- Plus généralement, des concepts thermodynamiques usuels comme par exemple celui d'entropie, la constante de Boltzmann, prennent un sens en relativité générale.

- L'hydrodynamique n'apparaît plus comme une simple technique mais comme permettant d'exprimer en termes newtoniens la gravitation relativiste.

- Le système des équations d'Einstein apparaît comme une intégration partielle du système des équations de la cosmologie newtonienne en ce sens que, soit les équations sont identiques aux équations newtoniennes, soit elles en fournissent des intégrales premières.

Par ailleurs cette pression permet un âge élevé de l'univers (20 milliards d'années, avec une constante de Hubble de 75km/s/Mpc), ce qui est souhaitable au vu des observations. Un tel âge est impossible à obtenir avec le modèle usuel sans pression gravitationnelle (cf. [9] par exemple où les auteurs montrent que l'on ne peut plus se passer de la constante cosmologique, autrement dit de l'existence d'une pression négative, fait confirmé par les observations récentes de supernovae).

En résumé, pour les modèles homogènes et isotropes de l'univers, sous l'hypothèse supplémentaire que le temps atomique est le temps cosmologique, la relativité générale est et n'est que la géométrisation de la gravitation newtonienne. Sans doute est-il possible de modifier la théorie newtonienne en prenant en compte une éventuelle non additivité du temps atomique à l'échelle cosmologique, pour retrouver la cosmologie Einsteinienne dans toute sa généralité ?

§3 B) **Autres systèmes d'hypothèses, autres modèles possibles.**
Facteur conforme. (toujours dans le cadre strict de la relativité générale).

De la cosmologie de Segal à celle de Dirac.

Ces deux cosmologistes ont en commun de vouloir réconcilier la gravitation et l'électromagnétisme dans le cadre de la relativité générale .

Idées de I. Segal : Partant de l'invariance conforme des équations de Maxwell, un modèle homogène et isotrope d'univers doit être un ouvert U du revêtement universel M du compactifié conforme de l'espace de Minkowski. Cet ouvert U doit être muni d'une métrique h^2g conformément équivalente à la métrique canonique g invariante définie sur M ; de plus U doit être causal, nous reviendrons sur ce point important.

En fait I. Segal a étudié essentiellement le modèle où U = M, voir Aguirre-Daban et autres [12] pour une compréhension critique de ce modèle. Par ailleurs il prend, pour temps cosmologique, un temps cinématique ("the chronogeometric time") que l'on peut définir ainsi : sachant que toute métrique d'univers est conformément équivalente à une métrique statique : $ds^2 = \theta^2(u)(du^2 - d\Omega_\epsilon^2)$, il suppose que ce temps u défini par cette forme conformément statique de la métrique d'univers est additif. Il ne se place donc pas dans le cadre de l'hypothèse A, ni dans le cadre de l'hypothèse A", mais il est important de signaler que I. Segal ne se donne aucune contrainte du type thermodynamique.

Idées de P.A.M. Dirac : Les équations d'Einstein sont valables si l'on suppose que les "constantes" de la gravitation G et cosmologique Λ sont constantes, ainsi que la masse des objets macroscopiques. Un système d'unités physiques pour lequel la relativité générale est valable est appelé, par Dirac, système d'unités d'Einstein. Dans un tel système d'unités, la constante de Planck, la masse des particules élémentaires et autres quantités atomiques peuvent ne pas être constantes. Dirac propose que la métrique d'un modèle cosmologique dépend du système d'unités choisi. Aussi, pour tenir compte de l'électromagnétisme, une transformation de jauge, comme facteur conforme, relie les métriques associées à deux systèmes d'unités. Si l'on note g_e et g_a les métriques associées respectivement au systèmes d'unités d'Einstein, atomiques, nous avons $g_e = h^2 g_a$; Comment trouver h ? C'est la question que se posaient Canuto et d'autres.

De ces travaux, il est évident que tout modèle d'univers homogène et isotrope doit vérifier la définition suivante :

Définition : Un modèle d'univers est un ouvert du revêtement universel M du compactifié conforme de l'espace de Minkowski, muni d'une métrique conformément équivalente à la métrique canonique sur M. De plus à chaque choix de système d'unités correspond un facteur conforme.

Cette définition, qui peut sembler très abstraite, permet fondamentalement de chercher à construire des modèles d'univers tenant compte de propriétés de l'électromagnétisme.

