

**Chemins et Tableaux.**  
**Contributions à des problèmes de combinatoire**  
**énumérative et bijective.**

Philippe Nadeau  
Laboratoire de Recherche en Informatique

Département d'Informatique  
Université Paris Sud

Thèse de Doctorat  
sous la direction de Dominique Gouyou-Beauchamps

· 2007 ·

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Pourquoi chercher des bijections? . . . . .	2
1.2	Chemins et Tableaux . . . . .	3
1.3	Plan de la Thèse . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>9</b>
2.1	Chemins . . . . .	9
2.1.1	Chemins de Dyck . . . . .	10
2.1.2	Chemins de Motzkin . . . . .	10
2.2	Partitions et tableaux de Young . . . . .	11
2.2.1	Partitions . . . . .	11
2.2.2	Tableaux de Young . . . . .	12
2.2.3	Un codage des partitions . . . . .	13
2.3	Permutations . . . . .	14
2.3.1	Le groupe symétrique . . . . .	14
2.3.2	La correspondance de Schensted . . . . .	15
2.3.3	Représentations du groupe symétrique . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Chemins sur le plan incisé</b>	<b>19</b>
3.1	Définitions . . . . .	20
3.1.1	Chemins et Mots . . . . .	20
3.1.2	Chemins sur le plan incisé . . . . .	20
3.2	Résultats . . . . .	21

3.2.1	Le cas symétrique . . . . .	21
3.2.2	Extension au cas non symétrique . . . . .	22
3.3	Preuve du Théorème 3.2 . . . . .	23
3.3.1	$\Psi$ est bien définie . . . . .	24
3.3.2	Définition de la fonction $\Gamma$ . . . . .	24
3.3.3	$\Gamma$ est la réciproque de la fonction $\Psi$ . . . . .	26
3.3.4	Remarques . . . . .	26
3.4	Preuve du Théorème 3.4 . . . . .	27
3.4.1	Les curieux chemins du Théorème 3.4 . . . . .	28
3.4.2	Démonstration . . . . .	29
3.5	Applications . . . . .	30
3.5.1	Exemples d'énumération . . . . .	31
3.5.2	Nombre moyen de passages à une ordonnée donnée . . . . .	32
3.6	Variation : chemins dans la partie supérieure du plan incisé . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Configurations de <i>Fully Packed Loops</i></b>	<b>35</b>
4.1	Définitions et Résultats . . . . .	36
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	39
4.2.1	Invariance par rotation . . . . .	39
4.2.2	Couplage et diagramme de Ferrers . . . . .	39
4.2.3	Un résultat énumératif de pavage par des losanges . . . . .	40
4.3	Arêtes forcées . . . . .	42
4.4	Preuve de la conjecture 4.1 pour $m$ suffisamment grand . . . . .	46
4.5	Preuve de la conjecture 4.1 pour $m$ petit . . . . .	51
4.6	Configurations FPL dans un triangle . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Permutations : tableaux et motifs</b>	<b>67</b>
5.1	Compléments sur les permutations . . . . .	67
5.2	Tableaux de permutations . . . . .	68
5.3	Construction récursive des tableaux de permutation . . . . .	69
5.4	Bijection entre tableaux et permutations . . . . .	72

5.4.1	Types de permutations . . . . .	73
5.4.2	Compléments sur le motif 31-2 . . . . .	73
5.4.3	Réduction et reconstruction d'une permutation . . . . .	76
5.4.4	La bijection . . . . .	77
5.5	Chemins et énumération à nombre de 31-2 fixé . . . . .	78
5.5.1	Codage par un chemin . . . . .	78
5.5.2	Permutations sans occurrence de 31-2 . . . . .	80
5.5.3	Permutations avec une occurrence de 31-2 . . . . .	81
5.6	Tableaux de Bell . . . . .	83
5.6.1	Tableaux G-Bell . . . . .	84
5.6.2	Bijection entre tableaux G-Bell et D-Bell . . . . .	85
5.6.3	Permutations qui évitent 32-1 . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Tableaux de Rubans</b> . . . . .	<b>87</b>
6.1	Définitions . . . . .	88
6.2	Bijections et ensembles signés . . . . .	90
6.3	Permutations d'équerres et Involutions d'équerres . . . . .	91
6.3.1	Permutations d'équerres . . . . .	91
6.3.2	Involutions d'équerres . . . . .	92
6.4	Résultats . . . . .	93
6.5	Règles locales . . . . .	94
6.6	Approche bijective . . . . .	98
6.6.1	Bijection pour les permutations d'équerres . . . . .	98
6.6.2	Bijection pour les involutions d'équerres . . . . .	103
6.6.3	Lien avec les travaux antérieurs . . . . .	105
6.7	Approche algébrique . . . . .	105
6.7.1	Opérateurs linéaires . . . . .	105
6.8	Colonnes de la table des caractères de $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	108
6.8.1	Une formule pour $\sum_{\lambda} \chi_{\mu}^{\lambda}$ . . . . .	108
6.8.2	Autres énumérations de $C(\mu)$ . . . . .	110

6.9 Extensions . . . . .	110
6.10 Opérations sur les rubans . . . . .	111
<b>7 Conclusion</b>	<b>115</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>

# Table des figures

1.1	Les 4 classes d'objets combinatoires étudiés : chemins en haut, tableaux en bas. . . . .	3
1.2	Diagramme de cordes. . . . .	4
1.3	Motif avec arches emboîtées. . . . .	6
2.1	Chemin de Dyck. . . . .	10
2.2	Chemin de Motzkin. . . . .	11
2.3	Chemin de Motzkin bicolore. . . . .	11
2.4	Partition et tableau standard. . . . .	12
2.5	Chaîne de partitions. . . . .	13
2.6	Partition encodée par une suite doublement infinie. . . . .	14
2.7	La correspondance de Schensted. . . . .	16
2.8	Table des caractères de $\mathfrak{S}_6$ . . . . .	18
3.1	De gauche à droite : un ensemble $\mathfrak{S}$ qui n'est ni symétrique ni à petites variations verticales ; un ensemble symétrique ; un ensemble à petites variations verticales. . . . .	21
3.2	Exemple de la construction $\Psi$ dans le cas du réseau diagonal. . . . .	22
3.3	Exemple de la bijection $\Psi^*$ du Théorème 3.4. Dans le chemin final, on remarquera que les pas 1, 3, 5, 6, 7 et 8 sont 'éléments de $\overline{\mathfrak{S}^1}$ , et que les pas 9, 11, 12, 13, 14 et 15 sont éléments de $\overline{\mathfrak{S}^{-1}}$ . . . . .	24
3.4	Exemple de la bijection inverse. . . . .	25
4.1	Diagrammes de cordes sur 6 points. . . . .	35

4.2	Configurations FPL et Matrice à signe alternant. . . . .	36
4.3	L'étiquetage des arêtes externes. . . . .	37
4.4	Une configuration FPL sur $Q_7$ avec conditions périodiques à la frontière . . . . .	37
4.5	Représentation d'un couplage sous forme d'un diagramme de cordes	37
4.6	Le couplage obtenu à partir d'un couplage fixé $X$ et de $m$ arches emboîtées. . . . .	38
4.7	Un couplage non croisé. . . . .	39
4.8	Un diagramme de Ferrers et son $d$ -code . . . . .	40
4.9	La région $R(\lambda, d, h)$ . . . . .	41
4.10	La région réduite . . . . .	42
4.11	Le positionnement du couplage autour de $Q_n$ . . . . .	43
4.12	Les cas possibles pour les arêtes forcées du Lemme 4.4. . . . .	44
4.13	Les arêtes forcées pour le couplage $X \cup m$ . . . . .	45
4.14	Division du problème en deux sous-problèmes. . . . .	47
4.15	Configurations comptées par $a_X(\mathcal{E})$ . . . . .	48
4.16	Les nombres $a_X(\mathcal{E})$ . . . . .	49
4.17	Le dessin des triangles. . . . .	50
4.18	La région $R(\lambda(\mathcal{E}), d - 1, m + 3d - 2)$ . . . . .	51
4.19	Un placement différent des arches autour de la grille. . . . .	52
4.20	La région à paver. . . . .	54
4.21	Un pavage par des losanges d'un hexagone avec des encoches, et la famille de chemins sans intersection correspondante. . . . .	55
4.22	Arêtes fixées dans le cas extrême. . . . .	56
4.23	Un diagramme de Ferrers dans un carré, et le chemin de Dyck associé. . . . .	57
4.24	La région triangulaire $\mathcal{R}$ avec un exemple de configuration FPL, et les chemins $\pi(\mathcal{E})$ and $\pi(X)$ . . . . .	57
4.25	La région $\mathcal{R}$ après rotation. . . . .	58
4.26	Les quatre types de sommets. . . . .	59
4.27	Les deux types de tranches. . . . .	60

4.28	Les diverses composantes possibles, leurs versions simplifiées, et les coefficients utilisés dans la preuve du Lemme 4.13. . . . .	61
4.29	Les groupes possibles pour le Lemme 4.12 . . . . .	62
4.30	Les groupes latéraux. . . . .	63
4.31	La configuration entre $\mathcal{V}_i$ et $\Lambda_i$ . . . . .	64
4.32	La configuration entre $\Lambda_{i-1}$ et $\mathcal{V}_i$ dans le Cas 1. . . . .	64
4.33	La configuration entre $\Lambda_{i-1}$ et $\mathcal{V}_i$ dans le Cas 2. . . . .	64
4.34	L'unique configuration $\mathcal{R}$ -FPL dans le cas $X = \mathcal{E}$ . . . . .	65
5.1	Exemple de tableau de permutation. . . . .	69
5.2	Réduction d'un tableau. . . . .	71
5.3	La construction récursive des tableaux de permutation . . . . .	72
5.4	Les étapes de la bijection montrant que les permutations de taille $n$ avec une occurrence de 31-2 sont comptées par $\binom{2n}{n-3}$ . . . . .	83
5.5	Un tableau G-Bell et son P-tableau associé. . . . .	84
5.6	Bijection entre D-Bell et G-Bell . . . . .	85
6.1	Partition et forme gauche. . . . .	88
6.2	Exemples de rubans. . . . .	89
6.3	Premiers niveaux du graphe des rubans . . . . .	89
6.4	Tableau de rubans. . . . .	90
6.5	Deux représentations d'une permutation d'équerres. . . . .	92
6.6	Énumération des suites d'équerres. . . . .	93
6.7	Ajout d'un ruban sur $\delta(\lambda)$ . . . . .	96
6.8	La règle $S$ . . . . .	97
6.9	La bijection principale. . . . .	101
6.10	Une demie configuration. . . . .	104
6.11	Opérations <i>bumpin</i> et <i>bumpout</i> . . . . .	112
6.12	Opérations <i>first</i> , <i>next</i> , <i>prev</i> . . . . .	113
6.13	Opérations <i>switchout</i> et <i>slideout</i> . . . . .	113

# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse a pour thème la combinatoire énumérative, et met plus particulièrement en avant la combinatoire bijective. Les problèmes abordés sont issus aussi bien de la mécanique statistique et de l'informatique théorique, que d'autres branches des mathématiques, telles que les probabilités ou l'algèbre.

Par le terme de combinatoire, on entend généralement l'étude de la structure d'objets discrets, et notamment finis ; la combinatoire énumérative, qui en est une branche, s'intéresse au problème fondamental consistant à compter de tels objets. Le cadre est toujours à peu près celui-ci : on se donne une famille d'ensembles  $(\mathcal{A}_n)_n$ , avec  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ , qui sont décrits d'une manière ou d'une autre. On suppose que chaque ensemble  $\mathcal{A}_n$  contient un nombre fini d'éléments. La question est : un nombre fini, certes, mais combien ?

Les réponses que l'on donnera dans cette thèse seront essentiellement de deux types : soit on donne simplement la valeur  $a_n = |\mathcal{A}_n|$ , soit –et ce sera notre approche préférentielle– on répondra “il y en a autant que dans cet autre ensemble  $\mathcal{B}_n$ ” en exhibant une bijection.

Si l'on s'intéresse uniquement aux valeurs  $a_n$ , alors la technique des fonctions génératrices est souvent la clé : on associe à une suite  $(a_n)_n$  d'entiers la série formelle  $f(x) = \sum_n a_n x^n$  ( ou  $\sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$  selon le problème ). Dans le cas où l'on sait décomposer la classe d'objets comptée par  $a_n$ , il existe des techniques permettant d'obtenir de manière quasi automatique des informations sur  $f(x)$  [4,24], donnant des formules de récurrence sur les  $a_n$ , voire des formules explicites. Dans mon travail de recherche, j'ai, à plusieurs reprises, été amené à manipuler ces séries, et à apprécier l'efficacité de cette approche. Elles n'apparaissent que rarement dans cette thèse, mais m'ont souvent rendu service, notamment pour vérifier la correction de certains résultats.

On peut également calculer ces valeurs  $a_n$  en étudiant finement la structure des objets, dans les cas où l'approche par séries génératrices n'est pas applicable, par exemple lorsque les objets sont trop complexes pour se décomposer aisément. Des techniques algébriques peuvent également être utilisées pour obtenir des résultats énumératifs.

Néanmoins, on peut parfois vouloir autre chose que la simple valeur  $|\mathcal{A}_n|$  ; dans cette optique, des bijections entre la classe initiale  $\mathcal{A}_n$  et une nouvelle classe  $\mathcal{B}_n$  peuvent apporter de telles informations supplémentaires. On va essayer de le montrer en répondant longuement à la question suivante :

## 1.1 Pourquoi chercher des bijections ?

À cela, plusieurs réponses sont possibles ; cela dépend bien sûr du problème en question, et il arrive souvent que ces réponses soient complémentaires entre elles.

En premier lieu, une bijection permet d'apporter aussi une réponse à un pur problème d'énumération. Prenons un exemple élémentaire : étant donné un entier positif  $m$ , demandons-nous quel est le nombre de suites  $u = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  d'entiers strictement positifs, telles que  $a_1 + \dots + a_k = n$  (une telle suite est appelée une composition de  $n$ ). À chacune de ces suites, on peut associer le sous-ensemble de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  défini par

$$\phi(u) = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_{k-1}\}$$

Il est alors facile de constater que cette transformation  $\phi$  est inversible, et donc que les compositions de  $m$  sont en bijection avec les parties de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Or cet ensemble est de cardinal  $2^{n-1}$  : pour choisir un sous-ensemble, on décide, pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , s'il est élément ou pas, ce qui fait bien  $2^{n-1}$  choix. Il y a donc  $2^{n-1}$  compositions de  $n$ .

Une bijection apporte en fait des informations plus fines : si l'on cherche le nombre de telle suites où  $k$  est également fixé, on trouve le nombre  $\binom{m-1}{k}$ . En effet, la bijection  $\phi$  induit évidemment une bijection entre ces suites et les parties de taille  $k$ . Cela illustre le fait qu'avec une bijection, on obtient souvent plus que l'énumération à l'origine du problème : des paramètres supplémentaires se correspondent entre les objets au travers d'une bijection, amenant à de nouvelles énumérations parfois inattendues. Un exemple classique est celui de la correspondance de Schensted exposée dans le chapitre suivant : il s'agit comme on le verra d'une correspondance entre des permutations et des couples de tableaux de Young de même forme, qui possède de nombreuses propriétés [32, 53, 62].

Une bijection est également parfois utile pour la génération aléatoire : comme l'on sait engendrer efficacement des structures comme les sous ensembles, les permutations, et autres, cela se transporte sur des objets en correspondance avec ces derniers ; il faut bien sûr que la bijection soit elle-même efficace d'un point de vue algorithmique.

