Morceaux choisis

Michel Mizony

Agrégation : préparation à l'épreuve de modélisation 2004-2005

Institut Girard Desargues (UMR 5028 CNRS), Université lyon 1
43, bd. du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex
e-mail : mizony@univ-lyon1.fr

1 Introduction

Quelques problèmes à traiter avec un logiciel de calcul formel sont présentés ; ce sont des problèmes d'analyse qui sont issus ou qui donnent donnent lieu à des applications aux thèmes du programme de l'agrégation. Nous traiterons :

- L'équation d'Euler-Lagrange et l'oscillateur harmonique.
- Sur les polynômes orthogonaux (les fonctions de Jacobi).
- Lebesgue, Riemann et les théories de l'intégration.
- D'Alembert et la corde vibrante.
- Fuchs, Abel et les équations différentielles linéaires.
- L'équation logistique et la croissance de populations.
- Sur la transformation de Laplace.
- J.-M. Muller et l'instabilité numérique.

Les notes biographiques parsemant ce texte proviennent du site "Chronomath" dont je remercie l'auteur Serge Mehl.

2 Lagrange, Euler et l'oscillateur harmonique

Lagrange Joseph Louis, français, 1736-1813.

Né à Turin (Italie), il y enseigna les mathématiques dès l'âge de 19 ans à l'École d'artillerie. Il connut Euler et d'Alembert, s'installa à Berlin (où il présida l'Académie des sciences, à la suite de Euler) et revint à Paris en 1787 à l'invitation de Louis XVI. Il fut anobli par Napoléon. Encouragé dans ses débuts par d'Alembert, sa contribution est essentielle en Arithmétique ; Algèbre : équations algébriques et résolution approchée ; Equations différentielles et aux dérivées partielles ; Intégrales elliptiques ; Calcul des variations, mécanique céleste ; Théorie des fonctions réelles et complexes ;

Euler Leonhard, suisse, 1707-1783.

Elève de Jean Bernoulli. Sans doute un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il s'installa à Saint-Petersbourg auprès de Pierre Ier le Grand (en remplacement de Daniel Bernoulli) puis à Berlin (1741) sous le règne de Frédéric II où il présida l'Académie des sciences jusqu'en 1766 (c'est Lagrange qui lui succéda). Vers la fin de sa vie, alors aveugle, il revint à Saint-Petersbourg invité par Catherine II. Son oeuvre est considérable. Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), et les mathématiques, dans toutes ses branches, de l'arithmétique à la géométrie différentielle en passant par l'analyse numérique et fonctionnelle, le calcul des variations, les courbes et les surfaces algébriques, le calcul des probabilités et les premiers aspects de la théorie des graphes et de la topologie.

Sur la problématique de l'oscillateur harmonique (pendule simple ou ressort).

Plaçons-nous dans le contexte d'un des plus simples des systèmes mécaniques : celui du système masse-ressort idéal, à petites oscillations, soumis à une force extérieure F(t). L'équation du mouvement de la masse m est traditionnellement écrit sous la forme

$$m\ddot{x} + Kx - F(t) = 0, \tag{1}$$

où K est une constante associée au ressort. Expérimentalement les mécaniciens se sont vite aperçus qu'il existait un terme complémentaire en $\dot{x}$, appelé force de "frottement" plus précisément force de dissipation, du fait qu'il est proportionnel à la vitesse, et ce parfois bien qu'il n'existe aucune source de frottement identifiée. On a donc l'équation

$$m\ddot{x} + 2\alpha\sqrt{Km}\dot{x} + Kx - F(t) = 0\ , \tag{2}$$

où α, le coefficient dit de dissipation (ou de viscosité) est bien mesuré.
Il est donc présupposé un espace-temps symbolisé par le couple (x, t). Dans toute la suite, x désignera le déplacement observé par un observateur fixe du laboratoire où l'oscillateur se meut et t le temps qui s'écoule à la montre de cet observateur rivé au laboratoire.
Se donner l'équation simple du pendule (de l'oscillateur harmonique) (1), c'est se donner un certain nombre d'objets : une masse m et donc deux écritures de l'énergie associée $E = mc^2 = h\nu$, où h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière et ν la fréquence relativiste ; une rigidité K et la fréquence de résonnance $\Omega = \sqrt{K/m}$ associée à la solution générale de l'équation homogène associée à (1) ; une force extérieure $F(t)$ agissant sur la masse m.

Cette équation différentielle (1) est établie dans le cadre de la mécanique newtonienne et provient de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3}$$

associée au Lagrangien classique

$$Lc = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x) \tag{4}$$

où $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ désigne l'énergie cinétique de la masse m et $\Phi = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$ le potentiel attaché à la rigidité (ou force de rappel) K et à la force extérieure F.

Tâche 1 : Ecrire une procédure qui à un Lagrangien L associe l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement. Faire un test pour le Lagrangien (4).

Pour ne pas compliquer le problème nous avons supposé que la force de rappel K ne dépend ni de x ni de t, et nous le supposerons par la suite, car là ne se situe pas l'essentiel du propos (autrement dit, le fait que K soit constant ou non est annexe par rapport aux problèmes de fond posés par la modélisation de l'oscillateur harmonique).

Problème : Quel Lagrangien faut-il prendre pour obtenir l'équation du mouvement de l'oscillateur amorti (2) ?

Tâche 2 : Chercher un lagrangien de la forme

$$e^{A(t)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)) \tag{5}$$

tel que l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement soit (2).