Pour voir la compatibilité de cette définition avec les hypothèses 1 à 8 du § 1 G), il suffit d'une part d'utiliser le plongement de tout modèle d'univers dans l'espace $\mathbb{R}^5$ muni d'une métrique de De Sitter (cf.§ 1 D)) et de rappeler le théorème suivant :

Théorème : (H. Bacry et J.M. Lévy-Leblond [13] ; I. Segal [9]). Il existe , dans le groupe SO(2,4) des invariants des équations de Maxwell, trois cinématiques possibles compatibles avec l'électromagnétisme : ce sont celles associées au groupe de Poincaré $\mathbb{R}^4 \triangleleft SO(1,3)$ et aux deux groupes de de Sitter SO(1,4) et SO(2,3).

§3 C) **Lien avec l'électromagnétisme**, vers l'unification des forces, le problème de la jauge.

Nous avons étudié un modèle d'univers, celui sans rayonnement, sous l'hypothèse A ($d\tau = dt$) et l'hypothèse A', ce qui se révèle particulièrement satisfaisant car les solutions sont invariantes par un groupe cinématique (de dimension 10) compatible avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Le résultat obtenu semble justifier le choix arbitraire de l'hypothèse A. Si l'on tient compte du rayonnement, on n'a plus de cinématique. Ne vaudrait-il pas mieux garder la cinématique pour les objets comobiles et par contre affaiblir l'hypothèse A ? Ceci pourrait facilement se justifier en disant par exemple que le rayonnement n'interagit pas du tout avec la matière, en particulier avec l'horloge de l'observateur comobile. Il faut alors supposer la métrique sous la forme conforme à un modèle sans rayonnement, donc de la forme :

$$ds^2 = h^2(\tau)(d\tau^2 - (\frac{e^{\lambda\tau} + \epsilon e^{-\lambda\tau}}{2\lambda})^2 d\Omega_\epsilon^2),$$

Cela alors pose le problème de traduire la loi de corps noir pour le rayonnement, sans doute sans trop de difficultées au vu de la propriété de l'invariance conforme de l'électromagnétisme.

Cette métrique s'écrit dans le temps atomique, cf. (19) ,

$ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\Omega_\epsilon^2$, où $R(t) = -\frac{aB}{2A} + \lambda_1 e^{\lambda t} + \lambda_2 e^{-\lambda t}$,

avec $4\lambda_1\lambda_2 = \frac{a^2B^2}{2A^2} + \epsilon\lambda^{-2}$, $\lambda^2 = \frac{8\pi GA}{3c^2}$ et $a = R(t_0)$. Par un choix convenable d'origine de temps, nous prendrons $\lambda_1 = \frac{1}{2\lambda}$ et donc $\lambda_2 = \frac{\epsilon}{2\lambda} + \frac{a^2B^2\lambda}{8A^2}$, ainsi R(t) s'écrit :

$R(t) = \frac{e^{\lambda t}+\epsilon e^{-\lambda t}}{2\lambda} + \frac{a^2B^2\lambda}{8A^2}e^{-\lambda t} - \frac{aB}{2A}$;

nous noterons encore $\alpha = \frac{aB\lambda}{2A}$, ainsi $R(t) = \frac{(e^{\lambda t}-\alpha)^2-1}{2\lambda e^{\lambda t}}$.

En égalisant les deux formes de métrique, on a donc à résoudre le système :

$h(\tau)d\tau = dt$, $\frac{\lambda d\tau}{sh\lambda\tau} = \frac{dt}{R(t)}$; Cette dernière équation s'intègre et donne, par exemple dans le cas où $\epsilon = -1$:

$th\frac{\lambda\tau}{2} = \frac{e^{\lambda t}-\alpha-1}{e^{\lambda t}-\alpha+1}$, c'est-à-dire $e^{\lambda t} - \alpha = e^{\lambda\tau}$.

Ainsi $h(\tau) = \frac{e^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}+\alpha}$.

Comme $\frac{B}{A}$ est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-5}, et $a\lambda$ est de l'ordre de l'unité (par confrontation aux observations), alors α est très petit devant 1. En faisant un développement limité suivant α, on obtient l'approximation suivante du premier ordre en α : $h(\tau) = 1 - \alpha e^{-\lambda\tau}$.

On arrive à une constatation importante : du point de vue du principe heuristique de simplicité, principe qui s'est toujours avéré très fondamental en physique, les calculs précédents, très élémentaires, semblent en accord avec ce "principe de simplicité". Faut-il chercher une autre hypothèse, d'une part très simple et d'autre part donnant des résultats "élégants".