Enfin, une bijection *explique* son résultat énumératif, en même temps qu'elle le prouve. Reprenons l'exemple des compositions : en remarquant que c'est une suite de nombres dont le poids  $n$  est la somme de ces nombres, les techniques de [24] impliquent que la série génératrice ordinaire est alors

$$(1 - (x/(1-x)))^{-1} = 1 + x/(1-2x) = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} x^n$$

Cela fournit bien la même réponse que plus haut, mais est d'une certaine façon moins satisfaisante intellectuellement ; on a bien obtenu la valeur  $2^{n-1}$ , mais on ne comprend pas vraiment d'où elle provient.

C'est pourquoi on s'intéresse parfois à des preuves combinatoires d'identités. Il est souvent possible de prouver " $a_n = b_n$ " à l'aide de calculs et transformations, algébriques ou analytiques, parfois obscures. Si l'on cherche à comprendre le *pourquoi* du résultat, il est nécessaire d'interpréter combinatoirement chacun des

termes comme les cardinaux d'ensembles  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{B}_n$  respectivement, et d'exhiber une bijection entre les deux.

## 1.2 Chemins et Tableaux

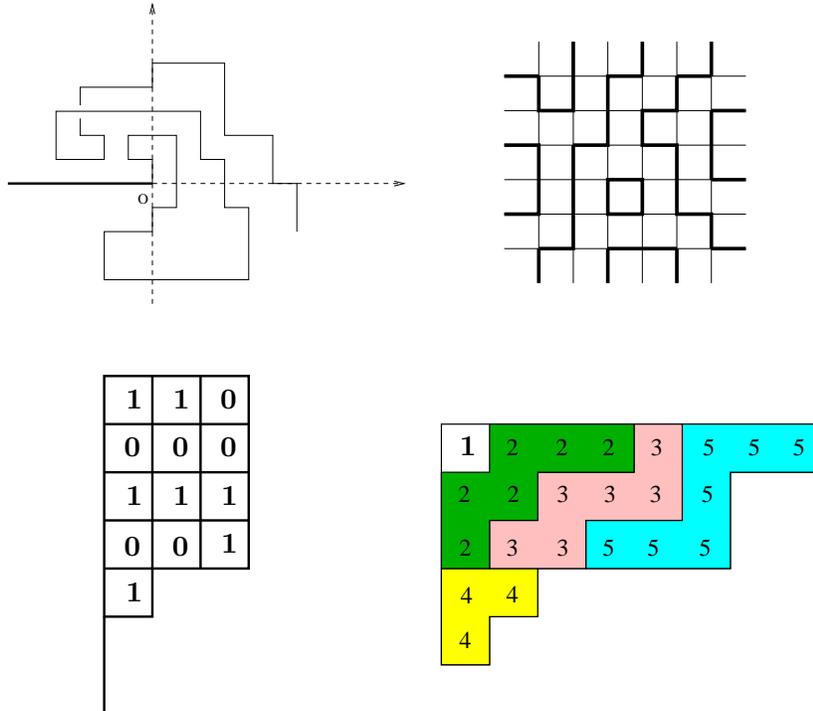


FIG. 1.1: Les 4 classes d'objets combinatoires étudiés : chemins en haut, tableaux en bas.

Les deux termes du titre, chemins et tableaux, évoquent de vastes classes de structures en combinatoire : on va préciser ici quels objets spécifiques sont étudiés dans les quatre chapitres (indépendants) qui constituent le fond de cette thèse. On a illustré sur la Figure 1.1 les objets qui sont au coeur de chacun des chapitres : en haut les chemins, en bas les tableaux. On va donc définir les notions fondamentales sur ces objets ici, et donner à chaque fois la motivation qui a mené à leur étude.

On s'intéressera d'abord à des chemins dans le plan discret  $\mathbb{Z}^2$ . On part de l'origine  $O$ , en se fixant comme directions possibles un ensemble de vecteurs  $\mathfrak{S}$ , et on veut arriver en  $n$  pas au point  $(i, j)$ , sans jamais toucher la demie droite  $\mathcal{H}$  formé des points  $(-k, 0)$ ,  $k \geq 0$ . On appelle **chemins sur le plan incisé** les chemins qui évitent cette demie droite ; voir la Figure 1.1 en haut à gauche pour un exemple.

L'étude de ces chemins a été initiée dans l'article [8], motivée à l'origine par le problème suivant, posé sur la liste de discussion "domino" en 1999 par Richard Kenyon : partant de  $(0, 1)$ , on fait une marche sur le réseau carré<sup>1</sup>  $\mathbb{Z}^2$  en choisissant uniformément une des quatre directions à chaque pas, et l'on s'arrête dès que l'on

<sup>1</sup>ce qui revient à choisir  $\mathfrak{S} = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$

touche  $\mathcal{H}$ . Alors la probabilité de s'être arrêté à l'origine  $O$  est de  $1/2$ ; elle est de  $2 - \sqrt{2}$  si l'on était parti de  $(1, 0)$ . R. Kenyon savait prouver cela de manière excessivement calculatoire, et demandait une preuve plus combinatoire. Cela a mené à l'énumération des chemins dans [8], poursuivie dans [6, 71] par des séries génératrices; une approche bijective – qui est celle qui nous intéresse – est donnée dans l'article de Barucci et al. [2].

Pour des chemins dont les pas sont donnés par l'ensemble  $\mathfrak{S}$ , on notera  $(p(\mathfrak{S}), 0)$  le point de la forme  $(x, 0)$  avec  $x > 0$  minimal, tel qu'il existe un chemin du plan incisé de  $O$  à ce point. Par exemple, pour le réseau carré, on a  $p(\mathfrak{S}) = 1$ ; pour  $\mathfrak{S} = \{(\pm 1, \pm 1)\}$ , c'est-à-dire lorsqu'on se déplace en diagonale, on a  $p(\mathfrak{S}) = 2$ , car on ne peut atteindre  $(1, 0)$  depuis l'origine.

Des chemins seuls, on passera à des configurations de chemins appelées **Fully Packed Loops**, ce que l'on abrègera en FPL. Il s'agit d'un ensemble de chemins tracé sur la grille carrée, passant par tous les points, avec des conditions aux bords spécifiant qu'une arête sur deux exactement doit être occupée; voir Figure 1.1 en haut à droite.

C'est en fait un modèle de mécanique statistique [3], appelé parfois *gaz de boucles compactes* dans la littérature francophone. L'étude combinatoire a démarré avec la conjecture de Razumov et Stroganov [50], ainsi que le survol de J. de Gier [20]. Un certain nombre de conjectures est alors apparu dans un autre survol dû à J.-B. Zuber [74], dont certaines ont été prouvées depuis (cf. [12, 22]). Ces configurations sont en bijection simple avec les matrices à signes alternants [20, 45], dont l'énumération est restée longtemps un problème ouvert avant les fameuses preuves de Zeilberger [72] et Kuperberg [42]; voir l'historique dans le passionnant ouvrage de Bressoud [9].

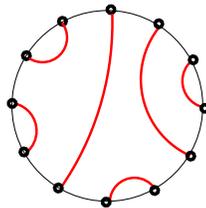


FIG. 1.2: Diagramme de cordes.

À chaque configuration FPL, on associera un diagramme de cordes non croisées de la manière suivante : on représente les arêtes externes d'une configuration  $C$  comme  $2n$  points sur un cercle, et l'on joint deux de ces points si les arêtes sont reliées par un chemin dans  $C$ . Le diagramme de cordes ci-dessus est associé à la configuration de la Figure 1.1. L'énumération des configurations FPL peut se faire alors en fixant un tel diagramme : si  $\pi$  est un diagramme de cordes non croisées, on notera  $A_n(\pi)$  le nombre de configurations FPL qui ont  $\pi$  comme diagramme associé. C'est ce type d'énumération qui nous intéressera.

Un **tableau de permutations** est le remplissage des cases d'un diagramme en escalier (contenant éventuellement des lignes de longueur nulle) par des  $\mathbf{0}$  et des  $\mathbf{1}$ , avec au moins un  $\mathbf{1}$  par colonne, et jamais de  $\mathbf{0}$  avec un  $\mathbf{1}$  dans une ligne au dessus et un  $\mathbf{1}$  dans une colonne à gauche; un exemple est donné en bas à droite de la Figure 1.1.

Ces tableaux ont été introduits dans un papier de A. Postnikov [49], en lien avec des travaux proches de la géométrie algébrique. Ils ont ensuite été mis en relation avec des problèmes de probabilité [18, 19], liés à un modèle de particules sur une ligne, le PASEP. Si on considère les tableaux dont le nombre de lignes ajouté au nombre de colonnes vaut  $n$ , alors ils sont comptés par  $n!$ ; des bijections avec les permutations sont données dans [10, 17, 64]. De plus, via ces bijections, de nombreuses statistiques classiques sur les permutations correspondent à des statistiques simples sur les tableaux : c'est ce lien que nous allons encore resserrer dans le chapitre 5.

Un ruban est la donnée de deux formes en escalier  $\lambda \subseteq \mu$ , telle que les cases de  $\mu - \lambda$  forment un ensemble connexe<sup>2</sup>, et qui ne contient pas de carré 2 par 2 de cases. Un ruban a un signe, qui est  $(-1)^{h-1}$  où  $h$  est le nombre de lignes qu'il occupe. Un **tableau de rubans** est un diagramme en escalier  $\lambda$  formé par ajouts successifs de rubans, en partant de la forme vide; ces rubans sont numérotés de 1 à 5 sur la Figure 1.1 en bas à gauche. Un tableau a comme signe le produit des signes de ses rubans.

Ces tableaux signés apparaissent dans la fameuse règle de Murnaghan Nakayama [46, 48] : ils permettent de donner une interprétation combinatoire de l'intégralité des valeurs des caractères irréductibles du groupe symétrique. D'un autre côté, ils sont aussi une généralisation naturelle des tableaux de Young standards [32, 53, 62]. La fameuse correspondance de Schensted a de fait pu être partiellement étendue à ces tableaux, dans l'article de White [67], qui a motivé notre étude énumérative et bijective.

### 1.3 Plan de la Thèse

Dans le chapitre 2, on commencera par donner des notions de base sur les objets combinatoires classiques que sont les chemins, les partitions et les permutations, avec pour ces dernières un exposé de la correspondance de Schensted ainsi que quelques notions de théorie des représentations.

Le titre de la thèse est reflété dans l'organisation de celle-ci : les chapitres 3 et 4 traiteront de l'énumération de chemins, et dans les chapitres 5 et 6 nous compterons deux variétés de tableaux. La notion de chemins interviendra également dans ces deux derniers chapitres, certains des résultats étant de fait démontrés en utilisant un codage des deux types de tableaux par des chemins particuliers.

Enfin le dernier chapitre listera quelques pistes possibles pour prolonger les travaux de cette thèse.

Décrivons maintenant les travaux réalisés, couvrant les chapitres 3 à 6 :

#### Chemins sur le plan incisé

On s'intéresse aux chemins du plan incisé issus de  $O$ , dont l'ensemble de pas  $\mathfrak{S}$  est tel que tous les vecteurs  $(i, j) \in \mathfrak{S}$  vérifient  $|j| \leq 1$ . Nous montrons alors une bijection pour l'énumération de ces chemins terminant au point  $(p(\mathfrak{S}), 0)$ . Cette bijection permet de prouver certains résultats énumératifs de [6, 8] en *expliquant* la

---

<sup>2</sup>c'est-à-dire qu'on peut passer d'une case à l'autre dans  $\mu - \lambda$  en franchissant les côtés des cases (pas les sommets)

simplicité des formules closes obtenues. On donnera aussi une application probabiliste de ces bijections, et on regardera une variation de ce problème.

Une partie du travail de ce chapitre a été présentée à la conférence FPSAC'2006 à San Diego [47].

### Fully Packed Loops

On s'intéresse ici aux diagrammes de cordes sur  $2n$  points du type suivant : un certain motif fixé  $X$ , indépendant de  $n$ , et une série de cordes (ou *arches*) emboîtées ; voir Figure 1.3. On prouve alors une conjecture de Zuber [74, Conjecture 6] : le nombre  $A_n(\pi)$  est dans ce cas un polynôme en  $n$ , dont on saura donner le degré et le coefficient dominant en fonction du motif.

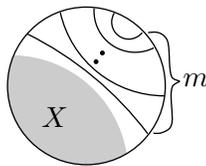


FIG. 1.3: Motif avec arches emboîtées.

L'article [11], écrit en collaboration avec Fabrizio Caselli, Christian Krattenthaler et Bodo Lass, qui constitue l'essentiel de ce chapitre, est paru dans L'Electronic Journal of Combinatorics.

### Tableaux de permutations

Notre travail se situe dans la lignée de ceux de Burstein [10], Corteel [17] ou Steingrímsson et Williams [64]. Nous exposerons une bijection entre les permutations et les tableaux de permutations, préservant de nombreuses statistiques, la plus importante étant que le nombre de  $\mathbf{1}$  du tableau image, moins le nombre de colonnes, est égal au nombre d'occurrences du motif généralisé 31-2 dans la permutation.

On déduira de cela des preuves bijectives des énumérations de permutations avec zéro ou une occurrence du motif généralisé 31-2, en exploitant un codage par des chemins des tableaux de permutations ; on répondra en cela à une question de Claesson et Mansour [15]. Enfin, on décrira deux sous-ensembles des tableaux de permutations en bijection avec les permutations évitant le motif 32-1, elles-mêmes connues pour être en bijection avec les partitions d'ensembles.

Ceci est un travail en partie réalisé avec Sylvie Corteel.

### Tableaux de rubans

À la suite d'un article de White [67], nous étudions l'énumération signée des paires de tableaux de rubans de même forme ; nous généraliserons ce travail, étendant ainsi la correspondance de Schensted aux tableaux de rubans. Pour cela nous utilisons l'approche de Sergey Fomin [25, 26] concernant les graphes gradués en dualité, que nous sommes amenés à généraliser.

Nous prouverons la plupart des résultats à la fois de manière bijective et algébrique, suivant en cela les traces de Fomin. Notons que la plupart des énumérations feront intervenir des signes négatifs, et que nous serons amenés à utiliser le principe d'involution de Garsia et Milne [34].

Ce travail, en collaboration avec Dominique Gouyou-Beauchamps, sera exposé à la conférence FPSAC'2007.



## Chapitre 2

# Préliminaires

On va ici donner les définitions de certains objets que nous retrouverons dans cette thèse, ainsi que quelques résultats fondamentaux les concernant.

### 2.1 Chemins

Soit  $G = (V, E)$  un *graphe orienté*, c'est-à-dire un ensemble  $V$  de sommets et un ensemble de couples  $E \subseteq V \times V$  d'*arêtes*. Pour  $v^1$  et  $v^2$  deux sommets de  $G$ , on appelle *chemin* de  $v^1$  à  $v^2$  une suite  $v^1 = v_0, v_1, \dots, v_n = v^2$  de sommets de  $G$  tels que  $(v_i, v_{i+1})$  est une arête de  $E$  pour tout  $i$ . La *longueur* du chemin est  $n$ , le nombre d'arêtes utilisées. Le sommet  $v^1$  est le point d'origine (ou plus simplement l'origine) du chemin, et  $v^2$  son point d'arrivée.