Sur la correction relativiste Même si la première correction relativiste, liée à la vitesse $\dot{x}(t)$, est tout à fait négligeable dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'étude de cette correction relativiste dans un cadre Lagrangien, va nous permettre de mettre en évidence le rôle joué par la présence d'un facteur conforme.

Cette correction relativiste s'obtient usuellement en remplacant dans l'équation du mouvement d'une part

$\dot{x}(t)$ par $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$,

et d'autre part

m par $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}}}$,

la masse relativiste. Ainsi on obtient comme termes principaux de l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + (Kx(t) - F(t))(1 - \frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2}) + ... = 0. \tag{6}$$

Une autre manière d'obtenir cette première correction relativiste, est de remplacer $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ par $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + \frac{\dot{x}(t)^2}{4c^2})$ dans le Lagrangien classique. Ces deux obtentions possèdent des inconvénients ; elles ne donnent pas les mêmes points de suspension et font apparaître des termes en $\dot{x}(t)^n$, avec $n > 2$.

Il est facile de remarquer que si l'on pose

$$Lr = e^{\frac{-3}{mc^2}(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)}Lc = e^{\frac{-3}{mc^2}\Phi(t,x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)), \tag{7}$$

("r" comme relativiste), on obtient :

$$m\ddot{x}(t) + (Kx(t) - F(t))(1 - \frac{3\dot{x}(t)^2}{2c^2}) + \frac{3\dot{F}(t)x(t)}{c^2}\dot{x}(t) - \frac{3}{mc^2}(Kx(t) - F(t))(\frac{1}{2}Kx^2(t) - F(t)x(t))) = 0. \tag{8}$$

Nous obtenons ainsi une formulation simple de la correction relativiste dans les coordonnées (t, x) du laboratoire. Sans doute est-elle connue ? Je ne l'ai pas encore trouvée dans la littérature.

Tâche 3 : Vérifier ces assertions concernant la correction relativiste.

Remarque : Mais des expériences plus fines, lors d'études sur l'amortissement en régime transitoire rapide, montrent qu'il faut remplacer le coefficient $2\alpha\sqrt{Km}$ de l'équation par une fonction $t \to 2m\alpha\sqrt{K/m} + \beta t + ...$; et ce coefficient β commence à être bien mesuré. Le problème est donc le suivant : Soit $m\ddot{x} + m\gamma(t)\dot{x} + Kx - F(t) = 0$ cette équation du mouvement, comment obtenir théoriquement cette fonction $\gamma(t)$? Question ouverte, mais importante, il est une expérience que l'on fait souvent, celle de constater que la plupart des pannes mécaniques interviennent pendant la mise en route ou lors de l'arrêt d'un système. Peut-on limiter les sources de ces pannes qui proviennent lors d'un changement de régime brutal. En régime normal, on sait qu'il suffit d'éviter des plages de résonances, mais le problème reste incompris en régime transitoire (démarrage, arrêt, ou ... panne secondaire qui perturbe soudainement le régime normal).
Un régime transitoire rapide, correspond à une force $F(t) = F_o sin(\omega(t)t)$ où $\omega(t)$ passe rapidement d'une valeur ω_1 à une valeur ω_2. Ce régime transitoire peut simuler la mise en marche ($\omega_1 = 0$) ou l'arrêt ($\omega_2 = 0$) d'un régime dit permanent ($F(t) = F_o sin(\omega\ t)$) pour lequel l'équation du mouvement (2) est valable semble-t-il.

Résumé sur la formulation Lagrangienne conforme

Nous venons de voir que pour obtenir le terme d'amortissement ou la correction relativiste pour l'oscillateut harmonique dans le cadre Lagrangien nous avons multiplié le Lagrangien classique par un facteur (dit conforme).
Dans un cadre plus général, écrivons la formulation Lagrangienne du problème, en partant du Lagrangien classique associé à un champ $\Phi(t, x)$:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \Phi(t, x). \tag{9}$$

Introduisons un facteur conforme en prenant :

$$L = e^{H(t,x)}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \Phi(t,x)\ ), \tag{10}$$

dont l'équation du mouvement s'écrit alors

$$m\ddot{x} + \frac{m}{2}H'\dot{x}^2 + m\dot{H}\dot{x} + \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}\ + H'\Phi(t,x). \tag{11}$$

Pour $\Phi(t,x) = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x$, cette formule redonne aussi bien la correction relativiste (avec $H(t,x) = \frac{-3}{mc^2}(\frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x)$) que le régime permanent (avec $H(t,x) = 2\alpha\Omega t$) ; de plus ces deux corrections sont indépendantes.
Mais dans ce cadre Lagrangien, comment trouver ce facteur conforme $H(t,x)$, pour un régime transitoire rapide par exemple ?
Il manque des équations.

Tâche 4 : Vérifier ces assertions.

Interprétation : le temps propre de la pièce mobile.
Pour la correction relativiste le temps propre de la pièce mobile n'est pas le temps de l'observateur fixe (attaché au laboratoire) du fait des principes de la relativité restreinte. Pour l'oscillateur harmonique la correction relativiste est négligeable, et pourtant pour obtenir le mouvement amorti, tout se passe comme si le temps propre de la pièce mobile n'était pas le temps de l'observateur fixe et cela se traduit dans le cadre Lagrangien par un facteur conforme. Signalons :

1- A toute équation du mouvement de la forme (11), on peut associer une connexion abstraite Γ sur l'espace-temps telle l'une des équations des géodésiques soit exactement cette équation d'Euler-Lagrange (11).