En voici une autre, sans doute n'est-ce-pas la meilleure, qui vérifie aussi ce principe heuristique de simplicité :

Hypothèse AA (à la place des hypothèses A et A') : **Le temps est un concept absolu**. Plus précisément la variable temporelle jouit de toutes les propriétés désirées : autrement dit, les temps **cosmologique, cinématique et atomique** coïncident (dans le cadre de la relativité générale).

Cette hypothèse, qui a le mérite de la simplicité, est-elle possible ? OUI, si l'on abandonne une hypothèse implicitement admise, l'hypothèse A', stipulant que les constantes atomiques sont des constantes cosmologiques !

Cette hypothèse est un affaiblissement de l'hypothèse A" (principe des géodésiques pour les corps en chute libre).

Note : pour les camarades de travail lyonnais (et pour combien d'autres !), qui ont connu Jean Braconnier, Doyen de la faculté des sciences de Lyon pendant de nombreuses années, constructeur du campus universitaire de la Doua à Villeurbanne, membre de la rédaction de l'ouvrage N. BOURBAKI (évidemment membre non officiel comme tous les membres de ce regroupement), ils pourront reconnaître aisément le prix que j'attache à cette hypothèse de simplicité AA. En effet le titre du séminaire de mathématique qu'il a longtemps animé était "AA", comme Analyse et Algèbre. Je lui dois beaucoup, en particulier il m'a dit un jour : il y a des mystères en mathématique : par exemple, personne ne sait répondre à la question suivante : Pourquoi l'infiniment petit et l'infiniment grand sont intimement liés ? En particulier, pourquoi les représentations du groupe de Poincaré (groupe des invariants d'une cinématique, celle de la relativité restreinte, donc point de vue relativiste) paramètrent les particules élémentaires (point de vue quantique puisque ce paramétrage s'effectue par la description des espaces de Hilbert des états quantiques d'une particule). Je dois dire qu'une grille de lecture de mon travail passe par la compréhension de cette remarque que J. Braconnier m'avait faite en 1974 ou 1975, je le dis aujourd'hui (novembre 92), car je me suis soudainement souvenu de cette remarque quand j'ai écrit pour la première fois les définitions mathématiques précises des trois concepts suivants : temps atomique, temps cosmologique, temps cinématique. Dire que ces trois temps coïncident permettent d'avancer, je l'espère, dans la compréhension de ce mystère.

Cette hypothèse AA (optionnelle mais explicitement dite, dans le cadre de la relativité générale), dit donc que $d\tau = dt$, autrement dit que l'on a :

$ds^2 = h^2(t)(dt^2 - (\frac{e^{\lambda t}+\epsilon e^{-\lambda t}}{2\lambda})^2 d\Omega_\epsilon^2) = c^2dt^2 - R^2(t)d\Omega_\epsilon^2)$;

donc $h(t) = c(t)$ c'est à dire la vitesse de la lumière varie ;

comme $h(t) = \frac{\lambda R(t)}{sh\lambda t}$, on a $c(t) = h(t) = 1 - \frac{\alpha}{sh\lambda t} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{e^{-\lambda t}}{sh\lambda t}$ avec nos notations précédentes. Cette conséquence de l'hypothèse AA est particulièrement simple à obtenir et donne un résultat satisfaisant dans la mesure où la vitesse de la lumière augmente avec le temps (pris comme un absolu), cette augmentation traduisant une diminution de la "densité d'énergie" de l'univers. Si α est petit, alors le rapport entre la vitesse maximale de la lumière $c(\infty)$ et la vitesse de la lumière aujourd'hui $c(t_o)$ est $\frac{c(\infty)}{c(t_o)} = 1 + \frac{B}{A}$ en première approximation ; elle varie donc très peu actuellement ; plus précisément, comme $c'(t_o) = \frac{B}{A}H(t_o)$, où $H(t_o)$ est la valeur de la constante de Hubble aujourd'hui, cette variation n'est pas mesurable actuellement, puisque $c'(t_o)$ est de l'ordre de 10^{-20} à $10^{-22}s^{-1}$, suivant les valeurs observées de A, B et $H(t_o)$.

Mais il faut voir le prix à payer, si l'on tient à respecter les hypothèses non optionnelles 1 à 8. En particulier, comme la relativité générale est valable, il faut que $\frac{8\pi G}{c^2}$ soit une constante et que, comme la relativité restreinte doit être valable sur l'espace tangent en chaque point pour pouvoir interpréter le tenseur impulsion-énergie, il faut que mc^2 soit constante ;

Donc, sous l'hypothèse AA, la constante de Newton G doit varier comme c^2 et la masse m d'une particule élémentaire comme c^{-2} ; mais ces variations, comme celle de la vitesse de la lumière, sont indécelables actuellement. Sur l'étude de modèles d'univers dans le cadre de la relativité générale, avec variation de la vitesse de la lumière, il faut signaler le travail de P. Midy et J.-P. Petit [25], mais ces auteurs conservent l'interprétation standard du tenseur $T\mu\nu$.