Une classe de chemins dans laquelle nous travaillerons souvent est celle des *chemins sur  $\mathbb{Z}^2$* . Les points de ce plan constituent les sommets d'un graphe, et on donnera fréquemment les arêtes correspondantes à l'aide d'un ensemble  $\mathfrak{S}$  de vecteurs de  $\mathbb{Z}^2$ , de la manière suivante : un couple  $(M, N)$  de points de  $\mathbb{Z}^2$  constitue une arête lorsque le vecteur  $\overrightarrow{MN}$  appartient à l'ensemble  $\mathfrak{S}$ . Ainsi, un chemin dans  $\mathbb{Z}^2$  est dit *à pas dans  $\mathfrak{S}$* , ou encore un  $\mathfrak{S}$ -chemin, si tous les vecteurs reliant deux points successifs du chemin sont dans l'ensemble  $\mathfrak{S}$ .

De tels chemins dans  $\mathbb{Z}^2$  ont une relation forte avec la notion de *mots* : soit  $A$  un ensemble (en général fini) appelé *alphabet*, dont les éléments sont des *lettres*. L'ensemble  $A^*$  des mots sur l'alphabet  $A$  est l'ensemble des suites de lettres  $a_1 \cdots a_n$ , avec  $a_i \in A$  pour tout  $i$ , où  $n$  est la longueur du mot. Le mot vide, souvent noté  $\varepsilon$ , est le mot de longueur 0. Si  $u = u_1 \cdots u_m$  et  $v = v_1 \cdots v_m$  sont deux mots, on appelle *concaténation* de  $u$  et  $v$  le mot  $w = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n$  de longueur  $n + m$ .

Si un point  $O'$  de  $\mathbb{Z}^2$  est fixé, les  $\mathfrak{S}$ -chemins d'origine  $O'$  sont alors identifiables à des mots sur l'alphabet  $\mathfrak{S}$  : le  $\mathfrak{S}$ -chemin  $(O' = v^0, v_1, \dots, v_n)$  est identifié au mot  $s_1 \cdots s_n$ , où  $s_i = \overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ . On utilisera cette correspondance bijective à de nombreuses reprises, et l'on se permettra de passer d'un concept à l'autre librement lorsque le point  $O'$  sera l'origine  $O$  de  $\mathbb{Z}^2$ .

Donnons deux exemples classiques de chemins dans  $\mathbb{Z}^2$ .

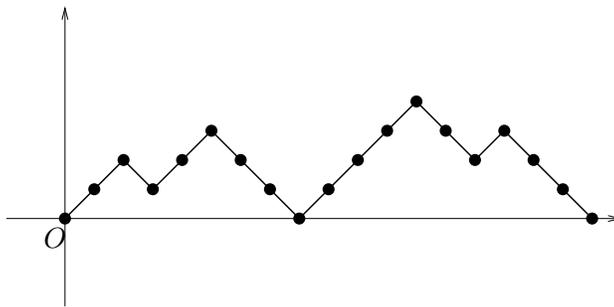


FIG. 2.1: Chemin de Dyck.

### 2.1.1 Chemins de Dyck

On appelle *chemin de Dyck* de longueur  $2n$  (ou de demie longueur  $n$ ) un chemin sur la grille  $\mathbb{Z}^2$  allant de  $O$  à  $(2n, 0)$ , dont les pas sont dans  $\{(1, 1), (1, -1)\}$ , et tels que tous ses sommets soient dans le demi plan supérieur ( $y \geq 0$ ). Un exemple de chemin de Dyck de demie longueur 9 est donné sur la Figure 2.1.

Pour énumérer ces chemins, une possibilité est d'utiliser le principe de réflexion de Désiré André :

**Théorème 2.1** (Principe de réflexion d'André [16]). *Soit  $m$  un entier positif, et  $k < i < 0$  deux entiers négatifs. On considère des chemins dont les pas sont de type  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ .*

*Alors le nombre de chemins de  $O$  à  $(m, i)$  qui ne touchent pas la ligne horizontale d'équation  $(y = k)$  est égal au nombre de chemins de  $O$  à  $(m, i)$  moins le nombre de chemins de  $O$  à  $(m, 2k - i)$ .*

*Preuve:* Il suffit de montrer que les chemins de  $0$  à  $(m, 2k - i)$  sont en bijection avec les chemins de  $0$  à  $(m, i)$  qui touchent la droite d'équation  $(y = k)$ . Si le chemin va de  $0$  à  $(m, 2k - i)$ , il touche nécessairement cette droite  $(y = k)$ ; si l'on considère le premier point d'intersection et que l'on réfléchit la partie du chemin à sa droite, on obtient un chemin  $0$  à  $(m, i)$  qui touche la droite d'équation  $(y = k)$ ; c'est la bijection voulue.  $\square$

On peut alors déterminer le nombre de Catalan  $C_n$ , qui est par définition le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$ . On remarque que  $C_n$  est égal au nombre de chemins de  $O$  à  $(2n, 0)$  qui ne touchent pas la droite d'équation  $(y = -1)$ . On applique alors le principe de réflexion d'André avec  $m = 2n$ ,  $i = 0$  et  $k = -1$  : il y a  $\binom{2n}{n}$  chemins (non contraints) de  $O$  à  $(2n, 0)$ , et  $\binom{2n}{n+1}$  chemins (non contraints) de  $O$  à  $(2n, -2)$ . Par soustraction, il vient :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

**Remarque:** Une autre preuve très classique de ce résultat repose sur le *lemme cyclique* (voir [16] par exemple).

### 2.1.2 Chemins de Motzkin

On appelle *chemin de Motzkin* un chemin sur la grille  $\mathbb{Z}^2$ , de  $O$  à  $(n, 0)$ , dont les pas sont dans  $\{(1, 0), (1, 1), (1, -1)\}$ , et tels que tous ses sommets soient dans le

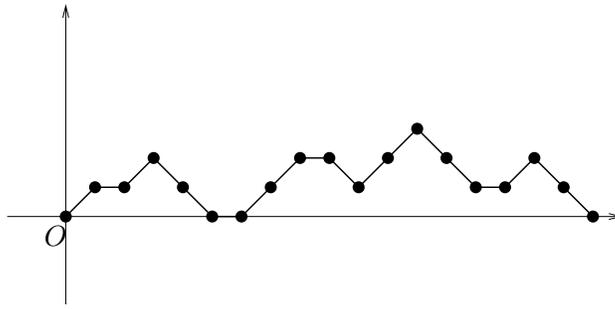


FIG. 2.2: Chemin de Motzkin.

demi plan supérieur ( $y \geq 0$ ). Un chemin de Motzkin est donné sur la Figure 2.2. On remarquera qu'un chemin de Dyck est un chemin de Motzkin sans pas horizontaux.

On notera  $U = (1, 1)$ ,  $D = (1, -1)$  et  $L = (1, 0)$ . On appelle *chemin de Motzkin bicolore* la donnée d'un chemin de Motzkin avec 2 couleurs possibles pour les pas de type  $H$ , qu'on notera pour les différencier  $H_1$  et  $H_2$ . Sur la Figure 2.3, les pas de type  $H_2$  sont en traits plus épais.

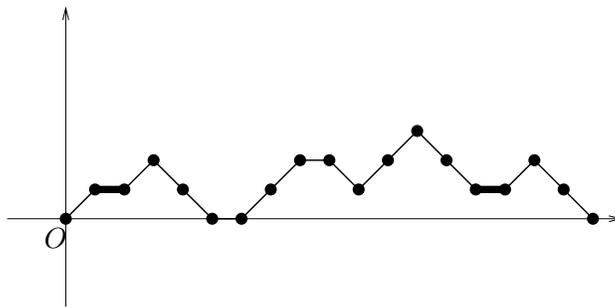


FIG. 2.3: Chemin de Motzkin bicolore.

**Proposition 2.2.** *Il existe une bijection bien connue entre les chemins de Motzkin bicolores de longueur  $n - 1$  et les chemins de Dyck de longueur  $2n$ .*

*Preuve:* Soit  $w$  un chemin de Motzkin bicolore de longueur  $n - 1$ ; on transforme chaque pas en 2 pas consécutifs de la façon suivante :  $U$  (respectivement  $D, H_1, H_2$ ) est transformé en  $UU$  (respectivement en  $DD, DU, UD$ ). On obtient ainsi un chemin de longueur  $2n - 2$ , auquel on ajoute un pas  $U$  initial et un pas  $D$  final pour obtenir un chemin de longueur  $2n$ . On obtient alors un chemin de Dyck, et la construction inverse est immédiate.  $\square$

## 2.2 Partitions et tableaux de Young

### 2.2.1 Partitions

La suite finie d'entiers  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$  est une *partition* de l'entier positif  $n$  si les  $\lambda_i$  sont des entiers strictement positifs, dont la somme vaut  $n$ ; on écrira  $\lambda \vdash n$ , et on dit que  $n$  est la *taille* de  $\lambda$ . Les entiers  $\lambda_i$  sont les *parts* de la partition,

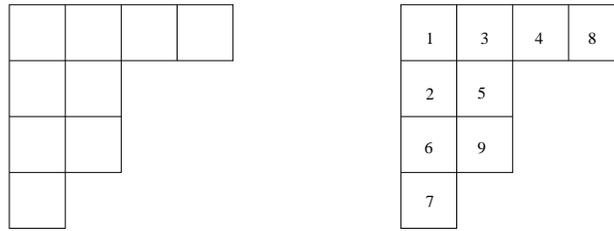


FIG. 2.4: Partition et tableau standard.

et le nombre de fois qu'un entier apparaît dans  $\lambda$  est sa *multiplicité*. Par convention, on posera  $\lambda_i = 0$  pour  $i > k$ . Il y a par exemple 5 partitions de l'entier 4, à savoir  $(4)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 1, 1)$  et  $(1, 1, 1, 1)$ .

On utilisera aussi la notation des partitions par exposants  $\lambda = [1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots]$ , où  $m_i$  désigne le nombre de  $j$  tels que  $\lambda_j = i$ , c'est-à-dire la multiplicité de la part  $i$ ; on omettra les puissances unièmes ainsi que les  $i^0$ . Les partitions de 4 sont dans le même ordre que plus haut  $[4^1]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[2^2]$ ,  $[1^2, 2]$  et  $[1^4]$ .

Une partition peut être représentée par son *diagramme de Ferrers*, qui est un ensemble de cases dans le plan, composé de  $k$  lignes justifiées à gauche, telles que la  $i$ -ème ligne contient  $\lambda_i$  cases unités  $1 \times 1$ . On utilisera ici la convention d'écriture anglo saxonne, qui correspond à écrire les diagrammes avec les lignes décroissant du haut vers le bas. On désignera par  $(i, j)$  la  $j$ -ème case de la ligne  $i$  en partant de la gauche; ces coordonnées ne sont donc définies que si  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq \lambda_i$ .

On ne fera généralement pas de différences entre  $\lambda$  et son diagramme de Ferrers, de sorte que l'on parlera de lignes, colonnes ou cases d'une partition  $\lambda$ .

La transposée  $\lambda'$  de la partition  $\lambda$  est la partition dont la  $i$ -ème ligne du diagramme de Ferrers comporte autant de cases que la  $i$ -ème colonne de celui de  $\lambda$ . On obtient donc ce diagramme en faisant la symétrie par rapport à la diagonale principale qui passe par les cases  $(i, i)$ .

On appelle *composition* de l'entier  $n$  une suite  $c = (c_1, \dots, c_k)$  d'entiers strictement positifs dont la somme vaut  $n$ ; on définit de même que pour les partitions les notions de taille, part et multiplicité. On obtient une partition  $\tilde{\lambda}$  à partir d'une composition  $c$  en réarrangeant les entiers de la suite en ordre décroissant; la partition obtenue possède donc les mêmes parts que  $c$  avec les mêmes multiplicités.

## 2.2.2 Tableaux de Young

On appelle *tableau de Young standard* de forme  $\lambda$  la donnée d'une partition  $\lambda$  dont les cases du diagramme sont numérotées de 1 à  $|\lambda|$ , de sorte que les numéros sont strictement croissants de gauche à droite dans chaque ligne, et de haut en bas dans chaque colonne. De manière équivalente, un tableau de Young standard de forme  $\lambda$  est une chaîne de partitions  $\lambda^0 = \emptyset \subset \lambda^1 \subset \dots \subset \lambda^{k-1} \subset \lambda^k = \lambda$  avec  $n = |\lambda|$ , où une partition  $\lambda_i$  est obtenue à partir de la précédente  $\lambda_{i-1}$  en ajoutant exactement une case. Un tableau de Young de forme  $\lambda = (4, 2, 2, 1)$  est donné sur la droite de la Figure 2.4, et sa représentation en tant que chaîne de partitions se trouve sur la Figure 2.2.2.

Soit  $f_\lambda$  le nombre de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$ . On appelle *équerre* d'une case  $u = (i, j) \in \lambda$  l'ensemble des cases situées à droite ou au

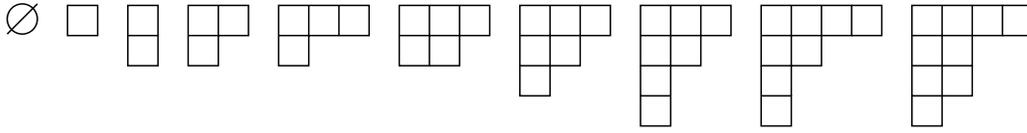


FIG. 2.5: Chaîne de partitions.

dessous de  $\lambda$  (la case  $u$  y compris), et on note  $h(u)$  le nombre de cases de l'équerre associé à la case  $u = (i, j)$ . On a  $h(u) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ .

Alors on a la formule suivante, dite *formule des équerres* (*hook-length formula* en anglais) :

$$f_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}} \quad (2.2.1)$$

Cette formule a été démontrée par Frame, Robinson et Thrall [30].

On appelle *tableau semi-standard* de forme  $\lambda$  la donnée d'une partition  $\lambda$  et d'un étiquetage de ses cases par des entiers strictement positifs, de sorte que les numéros sont croissants au sens large de gauche à droite dans chaque ligne, et strictement croissants de haut en bas dans chaque colonne.

Le *contenu* de la case  $u = (i, j)$  est défini par  $c(u) := j - i$ . Alors le nombre de tableaux semi-standards de formes  $\lambda$  et dont toutes les entrées sont inférieures à  $N$  est donné par la formule :

$$SSYT(\lambda, N) = \prod_{u \in \lambda} \frac{c(u) + N}{h(u)} \quad (2.2.2)$$

Cette formule est appelée *hook content formula* en anglais, ce que l'on peut traduire par "formule des équerres et contenus" ; elle fut démontrée par Richard Stanley [59].

### 2.2.3 Un codage des partitions

On suit dans cette partie les notations de Van Leeuwen [65].

On associe à une partition  $\lambda$  un mot doublement infini  $\delta(\lambda) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Ce mot est déterminé par le diagramme de Ferrers de  $\lambda$  de la manière suivante : on prolonge les côtés supérieur et gauche du diagramme par des lignes infinies, et on lit ensuite la frontière inférieure droite en partant du bas, en notant 1 pour les segments verticaux rencontrés, et 0 pour les segments horizontaux.