2- Inversement à toute métrique g, définie sur l'espace-temps, on peut associer le Lagrangien

$$L_g = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp} \tag{12}$$

tel que les équations d'Euler-Lagrange correspondantes soient les équations des géodésiques définies par la connexion associée à cette métrique.
Une étude dans ce cadre métrique (pseudo-riemannien) dépasse le programme ; nous n'allons donc pas plus loin.

3 Les polynômes de Jacobi

Jacobi Carl, Gustav, allemand, 1804-1851.
Professeur de mathématiques à Berlin et à l'université de Königsberg, où il sera l'ami de Bessel. A Paris, il se liera avec les grands mathématiciens de l'époque comme Legendre et Poisson. Ses travaux portent essentiellement, avec Abel, sur l'étude des fonctions elliptiques (dès 1829), les équations différentielles et aux dérivées partielles, les systèmes d'équations linéaires, la théorie des déterminants. Il fut aussi un des pricipaux artisans du journal de Crelle.

Le but de ce paragraphe est de se familiariser avec différentes définitions possibles de cette famille de polynômes, puis d'en voir la propriété essentielle : cette famille forme une base orthogonale d'un espace de Hilbert. Ce paragraphe se présente sous la forme d'une épreuve de Calcul Formel. A chacun de voir comment relier l'une ou l'autre des définitions possibles à un thème de l'épreuve de modélisation.

3.1 Question I : Différentes définitions

I a) La "définition Maple" ; en utilisant *with(orthopoly)*, vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, a et $b \in \mathbb{C}$, et $x \in \mathbb{R}$,

$$(n, x) \to JacobiP(n, a, b, x)$$

est bien nommé polynôme de Jacobi. Ecrire la séquence des quatre premiers polynômes.

Vérifier que les polynômes de Jacobi sont identiques aux fonctions

$$\frac{\Gamma(n+a+1)\, hypergeom\left([n+a+b+1, -n], [a+1], 1/2 - 1/2\, x\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(a+1)}. \tag{13}$$

Considérer le cas particulier où $a = b = 0$ qui permet de retrouver les polynômes de Legendre.

Legendre, Adrien Marie, français, 1752-1834.

Après de brillantes études, recommandé par d'Alembert, il sera nommé professeur de mathématiques à l'École militaire de Paris. Ses premiers travaux portèrent sur la mécanique (mouvement des projectiles, orbites planéataires). Il fut un spécialiste de géodésie et travailla, sous la Convention, à l'adoption du système métrique. Sa contribution mathématique fut importante en calcul des variations (Méthode pour distinguer les maxima et les minima dans les questions dépendant du calcul des variations, 1786), dans l'étude des intégrales elliptiques (ce qualificatif est de lui) et en théorie des nombres. Legendre compléta certains travaux de Euler et Lagrange relatifs à la convergence des approximations d'un réel par une fraction continue.

I b) La définition par fonction génératrice ; soit $R = \sqrt{1 - 2\,tx + t^2}$, et posons

$$gen = t \to \frac{2^{a+b}}{R\,(1+t+R)^b\,(1-t+R)^a}, \tag{14}$$

on notera Jacobi1(n,x) le coefficient de t^n du développement de taylor en 0 de *gen*.
Ecrire une procédure qui donne Jacobi1(n,x) et donner la séquence des 4 premiers polynômes obtenus.

I c) La définition par dérivation ; soit Jacobi2(n,x) le polynôme défini par

$$\frac{(-1/2)^n\, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left((1-x)^{a+n}\,(1+x)^{b+n}\right)}{n!\;(1-x)^a\,(1+x)^b}. \tag{15}$$

Ecrire une procédure qui donne Jacobi2(n,x) et donner la séquence des 4 premiers polynômes obtenus.

I d) La définition par l'équation différentielle (de Jacobi) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction Jacobi3(n,x) est définie comme la solution polynômiale vérifiant $Jacobi3(n, 1) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(a+1)n!}$ de l'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}f(x) + (b - a - (a+b+2)\,x)\,\frac{d}{dx}f(x) + n\,(n+a+b+1)\,f(x)\,. \tag{16}$$

Ecrire une procédure qui donne Jacobi3(n,x) et donner la séquence des 4 premiers polynômes obtenus.

I e) La définition par récurrence ; posons $Jacobi4(0, x) = 1$, $Jacobi4(1, x) = (a/2 - b/2) + (1 + a/2 + b/2)x$ et pour $n \geq 2$

$$Jacobi4(n, x) = 1/2\,\frac{(2\,n+a+b-1)\left(a^2 - b^2 + (2\,n+a+b-2)\,(2\,n+a+b)\,x\right) Jacobi4\,(n-1, x)}{n\,(n+a+b)\,(2\,n+a+b-2)}$$
$$- \frac{(n+a-1)\,(n+b-1)\,(2\,n+a+b)\,Jacobi4\,(n-2, x)}{n\,(n+a+b)\,(2\,n+a+b-2)}. \tag{17}$$

Ecrire une procédure qui donne Jacobi4(n,x) et donner la séquence des 4 premiers polynômes obtenus.

3.2 Question II : L'espace de Hilbert $L^2([-1,\ 1],(1-x)^a\,(1+x)^b\,dx)$

Vérifier que les 4 premiers polynômes de Jacobi forment une famille orthogonale dans l'espace de Hilbert $L^2([-1,\ 1],(1-x)^a\,(1+x)^b dx)$. Peut-on transformer cette propriété en une nouvelle définition ?

Pouvez-vous proposer encore une autre définition possible ?