Je m'aperçois, à la relecture, que j'ai implicitement admis une autre hypothèse : le caractère absolu de la notion d'énergie ;
je l'admets en complément de l'hypothèse AA, dans la mesure où en mécanique quantique on ne peut se passer de la dualité temps-énergie et dans la mesure où l'hypothèse AA prend le temps comme un absolu !

Cette hypothèse AA, même si c'est une hypothèse "gratuite" ou une hypothèse de mathématicien, montre cependant que pour mettre en oeuvre la relativité générale on ne peut se passer de se définir très précisément la "nature" (i.e. les propriétés) du temps avec lequel on travaille, surtout quand on ose confronter un modèle aux observations.

Note sur le modèle de F. Hoyle.

Dans les modèles d'univers que l'on rencontre dans la littérature, il est utilisé dans deux contexte différents la métrique de De Sitter pour $\epsilon = 0$. Plus précisément la métrique :

$$ds^2 = c^2dt^2 - e^{2Ht}(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2),$$

où H est bien la constante de Hubble (effectivement constante). Il s'agit d'une part de la phase inflationnaire du modèle standard et d'autre part du célèbre modèle de Hoyle, dit à "création continue de matière".

Le modèle standard introduit une période inflationnaire peu après le big-bang pour remédier au problème de l'horizon autrement dit pour expliquer l'isotropie du rayonnement de fond cosmologique. Curieusement rien n'est précisé sur la nature du recollement de la métrique à la fin de cette période inflationnaire ; Et pourquoi n'est-il pas utilisé les autres formes de Robertson-Walker possibles de cette métrique de De Sitter ?

Au sujet du modèle de Hoyle, on pouurra se reporter à la présentation faite par Arp, Burbidge et autres [17]. Nous apportons un élément essentiel de compréhension de ce modèle. Il est sans création continue de matière, du fait que la constante cosmologique exprime le tenseur impulsion-énergie du "fluide" comobile.
Du fait des deux autres formes de Robertson-Walker de la métrique du modèle de Hoyle, nous élargissons les possibilités d'adaptation de ce modèle aux observations, et nous montrons la compatibilité du modèle de Hoyle avec un rayonnement de fond cosmologique à 3^oK parfaitement isotrope. La question qui se pose alors est de savoir si ce rayonnement observé est produit par un brouillard de "cheveux de fer" (iron whiskers) comme le propose Burbidge [18] et autres [17], ou (et) est de nature cosmologique ; en tout cas ces hypothèses sont compatibles.

Conclusion

Par la mise en évidence de tous les axiomes explicites et implicites utilisés pour construire un modèle d'univers isotrope, nous permettons de mieux poser des problèmes liés aux modèles cosmologiques, problèmes soulevés par exemple par M. Novello [14], G.F.R. Ellis [15] ou encore M. Felden [16].

Nous arrivons aussi à la conclusion que le modèle d'univers de base n'est autre que l'un des modèles de De Sitter.

Dans la conclusion du preprint de 1993, j'écrivais : "Un autre problème qui sera je l'espère tranché par l'observation est la valeur du paramètre de décélération q_o. Dans le modèle standard la valeur critique de ce paramètre est 1/2, alors que pour les trois modèles de De Sitter ce paramètre est toujours négatif, la valeur critique étant -1."

Or depuis les années 1998 à 2000, les observations ont tranché le problème (cf [23] et [24]) ; en effet tout les cosmologistes sont d'accord sur le fait que l'univers est en expansion accélérée, ce qui se traduit par $q_o < 0$!

Pour obtenir un "modèle standard" en expansion accélérée, ces mêmes cosmologistes introduise alors ... la constante cosmologique Λ qui traduirait une énergie du vide, pas un seul ne songe à dire tout simplement qu'elle traduit la densité de matière comobile.

Quand aux trois formes de Robertson-Walker de la métrique de De Sitter, si certes elles sont signalées dans les ouvrages de Anderson [20] et de Dolgov et autres [21], je n'en ai jamais vu de démonstration simple ni d'interprétation géométrique élégante, et encore moins une utilisation. Pourtant la compréhension de ces trois formes permet de comprendre et de résoudre bien des problèmes concernant les modèles isotropes de l'univers, en particulier le non-mystère de la constante cosmologique, le faux problème de l'horizon, l'isotropie du rayonnement cosmologique, etc. ! Il reste maintenant à passer ces modèles au feu de la critique par la confrontation aux observations.