Ainsi la permutation  $(4, 2, 2, 1)$  a pour suite associée

$$\delta(\lambda) = (\cdots 1110101|1001000 \cdots),$$

voir la Figure 2.6 ; le signe "|" repère l'endroit où la frontière intersecte la diagonale du diagramme, et on considère que les indices de  $\mathbb{Z}$  positifs ou nuls pour la suite  $\delta(\lambda)$  sont ceux à droite de la séparation |. La suite  $\delta(\lambda)$  peut être définie rigoureusement comme suit :

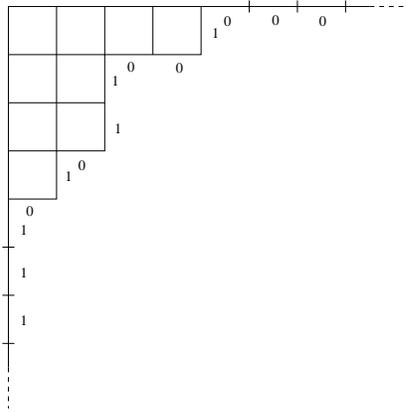


FIG. 2.6: Partition encodée par une suite doublement infinie.

$$\delta(\lambda)(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \in \{\lambda_i - i - 1, i \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{si } d \in \{j - \lambda'_j, j \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

On remarquera que les suites  $\delta(\lambda)$  ont les propriétés suivantes :

1. elles ne diffèrent qu'en un nombre fini de positions de la suite  $(\dots 1111|0000\dots)$  (correspondant à la partition vide) ;
2. le nombre de 0 à gauche du symbole  $|$  est égal au nombre de 1s à la droite de ce même symbole

Ces propriétés *caractérisent* en fait les suites  $\delta(\lambda)$  parmi les suites de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  : une suite vérifiant 1. et 2. correspond à une et une seule partition.

On a de plus la propriété suivante :

**Proposition 2.3.** *Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ , avec  $k$  parts. Les couples d'indices  $i < j$  tels que  $\delta_i(\lambda) = 0$  et  $\delta_j(\lambda) = 1$  sont en bijection avec les cases  $u \in \lambda$ .*

*Preuve:* on fait naturellement correspondre les 0 aux colonnes et les 1 aux lignes, et la bijection correspond simplement à regarder l'intersection.  $\square$

On verra d'autres propriétés de cet encodage dans le chapitre 6 en relation avec la notion de *ruban*.

## 2.3 Permutations

Dans cette section, on va rappeler la définition du groupe symétrique et certaines notions élémentaires associées ; on donnera ensuite les éléments essentiels de la correspondance de (Robinson-)Schsted, ainsi que des représentations complexes du groupe symétrique.

### 2.3.1 Le groupe symétrique

On appelle groupe symétrique d'ordre  $n$  le groupe  $\mathfrak{S}_n$  des bijections  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même ; c'est un groupe de cardinal  $n!$ , dont les éléments sont appelés permutations. On appelle *cycle* d'une permutation une suite  $(x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x))$  où  $\sigma^k(x) = x$  et  $\sigma^i(x) \neq (x)$  pour  $1 \leq i \leq k - 1$ .

L'ensemble  $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$  est appelé *support* du cycle. On sait alors que toute permutation peut être écrite comme le produit dans  $\mathfrak{S}_n$  de cycles disjoints, de manière unique à l'ordre des facteurs près. Soit  $\sigma$  une permutation, et notons  $\lambda(\sigma)$  la partition formée des tailles des cycles de  $\sigma$  en ordre décroissant. Alors la partition  $\lambda(\sigma)$  caractérise la classe de conjugaison de  $\sigma$  : si  $\tau$  est une autre permutation de  $\mathfrak{S}_n$ , alors il existe  $\rho \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $\tau = \rho^{-1}\sigma\rho$  (on dit que  $\sigma$  et  $\tau$  sont *conjuguées*) si et seulement si  $\lambda(\sigma) = \lambda(\tau)$ . La partition  $\lambda(\sigma)$  est appelée le *type de cycles* de  $\sigma$ .

On peut aussi encoder les permutations par des mots  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$ , où  $\sigma_i = \sigma(i)$  ; il s'agit donc des mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que chaque lettre apparaît une et une seule fois. On utilisera cette représentation notamment dans le chapitre 5.

Enfin, une *involution* de  $\mathfrak{S}_n$  est une permutation  $\sigma$  telle que  $\sigma^2$  est l'identité ; une involution sans point fixe agit forcément sur un ensemble pair  $\llbracket 1, 2k \rrbracket$ , et le nombre d'involutions sans points fixes de  $\llbracket 1, 2k \rrbracket$  est égal à  $(2k)!! := (2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1$ . En considérant le nombre de points fixes, il vient aisément que le nombre d'involutions sur  $\mathfrak{S}_n$  est donné par

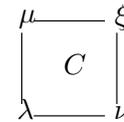
$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k)!! \binom{n}{2k}$$

### 2.3.2 La correspondance de Schensted

La célèbre correspondance de Schensted [54] –qu'on peut faire remonter à Robinson [51] et est ainsi parfois appelée “Robinson Schensted”– se définit habituellement par un algorithme d'insertion ; on va ici donner une version plus moderne de l'algorithme, due à Sergey Fomin [25, 27], par ce que ce dernier appelle des *diagrammes de croissance* (growth diagrams).

Fixons nous trois partitions  $\lambda, \mu, \nu$  telles que  $\lambda \subset \mu$  et  $\lambda \subset \nu$ , où  $\mu$  (respectivement  $\nu$ ) est égale à  $\lambda$  ou possède une case de plus .

On dessine un carré dont trois coins sont étiquetés par  $\lambda, \mu, \nu$  comme illustré ci-contre. Dans le cas  $\lambda = \mu = \nu$ , le carré  $C$  peut être marquée d'une croix, ou non marquée ; dans les autres cas, elle n'est pas marquée.



Avec ces données, les règles suivantes permettent de déterminer la partition  $\xi$  permettant de compléter l'étiquetage des coins du carré :

- Si  $\lambda = \mu = \nu$  et que  $C$  est vide, alors  $\xi := \lambda$ .
- Si  $\lambda = \mu = \nu$  et que  $C$  contient une croix, alors le diagramme de  $\xi$  est obtenu à partir de celui de  $\lambda$  en ajoutant une case sur la première ligne.
- If  $\lambda \neq \mu = \nu$ , alors le diagramme de  $\xi$  est obtenu à partir de celui de  $\mu$  en ajoutant une case sur la  $i+1$ -ème ligne, où  $i$  est la ligne pour laquelle  $\lambda_i \neq \mu_i$ .
- Si  $\lambda = \mu \neq \nu$  (resp.  $\lambda = \nu \neq \mu$ ), alors  $\xi = \nu$  (resp.  $\xi = \mu$ ).
- Si  $\lambda \neq \mu \neq \nu$ , alors le diagramme de  $\xi$  est l'union de ceux de  $\mu$  et  $\nu$ .

Ces règles sont inversibles, au sens où si l'on se donne un carré avec  $\xi, \mu, \nu$ , alors il existe un seul couple  $(\lambda, C)$  pour lequel  $\xi$  est le résultat de l'application des règles directes à  $\lambda, C, \mu, \nu$  ; ce couple est déterminé par les règles suivantes :

- Si  $\xi = \mu = \nu$ , alors  $\lambda := \xi$ .
- Si  $\xi \neq \mu = \nu$  et que  $\xi$  a une case de plus que  $\mu$  sur la première ligne, alors  $\lambda := \mu$  et  $C$  contient une croix.
- Si  $\xi \neq \mu = \nu$  et que  $\xi$  a une case de plus que  $\mu$  sur la  $i + 1$ -ème ligne,  $i \geq 1$ , alors le diagramme de  $\lambda$  est obtenu à partir de celui de  $\mu$  en enlevant une case à la  $i$ -ème ligne de  $\mu$ .
- Si  $\xi = \mu \neq \nu$  (resp.  $\xi = \nu \neq \mu$ ), alors  $\lambda := \nu$  (resp.  $\lambda = \mu$ ).
- Si  $\xi \neq \mu \neq \nu$ , alors le diagramme de  $\lambda$  est l'intersection (ensembliste) de ceux de  $\mu$  et  $\nu$ .

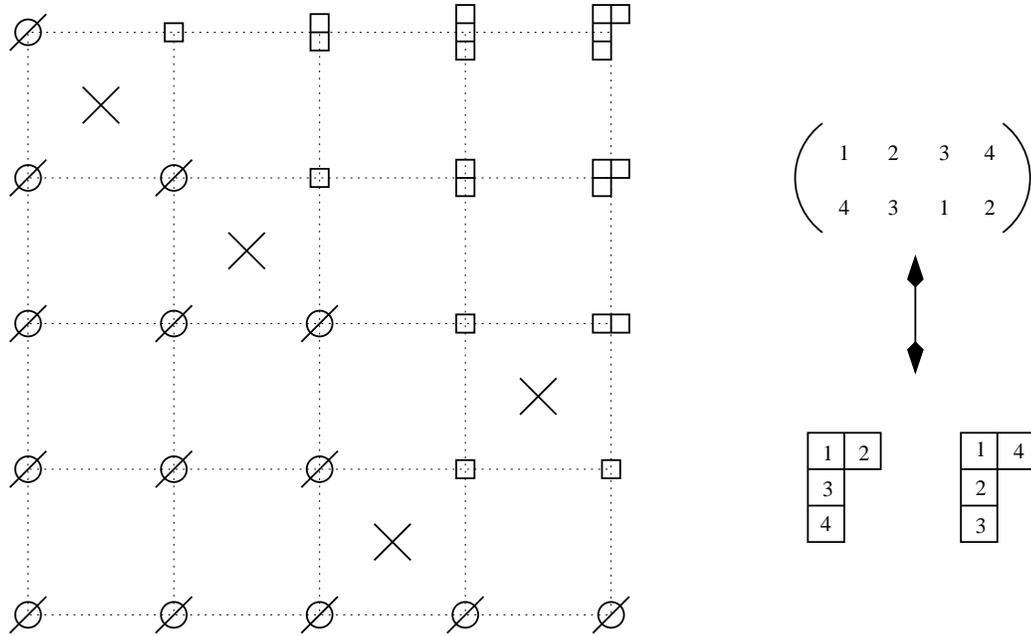


FIG. 2.7: La correspondance de Schensted.

Fixons maintenant une grille  $n \times n$  de  $n^2$  carrés, avec  $(n + 1)^2$  sommets. On étiquette les sommets des côtés inférieur et gauche par la partition vide  $\emptyset$ . Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . On représente cette permutation par des croix dans la grille, en inscrivant une croix à la position  $(i, j)$  si  $j = \sigma(i)$ . Dans chacun des  $n^2$  carrés de la grille, on applique alors les règles issues du premier groupe ci-dessus, c'est-à-dire les règles permettant de déterminer  $\xi$  à partir de la donnée de  $\lambda, \mu, \nu$  et  $C$ . On ne peut bien sûr appliquer ces règles à un carré donné que si les carrés de gauche et du bas ont été traités; tout ordre compatible avec cette contrainte convient et donne le même étiquetage; voir la Figure 2.7

Après avoir étiqueté tous les sommets, on a une suite croissante de partitions qui étiquette le bord droit de la grille, de  $\emptyset$  à une partition  $\lambda$  dans le coin supérieur droit de la grille; et une autre suite de  $\emptyset$  à  $\lambda$  étiquette le bord supérieur de la grille. Ces deux suites sont telles que chaque partition a exactement une case de plus que la précédente dans la suite; comme on l'a vu, de telles suites sont équivalentes à deux tableaux standards de forme  $\lambda$ . On note  $P$  le tableau correspondant au bord droit, et  $Q$  celui du bord supérieur. On appelle correspondance de Schensted la fonction qui à une permutation  $\sigma$  associe le couple  $(P, Q)$  de tableaux standards

de même forme ainsi déterminé.

**Théorème 2.4.** *La correspondance de Schensted  $\sigma \leftrightarrow (P, Q)$  est une bijection entre le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  et les couples de tableaux de Young standards de même forme  $\lambda \vdash n$ .*

La correspondance inverse consiste à étiqueter les bords supérieur et droit de la grille par les tableaux  $Q$  et  $P$  (considérés comme des chaînes de partitions), puis d'utiliser les règles locales inverses pour étiqueter le reste des sommets. Les croix dessinées dans le processus forment alors une permutation : si  $(i, j)$  contient une croix, alors on définit  $\sigma(i) = j$ .

On remarque que lorsque les croix dans la grille sont *symétriques* par rapport à la diagonale  $i = j$ , alors tout l'étiquetage est symétrique : cela découle du fait que les règles locales sont elles-mêmes symétriques en  $\mu$  et  $\nu$ . On en déduit aisément le résultat suivant :

**Corollaire 2.5.** *La correspondance de Schensted induit une bijection entre les involutions de  $\mathfrak{S}_n$  et les tableaux standards de taille  $n$ .*

En fait, on déduit plus généralement de la symétrie en  $\mu$  et  $\nu$  des règles locales que si la correspondance de Schensted envoie la permutation  $\sigma$  sur le couple  $(P, Q)$ , alors elle envoie également  $\sigma^{-1}$  sur  $(Q, P)$  ; ceci constitue un résultat fameux de Schützenberger [55], qui était beaucoup plus délicat à l'époque, l'algorithme par insertion n'exhibant aucune symétrie évidente.

**Remarque:** Il existe une extension de la correspondance de Schensted due à Knuth [38] qui est une bijection entre matrices d'entiers positifs et couples de tableaux semi standards ; on la nomme souvent correspondance RSK, pour Robinson, Schensted et Knuth. Nous ne la donnons pas ici car nous n'en aurons pas besoin, mais signalons qu'il est aussi possible de formaliser cette extension avec des diagrammes de croissance : voir par exemple [28, 41].

### 2.3.3 Représentations du groupe symétrique

On va ici faire un rappel –très bref et incomplet– de la théorie des représentations linéaires complexes des groupes finis. Les concepts présentés ici ne sont utilisés que dans la Section 6.8.

Une *représentation complexe* du groupe  $G$  est un morphisme de groupes  $\varrho$  de  $G$  dans un groupe linéaire  $GL(V)$ , où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel complexe de dimension finie  $r$ , qui est la *dimension* de la représentation.

On dit que deux représentations  $\varrho_1 : G \rightarrow GL(V)$  et  $\varrho_2 : G \rightarrow GL(W)$  sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme linéaire  $f : V \rightarrow W$  tel que, pour tout  $g \in G$ , on a  $f \circ \varrho_1(g) = \varrho_2(g) \circ f$ . Une représentation  $\varrho : G \rightarrow GL(V)$  est dite *réductible* s'il existe un espace vectoriel propre  $W$ ,  $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$ , tel que pour tout  $g$  de  $G$  on ait  $\varrho(g)W \subseteq W$ . S'il n'existe pas de tels sous-espaces  $W$ , la représentation est dite *irréductible*.

On appelle caractère de la représentation  $\varrho$  la fonction  $\chi_\varrho$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $\chi_\varrho(g) = \text{trace}(\varrho(g))$ . Il est clair grâce aux propriétés de la trace que :

- les caractères de deux représentations équivalentes sont identiques ;
- si  $g = hg'h^{-1}$  dans le groupe  $G$ , alors pour tout caractère  $\chi$  on a  $\chi(g) = \chi(g')$ .

On appelle *caractère irréductible* le caractère d'une représentation irréductible.

La théorie des représentations complexes des groupes finis nous dit alors qu'à *équivalence près, les représentations irréductibles de  $G$  sont en nombre fini; ce nombre est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe  $G$ .*

Pour le groupe symétrique, on a de plus :

**Théorème 2.6.** *Les représentations irréductibles du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  peuvent être indicées par les partitions de  $n$ , de sorte que la représentation  $\rho_\lambda$  soit de dimension  $f_\lambda$ , le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ . De plus, les caractères associés  $\chi_\lambda$  sont à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .*

La table de la Figure 2.8 constitue la *table de caractères du groupe  $\mathfrak{S}_6$* ; c'est un tableau dont les lignes sont indicées par les caractères irréductibles du groupe, et les colonnes par les classes de conjugaison du groupe. L'entrée de la ligne  $\lambda$  et de la colonne  $\mu$  est par définition la valeur du caractère  $\chi_\lambda$  sur une permutation dont le type de cycles est  $\mu$ . Ainsi la table de caractères contient toutes les valeurs des caractères irréductible, et de là en un sens toute l'information sur les représentations du groupe.