4 Sur l'équation de la corde vibrante et autres EDP

Jean le Rond d'ALEMBERT, français, 1717-1783

Enfant naturel d'un commissaire d'artillerie, abandonné sur les marches de la chapelle parisienne de Saint-Jean-Le-Rond,le futur grand philosophe, mathématicien et physicien est recueilli par un vitrier qui recevra secrètement une pension pour subvenir à l'éducation du jeune garçon qui étudiera brillamment le droit, la médecine et les mathématiques. Suite à la publication de divers mémoires (sur le calcul intégral, sur la réfraction des corps solides), d'Alembert entre à l'Académie des sciences (1741). On lui doit le célèbre principe de la quantité de mouvement, dit principe de d'Alembert dans son Traité de dynamique (1743). En astronomie, il est l'auteur (1749) d'un traité sur la précession des équinoxes qu'il explique au moyen de la théorie de la gravitation universelle de Newton et d'une solution partielle au problème des trois corps.

4.1 Quelques EDP

Un sujet classique de modélisation est celui d'une corde vibrante (corde frappée pour le piano, pincée pour le clavecin). Ce problème, d'énoncé simple, conduit à une des EDP classique.

Quelques EDP classiques et moins :

– L'équation des ondes en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\,(x,t)-k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\,(x,t)=F(x,t). \tag{18}$$

– Une équation de viscoélasticité :

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)-\alpha\,u_{xxt}(x,t)=F(x,t). \tag{19}$$

Ici les notations changent ; par exemple $u_{xt}(x,t)$ signifie $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}u(x,t)$.

– Le Laplacien et l'équation de Poisson :

$$\Delta u(x,y,z)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u(x,y,z)=F(x,y,z). \tag{20}$$

– L'équation de la chaleur :

$$\Delta u-ku_t=F(x,t) \tag{21}$$

On pourra résoudre chacune de ces équations, en prenant F=0, puis F un polynôme simple (par exemple $F(x,y,z)=(ax+by)^2$ pour le Laplacien) en utilisant successivement *pdsolve(equation,u(...))* puis *pdsolve(equation,u(...),HINT=...)* ou (et) *pdsolve(equation,u(...),build)*.

Ecrire une procédure qui attribue à une EDP le fait qu'elle soit hyperbolique, parabolique ou elliptique. L'appliquer aux EDP ci-dessus.

4.2 Un peu plus sur l'équation des ondes

Vous connaissez la solution de d'Alembert pour l'équation des ondes en dimension 1.
Vérifier que $u(x,t)=\frac{1}{2}(\,f\,(x+kt)+\,f\,(x-kt))+\frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt}g\,(z)\,dz$, pour l'équation des ondes avec F=0, et avec les conditions initiales $u(x,0)=f(x)$ et $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=g(x)$.

Quelle est la solution générale (donnée par Maple) de l'équation (18), pour F(x,t) quelconque, sans conditions initiales.

Vérifier que la solution générale de l'équation (18), pour F(x,t) quelconque, avec les conditions initiales est
$u(x,t) = \frac{1}{2}(\, f\,(x+kt) + \, f\,(x-kt)) + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} g\,(z)\,dz - \frac{1}{k^2}\int_0^x \int_0^b F(a,(-a+2b-x+kt)/k)\,da\,db.$
C'est une forme de la solution donnée par d'Alembert. On pourra lui préferrer la forme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\, f\,(x+kt) + \, f\,(x-kt)) + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} g\,(z)\,dz - \frac{1}{2k}\int_0^t \int_{x-k(t-s)}^{x+k(t-s)} F(y,s)\,dy\,ds. \quad (22)$$

Pour l'équation des ondes en dimension 2 d'espace, Poisson a fourni la solution générale.

POISSON Siméon Denis, français, 1781- 1840.

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de "l'enseignement mathématique des collèges de France". Elevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), il fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (Théorie du calcul des probabilités, 1838), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique et mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes) où, introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), il apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la physique mathématique moderne (étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois -attribuées par l'expérience- qui le régissent). Membre éminent de l'Académie des Sciences, il rejettera les travaux du jeune Galois en 1831.

L'équation des ondes en dimension n d'espace est définie, pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, par

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u\,(x,t) - k^2 \Delta u\,(x,t) = F(x,t). \quad (23)$$

Pour n=2 ou 3, et F=0, faire *pdsolve(equation,u(...))*, pour trouver des solutions.

Une autre solution de la forme $u(x,t) = G(t/|x|)$; montrer que u est solution si $z \to G(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire que l'on explicitera et résoudra pour n=1,2 et 3.

Au niveau bibliographique, on pourra voir le Livre de H. Reinhard "Equations aux dérivées partielles", Dunod,1991.

5 Sur différentes théories de l'intégration

RIEMANN Bernhard, allemand, 1826-1866.

Ce très grand mathématicien, élève de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet (dont il reprit la chaire) fut professeur en la célèbre université de Göttingen. Il mourut prématurément, atteint de tuberculose à Selesca (lac Majeur, Italie) où il se soignait. Riemann crée la théorie des fonctions algébriques et développe la théorie des fonctions de variables complexes (dont l'initiateur fut Cauchy). Il complétera les travaux de Dirichlet, son maître, sur les séries trigonométriques et leurs problèmes de convergence. En géométrie différentielle, qui était jusqu'alors l'étude locale des courbes et des surfaces paramétrées (de l'espace usuel) faisant intervenir le calcul différentiel (orientation, tangentes, plan tangent, normale, torsion, ...) et intégral (longueur d'un arc, aires), Riemann crée le puissant concept de variété différentielle et conçut la notion dite, de nos jours, de surface de Riemann pour l'étude de "fonctions" complexes multiformes (on dit aussi multivalentes) : un point possède plusieurs images. Sur une telle surface, constituée de "feuillets" raccordés continûment, une fonction multiforme devient uniforme (un point n'a qu'une seule image).