H. Sinaceur ([22] page 60) disait "L'axiomatique n'était donc pas pour Hilbert négation, mais analyse critique de l'intuition". Idée inspirée de Kant pour qui l'axiomatique est pour les mathématiques l'instance critique.

Si l'on regarde l'utilisation faites des mots "Hypothèse" et "Résultat" dans cette étude sur les modèles cosmologiques, en posant :
Hypothèse = explicitation de la flèche de traduction "axiome $\leftarrow$ principe" et
Résultat = explicitation de la flèche de traduction "théorème $\rightarrow$ loi",
j'ose plagié, en disant :
La modélisation mathématique est pour une théorie physique l'instance critique.

Bibliographie :

[1] A. COLEY et R. TAKAVOL : Fragility in Cosmology ; G.R.G. vol 24 n^o8, 1992.
[2] S. WEINBERG : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York (1972).
[3] A. LICHNEROWICZ : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson (1955).
[4] V. FOCK : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1964).
[5] J. SEKIGUCHI : Eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator on a hyperboloïd ; Nagoya Math. J., Vol 79 (1980).
[6] M. MIZONY : Une transformation de Laplace-Jacobi ; Siam J. Math. Anal., Vol 14, $n°$5 (1983). et Publ. Dep. Math. Lyon 3/B, p.1 (1982) et 3, p.47 (1984).
[7] J-P. PETIT : An interpretation of cosmological model with variable light velocity ; Modern physical letters A Vol 3 $n°$ 16 (1988).

[8] J-M. SOURIAU : Géométrie et Thermodynamique en cosmologie ; in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).
[9] I. SEGAL : Mathematical cosmology and extragalactic astronomy ; Academic Press, New-York (1976).
[10] V. CANUTO and all, Phys. Rev D. Vol 16, p.1643 (1977).
[11] E. ELBAZ : Cosmology ; Ellipses, Paris (1992).
[12] E. AGUIRRE-DABAN, C. Fernandez, J. Sanchez-Rodriguez : Cosmological redshift in conformal spacetimes. The Segal's model ; J. geometry and physics, Vol 3 $n°$ 1, p.55, (1986).
[13] H. BACRY and J.M. LEVY-LEBLOND, J. Math. Phys. Vol. 9, p.1605 (1968).
[14] M. NOVELLO : Cosmos et contexte ; Masson, Paris (1989).
[15] G.F.R. ELLIS : Relativistic cosmology : its nature, aims and problems ; in "General relativity and gravitation", edited by B. Bertotti et al, Reidel publishing C. (1984).
[16] M. FELDEN : Le modèle géométrique de la physique ; Masson, Paris (1992).
[17] H. ARP, G. Burbidge, F. Hoyle, J. Narlikar et N. Wickramasinghe : The extragalactic universe : an alternative view ; Nature, Vol 346, (1990).
[18] G. BURBIDGE : The scale of the universe ; in "Physical cosmology" Ed. Frontières Paris (1991).
[19] J.M. SOURIAU : Un modèle d'univers confronté aux observations ; in Dynamics and processes, Lecture notes in Mathematics, $n°$ 1031, Springer-Verlag, Berlin (1981).
[20] J. ANDERSON : Principles of relativity physics ; Academic Press (1967).
[21] A.D. DOLGOV, M.V. Sazhin and Ya.B. Zeldovitch : Basics of modern cosmology ; Ed. Frontières (1990).
[22] H. SINACEUR : Jean Cavaillès, Philosophie mathématique ; PUF (1994).
[23] PERLMUTTER et autres : Measurements of Omega and Lambda from 42 High- Redschift Supernovae ; Astrophysical Journal, Vol 516 $n°2$, (1998).
[24] RIESS et autres : Observational evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant ; AJ, Vol 116, p.1009, (1998).
[25] P. MIDY et J.-P. Petit : Scale Invariant Cosmology ; Inter. Journal of Modern Physics, Vol 8, pp. 271-280, (1999).
E.A. MILNE : A Newtonian expanding universe ; Q.J. Math., Vol 5, pp 64-72, (1934).
V. VARICAK : Anwendung der Lobatshefskijschen Geometrie in der Relativtheorie ; Physikalische Zeitschrift, vol 11, pp 93-96 (1910).
V. VARICAK : Uber die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie ; Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol 21 pp 103-128 (1912).
A. FRIEDMANN : Uber die Krummung des Raumes ; Z. Phys., vol 10, p.377, (1922).