	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$
$\chi_0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1$	5	3	1	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1
$\chi_2$	9	3	1	3	0	0	0	-1	1	-1	0
$\chi_3$	10	2	-2	-2	1	-1	1	0	0	0	1
$\chi_4$	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	0	0
$\chi_5$	16	0	0	0	-2	0	-2	0	0	1	0
$\chi_6$	10	-2	-2	2	1	1	1	0	0	0	-1
$\chi_7$	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	0	0
$\chi_8$	9	-3	1	-3	0	0	0	1	1	-1	0
$\chi_9$	5	-3	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	1
$\chi_{10}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\sum \chi_i$	76	0	4	0	4	0	4	0	0	1	0

FIG. 2.8: Table des caractères de  $\mathfrak{S}_6$ .

## Chapitre 3

# Chemins sur le plan incisé

Le plan incisé désigne le plan entier  $\mathbb{Z}^2$  dont tous les points de la forme  $(-k, 0)$ ,  $k \geq 0$  ont été ôtés ; il s'agit donc du plan privé d'une demi droite. On va considérer des chemins dans cette région, en fixant un ensemble de vecteurs  $\mathfrak{S}$  encodant les pas que l'on se permet . Par exemple, si l'on prend  $\mathfrak{S}_0 = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ , cela signifie que les chemins sont autorisés à évoluer d'une unité vers la gauche, la droite, le haut ou le bas, c'est-à-dire les déplacements habituels sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ .

Ces chemins ont été pour la première fois introduits dans les articles de Mireille Bousquet-Mélou et Gilles Schaeffer [6, 8]. Les auteurs ont étudié l'énumération de ces chemins à l'aide de fonctions génératrices. Un des objectifs était d'obtenir une classification de ces chemins via la nature de leurs séries génératrices ; de fait, on peut en quelque sorte mesurer la "complexité" d'une classe d'objets combinatoires en fonction de l'appartenance de leurs fonctions génératrices à telle ou telle classe. Un des résultats de ces articles est que lorsque les éléments  $(i, j)$  de l'ensemble  $\mathfrak{S}$  vérifient tous  $|j| \leq 1$  – $\mathfrak{S}$  est alors dit à *petites variations verticales*–, les séries génératrices qui énumèrent les chemins du plan incisé suivant leur longueur sont alors algébriques, que ce soit en fixant le point d'arrivée des chemins ou non.

Dans les calculs explicites que les auteurs ont pu mener dans ces articles, de nombreuses formules closes simples émergent, lorsque certains points d'arrivée particuliers sont fixés ; ainsi, le nombre de  $\mathfrak{S}_0$ -chemins de  $O$  à  $(1, 0)$  sur le plan incisé, de longueur  $2n + 1$ , est donné par le nombre de Catalan

$$C_{2n+1} = \frac{1}{2n+2} \binom{4n+2}{2n+1}.$$

Ce résultat a été prouvé ultérieurement dans l'article [2] : il s'agit d'une bijection simple de ces chemins du plan incisé avec les chemins de Motzkin bicolores de longueur  $2n + 1$ .

Le travail de ce chapitre consiste en une vaste extension de ce résultat : on définit  $p(\mathfrak{S})$  comme l'entier  $x > 0$  minimal tel que  $(x, 0)$  puisse être atteint par un  $\mathfrak{S}$ -chemin. Alors, si  $\mathfrak{S}$  est à petites variations verticales, on exhibera une bijection (Théorème 3.4) entre les  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan incisé de  $O$  à  $(p(\mathfrak{S}), 0)$  et d'autres chemins du plan  $\mathbb{Z}^2$  ; cette bijection *explique* la simplicité des formules obtenues, comme on le montrera. Une bijection plus simple est donnée par le Théorème 3.2 dans le cas où l'ensemble  $\mathfrak{S}$  est stable par la symétrie  $(i, j) \mapsto (i, -j)$ .

Après avoir défini définitions et notations dans la Section 3.1, on donnera la définition précise des bijections dans la Section 3.2, amenant aux résultats principaux que sont les Théorèmes 3.2 et 3.4. Les preuves des théorèmes sont ensuite données respectivement dans les sections 3.3 et 3.4. On étudiera quelques applications concrètes d'énumération dans la Section 3.5, et on terminera en exposant une variante du problème dans la Section 3.6.

## 3.1 Définitions

Pour le reste de cette section, ainsi d'ailleurs que dans tout le chapitre,  $\mathfrak{S}$  désignera un ensemble fini d'éléments de  $\mathbb{Z}^2$ , l'ensemble des *pas* ; on considèrera ces pas aussi bien comme des vecteurs à coordonnées entières que comme des lettres formant l'alphabet  $\mathfrak{S}$ , comme expliqué dans le chapitre 2.

### 3.1.1 Chemins et Mots

On considère ici des chemins sur  $\mathbb{Z}^2$ , dont les pas sont donnés par  $\mathfrak{S}$ . À moins qu'un autre point ne soit explicitement précisé, un chemin aura pour origine  $w_0 = O = (0, 0)$  ; un mot de  $\mathfrak{S}^*$  sera de plus identifié au chemin correspondant *issu de l'origine*  $O$  : avec cette convention, on remarquera que l'on a notamment, pour 2 mots  $w_1$  et  $w_2$ ,  $end(w_1w_2) = end(w_1) + end(w_2)$ , où  $end(w)$  dénote le *point d'arrivée* du chemin  $w$ . Pour tout point  $P$  de  $\mathbb{Z}^2$ , on notera ses coordonnées par  $x(P)$  et  $y(P)$ , qui désignent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point  $P$ . Par extension, on notera  $x(w)$  et  $y(w)$  les coordonnées du point d'arrivée d'un chemin  $w$ .

Un chemin avec un *pas marqué* est la donnée  $(w, i)$  d'un chemin  $w$  et d'un entier  $i$  compris entre 1 et la longueur de  $w$ . Ainsi une occurrence de pas  $w_i - w_{i-1}$  est distinguée dans le chemin  $w$ . Dans le reste du chapitre, les pas marqués seront figurés par un trait plus épais dans les figures.

### 3.1.2 Chemins sur le plan incisé

On utilise ici la terminologie introduite dans les articles [6, 8]. On dira que le chemin  $w$  évite la demi-droite  $\mathcal{H} = \{(k, 0), k \leq 0\}$  si aucun des sommets successifs  $w_1, \dots, w_n$  n'appartient à  $\mathcal{H}$ . Un tel chemin  $w$  est précisément un *chemin sur le plan incisé*. Pour  $(i, j) \neq (0, 0)$  un point du plan  $\mathbb{Z}^2$  différent de l'origine, on notera  $\mathcal{S}_{i,j}(n)$  l'ensemble des chemins du plan incisé de  $O$  à  $(i, j)$  dont la longueur vaut  $n$ . Le nombre de ces chemins est  $S_{i,j}(n)$ .

Fixons maintenant un ensemble  $\mathfrak{S}$ . On définit alors  $p(\mathfrak{S})$  comme étant l'entier  $x$  strictement positif *minimal* tel qu'il existe un chemin du plan incisé (issu de  $O$ ) terminant en  $(x, 0)$  et dont les pas sont dans  $\mathfrak{S}$ . On notera parfois  $p$  au lieu de  $p(\mathfrak{S})$  quand l'ensemble  $\mathfrak{S}$  sera clair d'après le contexte.

Dans ce chapitre on se concentrera essentiellement à l'étude de  $\mathcal{S}_{p(\mathfrak{S}),0}(n)$ .

Si  $s = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , on note  $\tilde{s} = (x, -y)$  son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On étend naturellement cette notion aux chemins : si  $w = s_1s_2 \cdots s_n \in \mathfrak{S}^*$ , alors on définit  $\tilde{w} = \tilde{s}_1\tilde{s}_2 \cdots \tilde{s}_n$ . D'un point de vue géométrique,  $\tilde{w}$  est le symétrique de  $w$  par rapport à l'axe des abscisses.

Il reste à définir 2 notions importantes relatives aux ensembles  $\mathfrak{S}$ . Ces deux notions sont illustrées sur la figure 3.1 :

**Définition 3.1.** Soit  $\mathfrak{S}$  un ensemble de pas.

- $\mathfrak{S}$  est symétrique (sous-entendu : par rapport à l'axe des abscisses) si pour tout  $s \in \mathfrak{S}$ , on a également  $\tilde{s} \in \mathfrak{S}$ .
- L'ensemble  $\mathfrak{S}$  a de petites variations verticales si pour tout  $(i, j) \in \mathfrak{S}$ , on a  $|j| \leq 1$ .

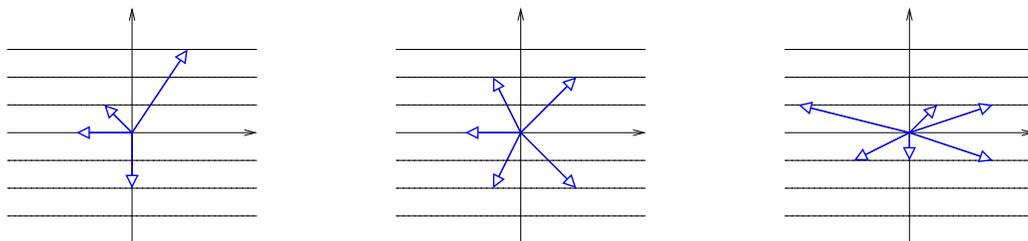


FIG. 3.1: De gauche à droite : un ensemble  $\mathfrak{S}$  qui n'est ni symétrique ni à petites variations verticales ; un ensemble symétrique ; un ensemble à petites variations verticales.

## 3.2 Résultats

On considère dans cette section, ainsi que dans le reste de ce chapitre, un ensemble de pas  $\mathfrak{S}$  à *petites variations verticales*. On définit l'entier  $p$  comme l'entier  $p(\mathfrak{S})$  pour ne pas alourdir les notations.

Soit  $w = (w_0 = O, \dots, w_n)$  un élément de  $\mathcal{S}_{p,0}(n)$ , c'est-à-dire un chemin sur le plan incisé de longueur  $n$  qui se termine en  $(p, 0)$ . Donnons-nous également  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , si bien que l'on a un chemin avec un pas marqué  $(w, i)$ .

### 3.2.1 Le cas symétrique

On suppose maintenant de plus que  $\mathfrak{S}$  est *symétrique*.

Si l'on regarde  $w$  comme un mot de  $\mathfrak{S}^*$ , la donnée de  $i$  correspond à une factorisation  $w = uv$  : si l'on écrit  $w = s_1 \cdots s_n$  dans  $\mathfrak{S}^*$ , alors on  $u := s_1 \cdots s_{i-1}$  et  $v := s_i \cdots s_n$ .

On définit alors  $\Psi(w, i) := \tilde{v}u$ .

Cette construction est illustrée sur la figure 3.2. Ici  $n = 16$  et  $i = 8$  ; les pas sont numérotés dans le chemin image  $\Psi(w, i)$  pour améliorer la lisibilité.

Géométriquement, le chemin  $\Psi(w, i) = (W_0, W_1, \dots, W_n)$  est le chemin :

- dont la première partie  $U = (W_0, W_1, \dots, W_{n-i+1})$  s'obtient en prenant le symétrique de  $(w_i, \dots, w_n)$  par rapport à l'axe des abscisses puis en le translatant de façon à ce que  $W_0 = O$  ;
- dont la seconde partie  $(W_{n-i+1}, \dots, W_n)$  s'obtient en translatant  $(w_0 = 0, \dots, w_{i-1})$  pour le concaténer avec le chemin  $U$ .

On est maintenant en mesure d'énoncer un premier théorème :

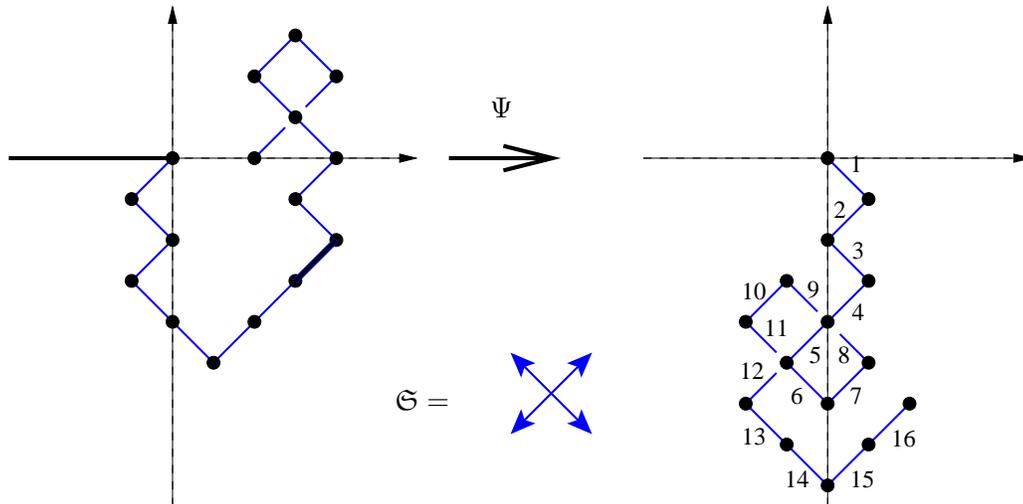


FIG. 3.2: Exemple de la construction  $\Psi$  dans le cas du réseau diagonal.

**Théorème 3.2.** Soit  $\mathfrak{S}$  un ensemble de pas symétrique et à petites variations verticales, et  $n$  un entier positif. La construction  $\Psi$  est une bijection entre les deux ensembles suivants :

1. les  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan incisé de longueur  $n$  terminant en  $(p(\mathfrak{S}), 0)$  avec un pas marqué, et
2. les  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan  $\mathbb{Z}^2$  qui se terminent en un point d'abscisse  $p$  et d'ordonnée paire.

Comme corollaire immédiat, il vient :

**Corollaire 3.3.** Soit  $S_{p(\mathfrak{S}), 0}(n)$  le nombre de  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan incisé de longueur  $n$  terminant en  $(p, 0)$ , et  $W_{p, \text{pair}}(n)$  le nombre de  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan  $\mathbb{Z}^2$  qui se terminent en un point d'abscisse  $p$  et d'ordonnée paire.

On a alors l'identité

$$n \cdot S_{p, 0}(n) = W_{p, \text{pair}}(n)$$

### 3.2.2 Extension au cas non symétrique

On veut maintenant généraliser le précédent théorème au cas où  $\mathfrak{S}$  n'est plus supposé symétrique ( tout en conservant la propriété de petites variations verticales ). La raison pour laquelle le théorème précédent ne peut être valide tel quel est simple : dans la deuxième partie du chemin  $W$ , les pas obtenus ne sont pas nécessairement éléments de  $\mathfrak{S}$  si ce dernier n'est pas symétrique .

Notons alors  $\mathfrak{S}_{\text{sym}}$  l'ensemble constitué des symétriques des éléments de  $\mathfrak{S}$  par rapport à l'axe des abscisses ; en d'autres termes  $\mathfrak{S}_{\text{sym}} = \tilde{\mathfrak{S}}$ . Définissons également l'union  $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}_{\text{sym}}$ . On a également besoin des sous ensembles  $\mathfrak{S}^\delta = \{s \in \mathfrak{S} \mid y(s) = \delta\}$  avec  $\delta$  un élément parmi  $\{-1, 0, 1\}$ . Comme  $\mathfrak{S}$  est à petites variations verticales, on a l'union disjointe  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1} \sqcup \mathfrak{S}^0 \sqcup \mathfrak{S}^1$ . On définit de même  $\overline{\mathfrak{S}}^\delta$  pour  $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ .

Soit  $(w, i_0)$  un  $\mathfrak{S}$ -chemin élément de  $\mathcal{S}_{p(\mathfrak{S}),0}(n)$ , avec  $2m$  pas non horizontaux.

1. On applique  $\Psi$  définie ci-dessus à  $(w, i_0)$ , et donc  $i_{cut} = n - i_0$  est l'indice du point de  $W = \Psi(w, i_0)$  où les 2 morceaux du chemin ont été concaténés ;
2. On construit 2 listes d'entiers  $L^1$  et  $L^{-1}$  de la manière suivante :  $L^1$  (resp.  $L^{-1}$ ) est la liste des abscisses des pas descendants de  $W$  (resp. des pas montants) situés avant l'indice  $i_{cut}$ , concaténée avec la liste des abscisses des pas montants de  $W$  (resp. des pas descendants) situés après  $i_{cut}$ .  
Ces 2 listes sont de longueur identique  $m$  ; précisons que par *abscisse* on entend ici l'abscisse d'un pas en tant que *vecteur* de  $\mathfrak{S}$ , et non celle d'un point du chemin.
3. Considérons les  $m$  premiers pas (en tant que vecteurs) non horizontaux de  $W$  : on leur substitue les pas de même ordonnée mais dont les abscisses sont les  $m$  entiers de la liste  $L^1$ . On fait de même avec les  $m$  pas non horizontaux restants et la liste  $L^{-1}$ . On appelle le chemin obtenu après ces substitutions  $\Psi^*(w, i_0)$ .

Cette construction est illustrée sur la Figure 3.3. On notera  $Mel$  la construction faite au points 2. et 3., si bien qu'on a  $\Psi^* = Mel \circ \Psi$  ; le nom provient de *mélange*, car  $Mel$  réalise bel et bien une permutation d'abscisses entre différents pas.

On peut maintenant énoncer un second théorème :

**Théorème 3.4.** *Soit  $\mathfrak{S}$  un ensemble à petites variations verticales, et  $n$  un entier positif.  $\Psi^*$  est une bijection entre*

1. *d'une part, les  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan incisé de longueur  $n$  terminant en  $(p, 0)$ , avec un pas marqué ;*
2. *et d'autre part, les  $\overline{\mathfrak{S}}$ -chemins de longueur  $n$  terminant à l'abscisse  $p$ , avec un nombre pair  $t = 2m$  de pas dans  $\overline{\mathfrak{S}}^1 \cup \overline{\mathfrak{S}}^{-1}$ , tels que les  $m$  premiers de ces pas appartiennent à  $\overline{\mathfrak{S}}^1$  et les  $m$  derniers à  $\overline{\mathfrak{S}}^{-1}$ .*

**Remarque:** Si  $\mathfrak{S}$  est symétrique il est aisé de voir que les ensembles de chemins décrits dans les points 2. des Théorèmes 3.2 et 3.4(2) coïncident ; en effet on a clairement  $\overline{\mathfrak{S}}^1 = \overline{\mathfrak{S}}^{-1}$  dans ce cas. Cependant, *les 2 bijections ne sont pas identiques dans ce cas* : la dernière étape de la bijection  $\Psi^*$  constitue en effet dans le cas symétrique une involution non triviale sur les chemins de  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$ .

### 3.3 Preuve du Théorème 3.2

On rappelle que l'on considère un ensemble  $\mathfrak{S}$  qui est symétrique et à petites variations verticales. Par exemple, les pas naturels du réseau  $\mathbb{Z}^2$ , c'est à-dire  $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ , forment un ensemble vérifiant ces 2 propriétés. On conserve les notations du Théorème 3.2, et notamment les mots  $u, v$  correspondant à la factorisation de  $w$  obtenue en marquant un pas.

La preuve va s'articuler en 3 points :

1.  $\Psi$  est bien définie de  $\mathcal{S}_{p,0}(n) \times \llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$ .
2. Construction d'une fonction  $\Gamma$  de  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$  dans  $\mathcal{S}_{p,0}(n) \times \llbracket 1, n \rrbracket$ .
3.  $\Psi$  et  $\Gamma$  sont inverses l'une de l'autre.

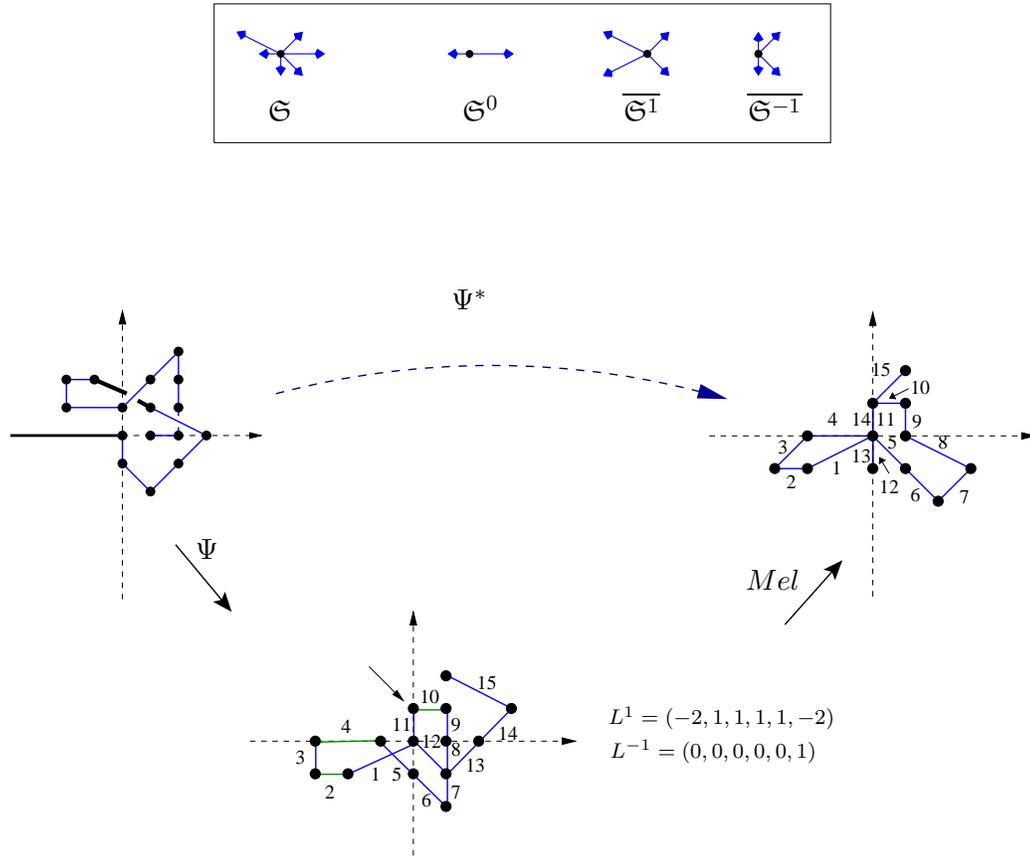


FIG. 3.3: Exemple de la bijection  $\Psi^*$  du Théorème 3.4. Dans le chemin final, on remarquera que les pas 1, 3, 5, 6, 7 et 8 sont ‘éléments de  $\overline{\mathfrak{S}^1}$ , et que les pas 9, 11, 12, 13, 14 et 15 sont éléments de  $\overline{\mathfrak{S}^{-1}}$ .

### 3.3.1 $\Psi$ est bien définie

Il s’agit ici de montrer que l’on arrive dans le bon ensemble d’arrivée  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$ .

Soit donc  $w = uv$ , et définissons les entiers  $h$  et  $k$  par  $end(u) = (h, k)$ . Comme par définition  $end(w) = (p, 0)$ , il vient  $end(v) = end(w) - end(u) = (p - h, -k)$ , et donc, après la réflexion d’axe  $(Ox)$ , on obtient  $end(\tilde{v}) = (p - h, k)$ . Comme  $\Psi(w, i) = \tilde{v}u$ , il vient  $end(\Psi(w, i)) = end(\tilde{v}) + end(u) = (p, 2k)$ , ce qui montre qu’effectivement  $\Psi(w, i)$  est un élément de  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$ .

### 3.3.2 Définition de la fonction $\Gamma$

Soit  $W = s_1 s_2 \cdots s_n = (W_0 = 0, W_1, \dots, W_n)$  un  $\mathfrak{S}$ -chemin de  $\mathbb{Z}^2$  qui se termine en  $W_n = end(W) = (p, 2\ell)$  où  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Comme  $\mathfrak{S}$  est à petites variations verticales, il existe des sommets du chemin  $W$  qui ont pour ordonnée  $\ell$  : en effet, pour joindre un point d’ordonnée 0 à un point d’ordonnée  $2\ell$  on est forcé de toucher la droite  $y = \ell$ . Parmi les points de  $W$  correspondant à ces sommets d’ordonnée  $\ell$ , soit  $(m, \ell)$  celui qui possède l’abscisse minimale.

Montrons que  $W$  ne termine pas en  $(m, \ell)$ , ce qui équivaut à  $(m, \ell) \neq (p, 0)$ .



a  $x > 0$ . Soit  $w_1$  un tel préfixe : nous allons considérer 2 cas, selon que  $w_1$  est un préfixe strictement plus court que  $W_2$  ou pas :

- Dans le premier cas, on peut factoriser  $w_1 \cdot t = W_2$ , et donc  $W_1 w_1$  est un préfixe de  $W$  strictement plus long que  $W_1$  se terminant en  $(m+x, l)$ . Par le Lemme 3.5, on a alors bien  $x > 0$ .
- Dans le second cas,  $W_2 \cdot t' = w_1$ , et  $t'$  est un préfixe de  $\widetilde{W}_1$ , ce qui revient à dire que  $\tilde{t}'$  est un préfixe de  $W_1$ . Mais  $end(t') = end(\widetilde{w}_1) - end(\widetilde{W}_2) = (m-p+x, l)$ , si bien que par le Lemme 3.5 on a  $x-p \geq 0$ , ce qui entraîne ici aussi  $x > 0$  étant donné que  $p > 0$ .

En résumé on a bien défini une fonctions  $\Gamma$  de  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$  vers  $\mathcal{S}_{p,0}(n)$ .

### 3.3.3 $\Gamma$ est la réciproque de la fonction $\Psi$

Il s'agit maintenant de montrer que  $\Gamma$  et  $\Psi$  sont des fonctions inverses l'une de l'autre. On remarque déjà que  $\Psi \circ \Gamma = Id$ ; en effet, si  $\Gamma(W) = (W_2 \widetilde{W}_1, j)$ , alors la marque  $j$  correspond à la première lettre de  $\widetilde{W}_1$ ; par définition de  $\Psi$  il vient donc bien  $\Psi(\Gamma(W)) = W$ .

Afin de conclure la preuve, on doit donc montrer que  $\Gamma(\Psi(w, i)) = (w, i)$ , ce qui revient à montrer que dans la factorisation  $\Psi(w, i) = \tilde{v}u$ ,  $\tilde{v}$  est égal au préfixe  $W_1$  défini dans la construction de  $\Gamma$ .

Si  $end(u) = (h, k)$ , on a déjà calculé que  $end(\tilde{v}) = (p-h, k)$  et que  $end(\Psi(w, i)) = end(\tilde{v}u) = (p, 2k)$ . Il reste donc deux choses à montrer : (1)  $p-h = m$ ,  $m$  étant défini dans la construction de  $\Gamma$ , et (2) si  $U$  est un préfixe de  $\Psi(w, i) = \tilde{v}u$  qui est strictement plus long que  $\tilde{v}$ , et a un point d'arrivée du type  $(x, k)$  pour un certain  $x$ , alors  $x > m$ .

- Raisonnons par l'absurde en supposant  $p-h > m$ .

Si  $\tilde{v}$  est un préfixe strict de  $W_1$ , ce qui fournit  $u_0 \neq \varepsilon$  tel que  $W_1 = \tilde{v}u_0$  et  $end(u_0) = (x, 0)$  avec  $x = m - (p-h) < 0$ . Comme  $W_1 W_2 = \tilde{v}u$ , cela implique  $u = u_0 W_2$ , ce qui est absurde car  $u_0$  est alors un préfixe de  $w$  terminant sur la demi-droite interdite  $\mathcal{H}$ .

$\widetilde{W}_1$  est donc préfixe de  $v$  : il s'ensuit que  $u \widetilde{W}_1$  est préfixe de  $w$ , et termine en  $(m+h, 0)$ . Or on a supposé  $m+h < p$ , le chemin  $u \widetilde{W}_1$  est en contradiction avec la définition de  $p$ . C'est d'ailleurs la seule fois où l'on utilise la définition de  $p$  dans la preuve.

On a donc démontré  $p-h \leq m$ ; or la définition même de  $m$  force  $p-h \geq m$ , si bien que (1) est prouvé.

- Soit  $U$  un préfixe de  $\tilde{v}u$ , avec  $end(U) = (x, k)$ , tel que  $U = \tilde{v}u_0$  où  $u_0 \neq \varepsilon$ . Alors  $u_0$  est un préfixe non vide de  $u$  vérifiant  $end(u) = (x+h-p, 0) = (x-m, 0)$ . Comme  $w = uv$  est un chemin sur le plan incisé, cela force  $x-m > 0$ , ce qui prouve (2) et complète la preuve du Théorem 3.2. □

### 3.3.4 Remarques

Cette construction  $\Psi$  est en fait une généralisation de celle de l'article [2] : dans le cas particulier du réseau carré, la bijection de [2] consiste non pas à marquer un pas quelconque pour tout chemin sur le plan incisé, mais à *marquer un unique pas*

pour chaque chemin : ce pas est défini comme le dernier pas dont l'origine possède l'abscisse minimale. Si ce pas-là est marqué dans notre bijection, elle est identique à la leur.

Cependant, distinguer un pas spécifique pour chaque chemin n'est pas toujours possible, mais cette approche peut s'étendre à une classe d'ensembles  $\mathfrak{S}$  particulière :

**Corollaire 3.6.** *Soit  $n$  un entier strictement positif,  $\mathfrak{S}$  un ensemble de pas symétrique et à petites variations verticales, et tel que  $(1, 0) \in \mathfrak{S}$  est le seul élément de  $\mathfrak{S}$  dont l'abscisse est strictement positive. Alors il existe une bijection entre  $\mathcal{S}_{1,0}(n)$  et les chemins de longueur  $n - 1$  qui terminent à l'abscisse 0, à une ordonnée paire, et qui restent dans le demi-plan  $x \geq 0$ .*

*Preuve :* On remarque d'abord que  $p = 1$  ; on marque alors le dernier pas dont l'origine est à une abscisse minimale (il en existe un car le chemin part de  $O$  et termine à l'abscisse 1). On applique alors la construction  $\Psi$  ; le sous-ensemble de  $\mathcal{W}_{p,\text{pair}}(n)$  ainsi obtenu consiste en les chemins dont le premier pas est  $(1, 0)$  et qui par la suite restent dans le demi-plan  $x \geq 1$ . On obtient la bijection du corollaire en supprimant ce premier pas.  $\square$

**Remarque:** On remarque aussi que La construction  $\Psi$  reste injective lorsque  $\mathfrak{S}$  n'est pas symétrique . Comme nous en aurons besoin dans la section suivante, donnons une description précise de l' image de  $\Psi$  dans ce cas :

**Proposition 3.7.** *Soit  $\mathfrak{S}$  un ensemble de pas à petites variations verticales, et  $n$  un entier strictement positif. Alors  $\Psi$  est une bijection entre :*

1. les  $\mathfrak{S}$ -chemins du plan incisé de longueur  $n$  terminant en  $(p, 0)$  dont un pas est marqué.
2. les  $\overline{\mathfrak{S}}$ -chemins  $W$  de  $\mathbb{Z}^2$  de longueur  $n$  terminant en  $(p, 2k)$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ , tels que, pour la décomposition  $W = W_1W_2$  définie comme dans la construction de  $\Gamma$ ,  $W_1$  est un  $\mathfrak{S}^{\text{sym}}$ -chemin and  $W_2$  est un  $\mathfrak{S}$ -chemin.