LEBESGUE Henri Léon, français, 1875-1941.

Ancien élève de l'E.N.S., il eut Emile Borel comme professeur (à qui l'on doit les premiers travaux conséquents en théorie de la mesure). Après quelques années au lycée de Nancy, Lebesgue enseignera à Rennes. C'est pendant cette période qu'il se fera connaître par son élégante théorie de la mesure. Professeur à la Sorbonne puis au collège de France, il sera élu à l'Académie des sciences en 1922. Par sa théorie des fonctions mesurables (1901) s'appuyant sur les tribus boréliennes (du nom du mathématicien Emile Borel), Lebesgue a profondément remanié et généralisé le calcul intégral. Sa théorie de l'intégration (1902-1904) répond aux besoins des physiciens en permettant la recherche et l'existence de primitives pour des fonctions "irrégulières" et recouvre (coïncide avec) les différentes théories jusqu'ici avancées et apparaissant comme des cas particuliers : Riemann : fonctions en escalier, fonctions continues Darboux : fonctions bornées Stieltjes : fonctions à variation bornée

Ce paragraphe a évidemment pour but de mettre en évidence le fait que les principales théories de l'intégration, celle de Riemann, celle de Riemann généralisée et celle de Lebesgue ne sont pas définies sur les mêmes espaces de fonctions. Il a pour but aussi d'explorer la "théorie Maple" de l'intégration et de la situer par rapport aux précédentes.

Question 1 : Comment intégrer correctement (avec Maple) la fonction $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sur le pavé $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$?

Quelles conclusions en tirer ? Au fait connaissez-vous une théorie de l'intégration sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, au sens de Riemann ?

Question 2 : Soit $x \to a(x)$ et $x \to b(x)$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; soit pour A une partie de $\mathbb{R}$, la fonction indicatrice $x \to I_A(x)$ de A. Maple intègre-t-il la fonction (non intégrable au sens de Riemann) $f = x \to a(x)I_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + b(x)I_{\mathbb{Q}}$ sur $[0,\ y]$?

Indication : on pourra définir f à l'aide de la procédure *piecewise* ou par l'instruction :
f :=proc(x) if type(x,rational) or type(x,float) then b(x) else a(x) fi end ;

Une réflexion sur le concept de typage d'un nombre dans le cadre d'un Calcul Formel et sur celui de borélien est, me semble-t-il, inévitable.

Question 3 : Intégrer la fonction $x \to \frac{sin(x)}{\sqrt{(x)}}$ sur l'intervalle $[1,\ \infty]$ au sens de Riemann généralisé puis au sens de Lebesgue. Conclusions.

Question 4 : Sur l'effectivité. On considère la fraction rationnelle : $R = \frac{X^6+1}{X^5+X^2+2}$.
Calculer une primitive de R. Vérifier puis expliquer le résultat obtenu.
L'intégration se fait dans $\mathbb{C}$(i.e. tous les paramètres sont présupposés complexes). Calculer une primitive de $ch(ax)cos(bx)$, et donner une solution "réelle simple".

Amusement : Etudier l'intégrale $\int_0^1 \frac{\left(x-x^2\right)^4}{1+x^2} dx$.

6 Sur la transformation de Laplace

Si, au cours de vos études, vous avez eu l'occasion d'étudier un peu la transformation de Fourier, il apparaît que peu d'étudiants ont eu l'occasion de se frotter à d'autres transformations intégrales, en particulier celle de Laplace.
Voir donc la bibliothèque *inttrans*.

LAPLACE Pierre Simon, français, 1749-1827

Savant universel, astronome, physicien, mathématicien et fin politicien, Laplace fut inspecteur des armées avant la révolution de 1789, ministre sous Bonaparte, comte sous Napoléon, marquis sous Louis XVIII. Il fut ami du chimiste Lavoisier qui traversa avec moins de chance cette période trouble de l'histoire de France. Laplace, alors brillant jeune mathématicien fut recommandé par d'Alembert et nommé professeur de mathématiques à l'École Militaire de Paris. Il prouve (1783), en démontrant l'invariance des grands axes des orbites planétaires, la stabilité mécanique du système solaire, ce qui lui vaut, à 24 ans, une place à l'Académie des Sciences. Examinateur (1785) du jeune Napoléon Bonaparte, alors élève de l'École Militaire, il enseignera ensuite à l'École Polytechnique, dont il fut, avec Monge, un des fondateurs (ainsi que de l'Ecole Normale) avant d'entamer sa carrière politique.

6.1 Définitions et propriétés

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$; la transformée de Laplace, notée L(f) est l'application qui à un nombre complexe p associe (sous réserve de la convergence de l'intégrale)

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(x)exp(-px)dx. \tag{24}$$

Conditions suffisantes d'existence : Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors L(f) existe pour tout p tel que $Re(p) > 0$. Plus généralement, si f est mesurable et tel que $|f(x)| \leq M\, exp(a\, x)$, alors L(f)(p) existe pour tout p tel que $Re(p) > a$.

Comme pour la transformation de Fourier, il y a une formule d'inversion ; elle est définie pour toute fonction F(p) définie sur $Re(p) > a$ par :

$$invL(F)(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)exp(px)dp, \tag{25}$$

pour tout $c > a$ et $x \in \mathbb{R}^+$, sous réserve de l'absolue convergence de l'intégrale, et l'on a $invL(L(f)) = f$.
(curieusement cette définition n'est pas précisée par Maple).

- Propriété de translation : $L(f(x - x_o)(p) = exp(-px_o)L(f)(p)$.
- Propriété de dilatation : $L(f(\lambda x))(p) = 1/\lambda\ L(f)(p/\lambda)$.
- Propriété de linéarité : $L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g)$.
- Propriété multiplicative : $L(exp(\nu x)f(x))(p) = L(f)(p - \nu)$.
- Propriété de dérivation : $L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0)$.
- Propriété d'intégration : $L(\int_0^x f(y)dy))(p) = L(f)(p)/p$.
- Propriété de convolution : $L(\int_0^x f(x - y)g(y)dy)) = L(f)\ L(g)$.

Evidemment ces propriétés sont valides lorsqu'elles ont un sens (au sens de l'intégration de Lebesgue).

Tâche 1 : Vérifier avec Maple ces propriétés et les propriétés correspondantes de la transformation inverse de Laplace.

6.2 Applications de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace s'étend aux distributions, aux opérateurs différentiels (au moyen de la propriété de dérivation), ... d'où des applications nombreuses que les physiciens utilisent.

Tâche 2 : Calculer la transformée de Laplace de la fonction sin(ax), de la distribution de Dirac de celle de Heaviside.

Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace l'équation différentielle $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$. Comparer le résultat avec celui donné par *dsolve*. Vos commentaires.

Calculer directement puis en utilisant la transformation de Laplace : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\, sin(xt)}{1+t^2}\, dt$.

Sur l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$, avec comme conditions aux limites $u(0,t) = \alpha(t)$, $u(l,t) = \beta(t)$ et comme condition initiale u(x,0)=0 ; C'est donc le problème d'une tige de longueur l (ou d'une plaque d'épaisseur l) dont les extrémités (ou les faces) sont maintenues à des températures données qui évoluent suivant $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et qui à l'instant t=0 a une température homogène K. Faire la transformation de Laplace du problème, puis le résoudre.

7 Fuchs, Abel, Wronsky et les équations différentielles linéaires

On doit à Fuchs un théorème permettant l'étude des solutions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre et à coefficients polynomiaux, en particulier une classification utile en fonction des racines de l'équation indicielle associée à l'équation différentielle. La propriété du wronskien associée à une base de solutions permet d'obtenir rapidement une forme intégrée de l'identité d'Abel.

FUCHS Lazarus, allemand, 1833-1902.

Elève de Weierstrass, il professa en particulier à Göttingen et à Berlin. Il dirigera le célèbre journal de mathématiques pures et appliquées fondé par Crelle. Ses travaux portant sur l'étude de solutions singulières (fonctions fuchsiennes) d'équations différentielles linéaires, seront complétés par Poincaré. On lui doit aussi une classification des équations différentielles du 1er ordre.

WRONSKY Hoëné Joseph Marie, polonais, 1775-1853.

Officier, philosophe et mathématicien ("Introduction à la philosophie des mathématiques", "Philosophie de l'infini"), sa contribution en mathématiques portera essentiellement sur le calcul différentiel. Il s'installera en France dès 1801.

Wronskien : déterminant W(x) faisant intervenir les (n-1) premières dérivées de n solutions d'une équation différentielle d'ordre n et permettant d'affirmer, si W n'est pas identiquement nul, que les solutions sont linéairement indépendantes.

ABEL Niels Henrick, norvégien, 1802-1829.

Les travaux de ce grand mathématicien, victime de la tuberculose à peine âgé de 27 ans, ne furent reconnus qu'après sa mort. Son mémoire fondamental sur les fonctions elliptiques, présenté par Hachette (1826) à l'Académie des Sciences de Paris, fut mésestimé par Gauss et Legendre puis égaré et heureusement retrouvé par Cauchy mais, hélas, après la mort d'Abel. Ce sera Jacobi qui comprendra tout le génie du jeune mathématicien. C'est avec ce dernier qu'Abel recevra, à titre posthume, le grand prix de mathématiques de l'Institut de France (1830).

Si à 16 ans, il pense avoir prouvé la possibilité de résoudre par radicaux l'équation du 5ème degré, c'est à 19 ans qu'il reviendra sur son résultat en prouvant le contraire : l'impossibilité, dans le cas général, de résoudre par radicaux une équation algébrique (polynomiale à coefficients rationnels) de degré 5. Ce résultat, que Gauss, incrédule, refusa de lire, ne fut publié qu'en 1826 dans le journal de Crelle

Le théorème de Fuchs s'appliquent donc aux équations différentielles linéaires du deuxième ordre et à coefficients polynomiaux que l'on peut écrire sous la forme

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x\, P(x) \frac{d}{dx} f(x) + Q(x)\, f(x) = 0, \tag{26}$$

où P et Q sont deux fractions rationnelles. Le point x=0 est dit point singulier régulier si les fonctions P et Q sont analytiques dans un disque $D = \{\|z\| < R\}$. Le théorème de Fuchs précise la nature de l'analiticité des solutions, qui dépend des racines de l'équation indicielle :

$$s(s-1) + P(0)s + Q(0) = 0\,.$$

La nature de l'analicité des solutions varie selon que la différence des deux racines de l'équation indicielle est nulle ou non, entière ou non.