*Preuve:* La preuve est la même que pour le Théorème 3.2.  $\square$

On notera  $\mathcal{A}(n)$  les chemins définis dans le point 2. de la proposition.

Cette proposition n'est pas vraie en général lorsque l'on sort du cadre des petites variations verticales : dans ce cas, il peut exister des  $\overline{\mathfrak{S}}$ -chemins terminant en  $(p, 2k)$  qui n'ont aucun sommet à l'ordonnée  $k$ . Un pas  $(i, j)$  avec  $|j| > 1$  permet en effet de 'sauter' par dessus la droite d'équation  $y = k$ .

Enfin, les chemins du second point de la proposition ne sont pas plus faciles à énumérer que les chemins du plan incisé initiaux ; cela nous amène au résultat du Théorème 3.4, qui fournit lui des chemins plus simples de ce point de vue.

### 3.4 Preuve du Théorème 3.4

Dans toute cette section, on fixe  $\mathfrak{S}$  un ensemble de pas à petites variations verticales, et  $n$  un entier positif.

### 3.4.1 Les curieux chemins du Théorème 3.4

A priori, il n'y a pas de raison que la situation soit aussi favorable dans le cas non symétrique que dans le cas symétrique  $\mathfrak{S}$  : on pourrait s'attendre par exemple à ce que les nombres  $S_{p,0}(n)$  n'aient de forme close que dans des cas dégénérés.

Mais la génération des nombres  $S_{p,0}(n)$  pour certains ensembles  $\mathfrak{S}$  et les premiers entiers  $n$  (à l'aide du logiciel Maple, que je remercie ici) semblent confirmer le contraire ; et j'ai obtenu empiriquement des expressions closes de plusieurs  $S_{p,0}(n)$  pour certains ensembles  $\mathfrak{S}$  de 3 éléments.

Pendant il n'était pas clair de dégager une formule générale pour un  $\mathfrak{S}$  à petites variations verticales, correspondant aux chemins du Théorème 3.4, à savoir les  $\overline{\mathfrak{S}}$ -chemins de longueur  $n$  terminant à l'abscisse  $p(\mathfrak{S})$ , avec un nombre pair  $t = 2m$  de pas dans  $\overline{\mathfrak{S}^1} \cup \overline{\mathfrak{S}^{-1}}$ , tels que les  $m$  premiers de ces pas appartiennent à  $\overline{\mathfrak{S}^1}$  et les  $m$  derniers à  $\overline{\mathfrak{S}^{-1}}$  : notons  $\mathcal{B}(n)$  cet ensemble de chemins. En vue de cela, on utilise l'un des résultats fondamentaux de l'article [6] ; Mireille Bousquet-Mélou y démontre :

**Théorème 3.8** ([6]). *Soit  $\mathfrak{S}$  un ensemble de pas à petites variations verticales.*

*On définit les polynômes de Laurent  $A_\delta(x) = \sum_{i \in \mathfrak{S}^\delta} x^i$ , pour  $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ .*

*Soit également  $\Delta(x; t)$  le polynôme en  $x, x^{-1}$  et  $t$  défini par*

$$\Delta(x; t) = (1 - tA_0(x))^2 - 4t^2 A_1(x)A_{-1}(x).$$

*Alors la fonction génératrice des chemins du plan incisé terminant en  $(p(\mathfrak{S}), 0)$  est donnée par*

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{p,0}(n)t^n = [x^p] \log \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta(x; t)}} \right),$$

*où la notation  $[x^p]$  signifie que l'on prend le coefficient de  $x^p$  dans le terme de droite.*

Notre but est de montrer que le coefficient de  $t^n$  dans le terme de droite, multiplié par  $n$ , correspond en fait naturellement à l'énumération de l'ensemble  $\mathcal{B}(n)$ .

Notons  $B$  une série de Laurent en  $x^{\frac{1}{2}}$  telle que  $B^2 = A_1(x)A_{-1}(x)$  : par exemple, si le terme de plus bas degré de  $A_1(x)A_{-1}(x)$  est  $a_t x^t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , on a  $A_1(x)A_{-1}(x) = a_t x^t (1 + xP(x))$  où  $P(x)$  est un polynôme en  $x$ , et l'on pose  $B = \sqrt{a_t} x^{t/2} \sqrt{1 + xP(x)}$  qui convient.

Il vient  $\Delta(x; t) = (1 - t(A_0 + 2B))(1 - t(A_0 - 2B))$  ; puis, pour  $\epsilon$  égal à  $-1$  ou  $1$  :

$$[t^n] \log \frac{1}{1 - t(A_0 + \epsilon 2B)} = \frac{1}{n} (A_0 - \epsilon 2B)^n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_0^{n-k} \epsilon^k 2^k B^k$$

$$\begin{aligned}
S_{p,0}(n) &= \frac{1}{2}[x^p t^n] \log \left( \frac{1}{\Delta(x;t)} \right) \\
&= \frac{1}{2n}[x^p] \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_0^{n-k} (1^k + (-1)^k) 2^k B^k \\
n \cdot S_{p,0}(n) &= [x^p] \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j} A_0^{n-2j} 2^{2j} A_1^j A_{-1}^j
\end{aligned}$$

Pour achever la preuve, il reste à montrer que le terme de droite est égal au cardinal de  $\mathcal{B}(n)$ . Or, pour déterminer un tel chemin, on doit choisir où placer les occurrences des pas de  $\mathfrak{S}^0$  (terme  $\binom{n}{2j}$  pour  $n - 2j$  tels pas), choisir les pas de  $\mathfrak{S}^0$  eux-mêmes (terme  $A_0^{n-2j}$ ), ceux de  $\overline{\mathfrak{S}^1}$  (terme  $2^j A_1^j$ ) et de  $\overline{\mathfrak{S}^{-1}}$  (terme  $2^j A_{-1}^j$ ). On prend ensuite le coefficient de  $x^p$  dans la série obtenue pour s'assurer que le chemin se termine à l'abscisse  $p$ .

### 3.4.2 Démonstration

On veut maintenant montrer que  $\Psi^*$  est bien une bijection entre  $\mathcal{S}_{p,0}(n)$  et  $\mathcal{B}(n)$ ; pour cela, on va comme dans la preuve du premier théorème décrire la construction inverse. Pour plus de simplicité, rappelons que l'on a noté  $\mathcal{A}(n)$  l'ensemble de chemins du point 2. décrits dans la Proposition 3.7. On a  $\mathcal{A}(n) = \Psi(\mathcal{S}_{p,0}(n))$  par définition, et  $\Psi$  est une bijection entre ces deux ensembles.

Lors de la définition de  $\Psi^*$ , on a noté  $Mel$  la construction de  $\mathcal{A}(n)$  vers  $\mathcal{B}(n)$ : il s'agit maintenant de montrer que  $Mel$  est une bijection de  $\mathcal{A}(n)$  vers  $\mathcal{B}(n)$ .

On remarque d'abord que  $Mel$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{B}(n)$ , car :

- Les abscisses des pas ont été permutées, donc leur somme reste la même; comme de plus les ordonnées des pas ne sont pas modifiées par  $Mel$ , cette fonction conserve bien les points d'arrivée des chemins.
- les listes  $L^1$  et  $L^{-1}$  sont bien formées d'abscisses de pas de  $\overline{\mathfrak{S}^1}$  et  $\overline{\mathfrak{S}^{-1}}$  respectivement, par la définition même du point d'indice  $i_{cut}$ .

*Montrons que la transformation  $Mel$  est injective* : donnons nous  $W = (W_0, W_1, \dots, W_n)$  un chemin de  $\mathcal{A}(n)$ , et  $Mel(W) \in \mathcal{B}(n)$  son image. Ces deux chemins ont le même point d'arrivée que l'on note  $(p, 2k)$ , et des pas non horizontaux occurrant aux mêmes indices; soit  $2r$  le nombre de pas non horizontaux. Soient  $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq n$  les indices des sommets à hauteur  $k$  (dans  $W$  ou dans  $Mel(W)$ , là encore les indices sont les mêmes).

On note  $r_0 = m_0 + d_0$  le nombre de pas non horizontaux situés avant  $t_1$ , avec  $m_0$  (resp.  $d_0$ ) le nombre de pas montants (resp. descendants). On note de même  $r_m = m_m + d_m$  le nombre de pas non horizontaux situés après  $t_m$ . Finalement, on note  $2r_l$  le nombre de pas non horizontaux situés entre les indices  $t_l$  et  $t_{l+1}$  pour  $l$  entre 1 et  $m - 1$ . Remarquons qu'on a  $k = m_0 - d_0 = m_m - d_m$ , et donc  $m_0 + d_m = m_m + d_0 = \frac{r_0 + r_m}{2}$ .

L'indice  $i_{cut}$  est évidemment l'un des indices  $t_l$ , et on va montrer comment retrouver cet indice à partir du chemin  $Mel(W)$ . Il est clair que les abscisses des pas

montants de  $W$  (respectivement descendants) entre les indices 0 et  $t_1$  sont rangées dans  $L^{-1}$  (resp. dans  $L^1$ ); entre  $t_m$  et  $n$  en revanche, ce sont les abscisses des pas descendants qui vont dans  $L^{-1}$ , et celles des pas montants dans  $L^1$ . Pour ce qui se passe entre deux indices  $t_l$ , on fait alors la remarque fondamentale suivante : dans la construction  $Mel$ , lorsqu'on parcourt  $W$  entre les 2 points  $W_{t_l}$  et  $W_{t_{l+1}}$ , on ajoute le même nombre d'éléments  $r_l$  aux listes  $L^1$  et  $L^{-1}$  (cela parce qu'il y a autant de pas montants que descendants entre ces deux points), et ce *indépendamment de la position de l'indice  $i_{cut}$* .

Considérons maintenant les listes  $L^1$  et  $L^{-1}$ , de longueur  $r$  chacune, avec  $r = r_1 + \dots + r_{m-1} + \frac{r_0+r_m}{2}$ . On définit les sommes  $S_l$ , pour  $1 \leq l \leq m$  :

- $S_1$  est la somme des  $m_0$  premiers éléments de  $L^{-1}$ , des  $d_0$  premiers éléments de  $L^1$ , et des abscisses des pas horizontaux situés avant l'indice  $t_1$ .
- Pour  $i > 1$ ,  $S_i$  est la somme des éléments de  $L^{-1}$  entre le premier et celui d'indice  $m_0 + r_1 + \dots + r_i$ , ajoutée à la somme des éléments de  $L^1$  entre le premier et celui d'indice  $d_0 + r_1 + \dots + r_i$ , et aux abscisses des pas horizontaux situés avant l'indice  $t_i$ .

Pour l'exemple de la Figure 3.3, on a  $t_1 = 9, t_2 = 10, t_3 = 14$ , et l'on en déduit  $m_0 = 4, d_0 = 3, r_1 = 0, r_2 = 2, m_m = 1, d_m = 0$ . Cela correspond, pour le calcul des  $S_i$ , à découper les listes en  $L^1 = (-2, 1, 1|\emptyset|1, 1| - 2)$  et  $L^{-1} = (0, 0, 0, 0|\emptyset|0, 1|\emptyset)$ ; pour la liste des abscisses des pas horizontaux, on obtient une décomposition  $(-1, 2| - 1|\emptyset|\emptyset)$  en coupant aux indices  $t_i$ . On en déduit que les sommes  $S_1, S_2, S_3$  sont respectivement égales à 1, 0 et 3. On en déduit que  $i_{cut}$  est ici égal à  $t_2 = 10$ .

Par la remarque faite plus haut, on sait alors que *les sommes  $S_l$  sont exactement les abscisses des points  $W_{t_l}$* . On peut alors en déduire l'indice  $i_{cut}$  : il s'agit en effet du plus grand indice  $l$  parmi ceux où le nombre  $S_l$  est minimal, par définition. On a donc pu retrouver l'indice  $i_{cut}$  à partir du chemin  $Mel(W)$  de  $\mathcal{B}(n)$ .

Il est trivial à partir de là de reconstruire le chemin  $W$ , et ce uniquement à partir de la donnée de  $Mel(W)$ .

On vient donc de prouver que la fonction  $Mel$  est injective. Or on sait grâce à la Section 3.4.1 que  $\mathcal{A}(n)$  et  $\mathcal{B}(n)$  ont même cardinal. Donc on vient en fait de construire l'inverse de la fonction  $Mel$ , ce qui démontre finalement le Théorème 3.4.  $\square$

## 3.5 Applications

Nous allons donner deux types d'applications des bijections des Théorèmes 3.2 et 3.4 ; dans chaque cas, l'utilité du résultat provient de ce que les chemins mis en bijection avec les chemins du plan incisé sont facilement énumérables.

D'abord nous nous intéressons à l'aspect énumératif, en donnant quelques exemples de pas  $\mathfrak{S}$  pour lesquels une formule close du comptage des chemins suivant leur longueur existe, formule que nous démontrons de manière bijective.

Ensuite, nous décrivons une application probabiliste de la bijection, en calculant le nombre moyen de sommets à une ordonnée  $j$  donnée lorsque l'on suppose que tous les chemins de  $\mathcal{S}_{p(\mathfrak{S}),0}(n)$  sont équiprobables.

### 3.5.1 Exemples d'énumération

On va donner deux applications du Théorème 3.2, et une du Théorème 3.4, puis expliquer dans quelle mesure ces résultats peuvent s'étendre.

Commençons avec le réseau diagonal, pour lequel  $p = 2$ . Soit  $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$  le  $n$ ème nombre de Catalan.

**Proposition 3.9** ([6]). *Soit  $n$  un entier positif. Il y a  $4^n C_n/2$  chemins de longueur  $2n$  sur le plan incisé dont les pas sont  $\{(\pm 1, \pm 1)\}$  qui se terminent en  $(2, 0)$ .*

*Preuve :* Soit  $D_n$  le cardinal de ces chemins. Par le Théorème 3.2, il s'agit d'énumérer les chemins de longueur  $2n$  se terminant en un point  $(2, 2l)$  où  $l \in \mathbb{Z}$ . De fait, la condition que les chemins terminent à hauteur paire est superflue étant donné que les chemins sont de longueur paire.

Pour construire un tel chemin, choisissons d'abord les occurrences des pas qui ont une abscisse positive, i.e.  $(1, 1)$  and  $(1, -1)$ . Les chemins terminant à l'abscisse 2, il y a précisément  $n + 1$  occurrences, ce qui correspond à  $\binom{2n}{n+1}$  choix à cette étape. Pour déterminer complètement un chemin, il faut choisir pour chaque pas s'il a ordonnée 1 ou  $-1$ , ce qui correspond à  $2^{2n} = 4^n$  possibilités.