Exemple : l'équation hypergéometrique :

$$x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} f(x) + (c - (a+b+1)x) \frac{d}{dx} f(x) - ab\, f(x) = 0,$$

où a,b et c sont des nombres complexes.
Tâche 1 : Résoudre l'équation indicielle. Résoudre l'équation hypergéométrique générique puis dans des cas particuliers associés à une racine double de l'équation indicielle et à une différence entière entre ces racines. Conclusions.

L'identité d'Abel : propriété du Wronskien.
Pour une équation du type (26) le wronskien de deux solutions linéairement indépendantes f_1 et f_2 est égal à

$$K\,exp(-\int P(x)/x)$$

(c'est l'identité d'Abel).
Tâche 2 : Intégrer cette identité d'Abel vue comme équation différentielle en f_2.
Vérifier que cette identité intégrée fourni une vérification des cas particuliers de la tâche 1. Conclusions.

Au niveau bibliographique, on pourra voir le Livre de H. Reinhard "Equations différentielles", Dunod,1989. (Voir page 359 le libellé complet du théorème de Fuchs).

8 De l'équation logistique à la croissance de populations

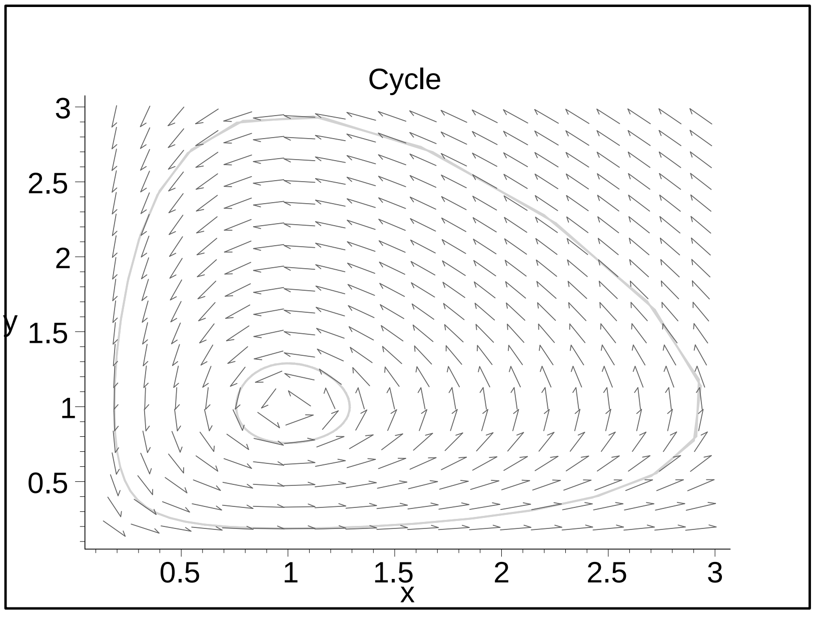
Changement de présentation : une session Maple sur ce thème

8.1 Préliminaire : utilisation de DEplot

>restart :with(DEtools) :
>sys := [diff(x(t),t) = x(t)*(1-y(t)), diff(y(t),t) = y(t)*(x(t)-1)] ;

$$sys := [\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,(1-\mathrm{y}(t)),\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(t)\,(\mathrm{x}(t)-1)]$$

>DEplot(sys,[x(t),y(t)],t=-7..7,[[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=0.2,y(0)=.7]],stepsize=.2,title='Cycle') ;



8.2 Croissance d'une population de manière logistique.

La croissance de la population dépend d'un facteur bloquant : quantité de nourriture, espace total fini...

>eqlogis := diff(N(t),t)-r*N(t)*(1-N(t)/K) ;

$$eqlogis := (\frac{d}{dt}\,\mathrm{N}(t)) - r\,\mathrm{N}(t)\,(1 - \frac{\mathrm{N}(t)}{K})$$

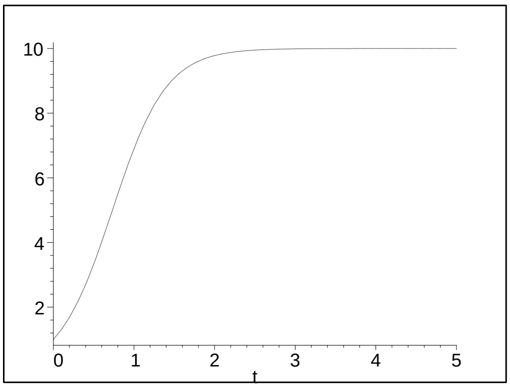
K représente la population maximale atteinte dans le temps

>a :=dsolve({eqlogis,N(0)=1}) ;

$$a := \mathrm{N}(t) = \frac{K}{1 + e^{(-r\,t)}\,(K - 1)}$$

>val :={K=10,r=1} :

>plot(subs(val,op(2,a)),t=0..5) ;



8.3 Simulation d'une population de poissons croissant d'une manière logistique mais pêché.

Le nombre de poisson péché étant proportionel au nombre de poisson.

>eq :=diff(N(t),t)-r*N(t)*(1-N(t)/K)+v*E*N(t) ;

$$eq := (\frac{d}{dt}\,\mathrm{N}(t)) - r\,\mathrm{N}(t)\,(1 - \frac{\mathrm{N}(t)}{K}) + v\,E\,\mathrm{N}(t)$$

>a :=dsolve({eq,N(0)=5}) ;

a := N(t)=

$$\frac{K\,(-r + v\,E)}{-r - \frac{1}{5}\,\frac{e^{((-r+v\,E)\,t)}\,(-r\,K + 5\,r + v\,E\,K)\,r}{-r + v\,E} + \frac{1}{5}\,\frac{e^{((-r+v\,E)\,t)}\,(-r\,K + 5\,r + v\,E\,K)\,v\,E}{-r + v\,E}}$$

Si $r > vE$ alors la population croît jusqu'à K(1-vE/r). Si $r < vE$ l'espèce décroit jusqu'à disparaître.

>val :={K=10, r=4, v=1} ;

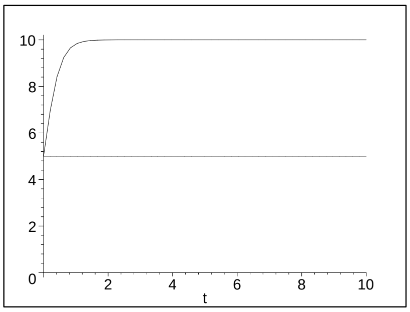
$$val := \{K = 10,\, r = 4,\, v = 1\}$$

>with(plots) :

>A :=animate(subs(val,op(2,a)),t=0..10,E=0..5,frames=50,color=black) :

>B :=plot(subs(val,subs(E=2,op(2,a))),t=0..10,color=blue) :

>display(A,B) ;



8.4 Même cas que précédemment mais E dépend des conditions du marché

>eq1 :=diff(N(t),t)=r*N(t)*(1-N(t)/K)-v*E(t)*N(t) ; eq2 :=diff(E(t),t)=alpha*E(t)*(v*p*N(t)-c) ;

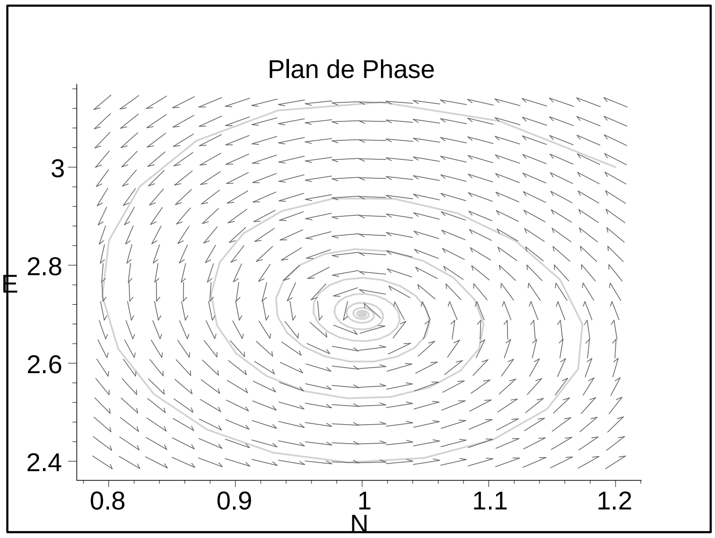
$$eq1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{N}(t) = r\,\mathrm{N}(t)\,(1 - \frac{\mathrm{N}(t)}{K}) - v\,\mathrm{E}(t)\,\mathrm{N}(t)$$

$$eq2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{E}(t) = \alpha\,\mathrm{E}(t)\,(v\,p\,\mathrm{N}(t) - c)$$

>val :={K=10, r=3,v=1, alpha=1, p=1, c=1} ;

$$val := \{K = 10,\ r = 3,\ v = 1,\ \alpha = 1,\ p = 1,\ c = 1\}$$

>DEplot(subs(val,{eq1,eq2 }),[N(t),E(t)],t=0..100,[[N(0)=1.2,E(0)=3]],stepsize=.2,title='Plan de Phase') ;



9 Exemple d'un problème numériquement instable

La suite de Jean-Michel Muller.
Considérons la suite définie par :
$a(n+1) := 111 - \frac{1130}{a(n)} + \frac{3000}{a(n)\ a(n-1)}$; avec $a(0) = \frac{11}{2}$ et $a(1) = \frac{61}{11}$.
Quelle est la limite de cette suite ? On pourra faire d'une part un calcul numérique (approché), d'autre part un calcul formel (exact) des 15 ou 20 premiers termes. Conclusions ?

10 Divertissements

19 est un drôle de nombre
19 est premier, bien sûr, mais surtout c'est le carré d'autres entiers et aussi une racine carrée de 1 ! Si, si c'est juste quand on calcule modulo 30.
Pourquoi n =30 est le plus petit entier n tel qu'il existe k vérifiant
k est premier,
k est racine carrée de 1 modulo n,
k est un carré modulo n.
Mystère.

Un autre drôle de nombre
Trouver le plus petit entier multiple de 9 tel qu'en base dix il soit palindrome avec son quotient par 9.

Etudier la période de l'écriture décimale de l'inverse de ce nombre.

Question : Connaissez-vous la célèbre formule de Ramanujan qui permet de calculer π avec une extraordinaire précision ?

Réflexion : Maths et Sciences.
Thèse 1 : « espace et temps sont les cadres a priori de toute description de notre expérience. »
E. KANT
Thèse 2 : « L'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky. Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace. »
H. POINCARE
Synthèse : "Consécutivement, et même synchroniquement, on constate de nombreux cas où l'explication scientifique admet plusieurs modèles pour un même domaine phénoménal. Cette pluralité est-elle le signe que nous n'atteignons jamais que des apparences ? "
"La vérification scientifique, outre son sens trivial d'élimination des illusions et des erreurs immédiatement décelables, consiste donc en une mise à l'épreuve, le plus souvent très médiate, d'un parti pris de représentation de l'expérience."
G.-G. GRANGER