Par le Théorème 3.2, de tels chemins sont en bijection avec les chemins de  $D_n$  marqués. Il vient donc

$$2nD_n = 4^n \binom{2n}{n+1},$$

qui est équivalente à la formule donnée dans l'énoncé de la proposition.  $\square$

**Proposition 3.10** ([7]). *Soit  $n$  un entier positif. Il y a  $4^n \binom{3n}{n}/(n+1)$  chemins de longueur  $3n + 1$  sur le plan incisé dont les pas sont  $\{(2, 0), (-1, 1), (-1, -1)\}$  qui se terminent en  $(2, 0)$ .*

*Preuve :* Soit  $K_n$  le cardinal de ces chemins. On est ici amené à compter les chemins de longueur  $3n+1$  terminant à l'abscisse 2 et à une ordonnée paire. Soit  $a$  le nombre d'occurrences du pas  $(2, 0)$  dans un tel chemin. En écrivant une équation sur les abscisses des pas du chemin, il vient  $2a - (3n + 1 - a) = 2$  et donc  $a = n + 1$ . Le choix des occurrences de ces pas est ainsi  $\binom{3n+1}{n+1}$ , et il reste à déterminer parmi les  $2n$  occurrences de pas restantes celles de  $(-1, 1)$  et de  $(-1, -1)$ . Ici encore la condition sur l'ordonnée paire s'avère superflue. On obtient finalement

$$(3n + 1)K_n = 4^n \binom{3n + 1}{n + 1},$$

qui est bien l'énumération désirée.  $\square$

Donnons également un exemple d'application du Théorème 3.4, qui montre que des formules closes existent pour des ensembles de pas non triviaux même dans le cadre non symétrique :

**Proposition 3.11.** *Soit  $n$  un entier positif. Il y a  $4^{2n+1} \binom{2n+1}{n}/(4n+2)$  chemins de longueur  $4n + 2$  sur le plan incisé dont les pas sont  $\{(0, -1), (-1, 1), (1, 1)\}$  et qui se terminent en  $(1, 0)$ .*

*Preuve :* Soit  $T_n$  le cardinal de ces chemins. Par le Théorème 3.4, après le marquage d'un pas, on est ramené à énumérer les chemins de longueur  $4n + 2$  dont les  $2n + 1$

premiers pas sont éléments de  $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ , les  $2n + 1$  derniers pas sont éléments de  $\{(0, \pm 1)\}$ , et qui se terminent à l'abscisse 1. Pour satisfaire la condition sur l'abscisse finale, il doit y avoir  $n + 1$  occurrences de pas dans  $\{(1, \pm 1)\}$ . Après cette analyse, il vient facilement l'égalité

$$(4n + 2)T_n = 2^{2n+1} \binom{2n+1}{n} \cdot 2^{2n+1},$$

qui permet de conclure la preuve.  $\square$

Ces formules closes ne sont pas totalement isolées. En effet, *pour tous les ensembles possibles*  $\mathfrak{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$  de 3 pas non tous horizontaux,  $S_{p,0}(n)$  admet une forme close. C'est facile à voir : si  $x_1, x_2, x_3$  désigne le nombre d'occurrences de ces pas, on a 3 équations linéaires les liant :  $x_1 + x_2 + x_3 = n$  évidemment, et deux autres en regardant les abscisses et les ordonnées. Ces équations ont alors au plus une solution en les  $x_i$ , ce qui se traduit aisément en une formule close pour les chemins de  $\mathcal{W}_{p,pair}(n)$  ou de  $\mathcal{B}(n)$ .

Les formules sont également closes pour les ensembles de pas symétriques de cardinal 4 du type  $\{(a, \pm 1), (-b, \pm 1)\}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers positifs.

### 3.5.2 Nombre moyen de passages à une ordonnée donnée

Il existe une statistique transportée par les bijections des Théorèmes 3.2 and 3.4 : les chemins du plan incisé dont le sommet initial  $w_i$  de l'occurrence du pas marqué est à hauteur  $k$  ont pour image des chemins se terminant à la hauteur  $2k$ . C'est une conséquence de la preuve de ces théorèmes. Notons au passage que le cas  $k = 0$  est une conséquence d'un certain *lemme cyclique* énoncé dans [8].

Cette observation apporte une réponse au problème suivant : On se donne  $\mathfrak{S}$  et  $n$ , et on suppose une distribution uniforme sur les chemins de  $\mathcal{S}_{p,0}(n)$ . En moyenne, combien de fois ces chemins passent à la hauteur  $j$  ? Soit  $H_j^n$  la variable aléatoire définie sur  $\mathcal{S}_{p,0}(n)$  (avec distribution de probabilité uniforme) par  $H_j^n(w) = |\{i > 0 \mid y(w_i) = j\}|$ . La question posée revient donc à évaluer l'espérance de  $H_j^n$ .

La proposition suivante, dont la preuve découle immédiatement de ce qui précède, répond au problème posé :

**Proposition 3.12.** *Soit  $\mathfrak{S}$  symétrique et à petites variations verticales,  $n$  un entier positif, et  $j$  un entier. Alors l'espérance  $\mathbb{E}(H_j^n)$  est égale à*

$$\mathbb{E}(H_j^n) = n \cdot \frac{|\mathcal{W}_{p,2j}|}{|\mathcal{W}_{p,pair}|}$$

La version plus générale pour des  $\mathfrak{S}$  non symétriques est similaire. Grâce à cette proposition, on peut obtenir des formules close de cette espérance pour un grand nombre d'ensembles de pas  $\mathfrak{S}$ . Ainsi pour le réseau carré il vient :

$$\mathbb{E}(H_j^{2n+1}) = \frac{(2n+2) \binom{2n+1}{n+j+1} \binom{2n+1}{n-j+1}}{\binom{4n+2}{2n+1}}$$

Par la formule de Stirling, cette dernière quantité est asymptotiquement équivalente à  $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{n}$  lorsque  $j$  est fixé et que  $n$  tend vers l'infini.

### 3.6 Variation : chemins dans la partie supérieure du plan incisé

Une variation des chemins sur le plan incisé est considérée brièvement dans [6] : il s'agit d'ajouter en plus la contrainte stipulant que les chemins doivent rester dans le demi plan supérieur  $\{y \geq 0\}$ .

Considérons donc pour  $\mathfrak{S}$  fixé les chemins terminant en  $(p(\mathfrak{S}), 0)$ , où  $p(\mathfrak{S})$  est défini de la même façon qu'avant : c'est le plus petit  $x > 0$  tel qu'il existe un  $\mathfrak{S}$ -chemin terminant<sup>1</sup> en  $(x, 0)$ . Alors on a le théorème suivant :

**Théorème 3.13.** *Soit  $n$  un entier positif. Les chemins de  $\mathcal{S}_{p,0}(n)$  qui restent dans la région  $(y \geq 0)$  sont en bijection avec les chemins de  $\mathbb{Z}^2$  se terminant en  $(p, 0)$ .*

*Preuve :* La bijection est la même que  $\Psi$  sauf qu'on ne réalise pas la réflexion par rapport à l'axe des abscisses : si  $w = uv$  est la factorisation déterminée par le pas marqué, l'image de  $w$  est le chemin  $\psi(w) = uv$ .

La bijection inverse est similaire au cas du plan incisé. on prend  $W$ , et l'on définit  $W_1$  comme le plus long préfixe  $U$  de  $W$  parmi ceux avec  $y(U)$  minimal, et  $x(U)$  minimal parmi ces derniers. Alors si  $W = W_1W_2$ , la bijection inverse est donnée par  $\gamma(W) = W_2W_1$  où le premier pas de  $W_1$  est marquée si  $W_1 \neq \varepsilon$ , et le premier pas de  $\gamma(W)$  si  $W_1 = \varepsilon$ .

Le fait qu'on a bien là une bijection et son inverse se démontre de façon quasi identique au Théorème 3.2, à ceci près qu'on n'a plus de réflexion à effectuer.  $\square$

On remarque qu'ici le fait de ne plus faire de réflexion permet de traiter en une fois les cas de  $\mathfrak{S}$  symétrique et  $\mathfrak{S}$  non symétrique.

---

<sup>1</sup>Il est équivalent de demander en plus que ce  $\mathfrak{S}$ -chemin soit dans le plan incisé, et même de le contraindre à rester dans le demi-plan supérieur : dans chaque cas  $p(\mathfrak{S})$  est le même.



## Chapitre 4

# Configurations de *Fully Packed Loops*

Les configurations de *Fully Packed Loops* sont des remplissages d'une grille de  $n^2$  sommets tels que chaque sommet a deux arêtes adjacentes, et qu'une arête sur deux est occupée sur le bord de la grille : voir la gauche de la Figure 4.2. On a dit en introduction qu'il s'agit d'un modèle de mécanique statistique : l'intérêt qu'il suscite en combinatoire est issu de deux problématiques différentes que nous allons expliciter.

D'une part, les conjectures de Razumov et Stroganov prédisent que les vecteurs propres de l'état fondamental de certains Hamiltoniens dans le modèle "dense loop  $O(1)$ " sont donnés par le nombre de configurations FPL correspondant à un couplage particulier ; on va donner une formulation combinatoire de cette conjecture dans le paragraphe suivant.



FIG. 4.1: Diagrammes de cordes sur 6 points.

Considérons un cercle avec  $2n$  points numérotés de  $A_1$  à  $A_{2n}$  fixés, et l'ensemble  $\mathcal{D}_n$  des diagrammes obtenus en traçant  $n$  cordes ne se croisant pas entre les points : voir Figure 4.1 pour les 5 diagrammes de  $\mathcal{D}_3$ . On définit les opérateurs  $h_i$  sur  $\mathcal{D}_n$ ,  $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ , comme suit : soit  $\pi \in \mathcal{D}_n$ , tel que  $A_i$  est lié à  $A_j$ , et  $A_{i+1}$  est lié à  $A_k$ . Alors  $h_i(\pi)$  est le couplage tel que  $A_i$  est lié à  $A_k$ ,  $A_{i+1}$  est lié à  $A_j$ , et les autres cordes restent les mêmes (les indices sont pris modulo  $2n$ ). D'un autre côté, une configuration FPL définit naturellement  $n$  chemins qui induisent un diagramme de cordes entre ses arêtes externes ; pour tout élément  $\pi$  de  $\mathcal{D}_n$ , on définit alors  $A_n(\pi)$  comme le nombre de configurations FPL dont le diagramme associé est  $\pi$ .

La *conjecture de Razumov Stroganov* s'énonce alors :

$$\text{pour tout } \pi \in \mathcal{D}_n, 2nA_n(\pi) = \sum_{i, \pi': h_i(\pi') = \pi} A_n(\pi').$$

D'autre part, les configurations FPL sont en bijection avec les *matrices à signe*

*alternant* [20]. Une matrice à signe alternant est une matrice carrée dont les entrées sont dans  $\{0, 1, -1\}$ , et telle que sur chaque ligne et chaque colonne, la somme des entrées vaut 1, et les entrées 1 et  $-1$  apparaissent en alternant (en faisant abstraction des zéros). La bijection consiste simplement à remplacer les sommets où le chemin *tourne* par des 0, et le reste par des 1 et  $-1$  (en alternant) ; voir Figure 4.2. L'énumération des matrices à signe alternant, longtemps restée ouverte, a été faite par Zeilberger [72], puis de manière plus simple par Kuperberg [42]. Le résultat est que le nombre de telles matrices de côté  $n$  est donné par

$$A_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}.$$

Il s'agit donc également du nombre de configurations FPL dans une grille avec  $n^2$  sommets : dans cette optique, l'énumération des configurations avec un couplage donné constitue un raffinement intéressant des matrices à signe alternant.

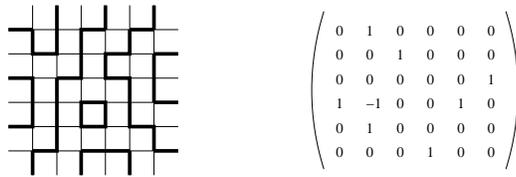


FIG. 4.2: Configurations FPL et Matrice à signe alternant.

Un grand nombre de conjectures concernant les FPL a été rassemblé dans le survol de Zuber [74]. Certaines ont été démontrées dans les articles [12,22]. Dans ce chapitre, nous allons montrer l'une d'entre elles : le nombre de configurations FPL avec un nombre croissant d'arches imbriquées dans le diagramme de cordes associé est donné par un polynôme en la taille de la grille, polynôme dont on fournira le degré et le coefficient dominant. Nous allons préciser ce résultat dans la Section suivante, et nous en profiterons pour détailler le plan de ce chapitre.

## 4.1 Définitions et Résultats

Soit  $n$  un entier positif. On considère la grille carrée dont le côté a longueur  $n-1$ , et qui possède ainsi  $n^2$  sommets ; elle sera notée  $Q_n$ . Les arêtes de cette grille sont de deux types : les arêtes *internes*, qui joignent 2 sommets de la grille, et les arêtes *externes*, qui pointent depuis un sommet du bord de la grille vers l'extérieur. Un simple calcul donne  $2n(n-1)$  arêtes internes et  $4n$  arêtes externes pour la grille  $Q_n$  ; les sommets de la grille  $Q_{11}$  et les arêtes externes sont illustrées sur la Figure 4.3

On appelle configuration FPL ( pour *fully packed loops*) un sous-ensemble d'arêtes sur la grille  $Q_n$  tel que chaque sommet de la grille est de degré 2. Une telle configuration constitue ainsi un ensemble de chemins (fermés ou non) qui ne se touchent pas, et qui passent par tous les points de la grille. On ne considèrera ici que des configurations FPL avec conditions périodiques à la frontière (*periodic boundary conditions*) : cela signifie qu'on oblige les arêtes externes d'une configuration à être exactement la moitié des arêtes externes de la grille, en en sélectionnant

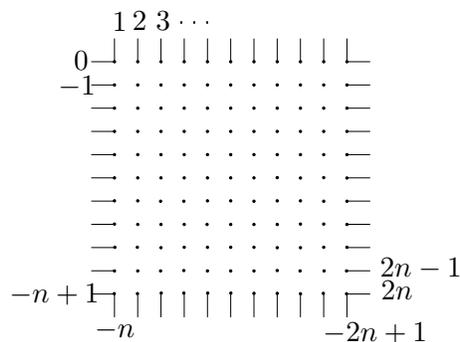
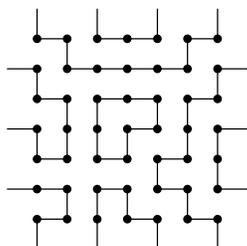


FIG. 4.3: L'étiquetage des arêtes externes.

une sur deux.

FIG. 4.4: Une configuration FPL sur  $Q_7$  avec conditions périodiques à la frontière

Chaque configuration FPL définit de manière naturelle un couplage non croisé sur les arêtes externes, en appariant deux de ces arêtes si elles constituent les 2 extrémités d'un même chemin dans la configuration en question. On va s'intéresser dans ce travail à l'énumération de configurations associées à un couplage fixé. Un résultat de Wieland [68] nous dit que ce nombre est invariant lorsque le couplage subit une rotation autour de la grille  $Q_n$  (voir paragraphe 4.2.1; ainsi, on pourra représenter un couplage sous la forme d'un diagramme de cordes (sans intersection) de  $2n$  points sur un cercle. Par exemple, le diagramme de la Figure 4.5 est celui qui est induit par le couplage de la figure 4.4.

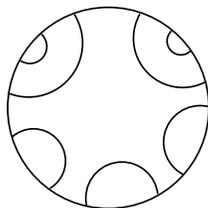


FIG. 4.5: Représentation d'un couplage sous forme d'un diagramme de cordes

La conjecture de Zuber a trait aux configurations dont le couplage associé comporte  $m$  arches emboîtées. Plus précisément, fixons  $X$  un couplage non croisé avec  $n-m$  arches. En ajoutant  $m$  arches emboîtées, on obtient un nouveau couplage

de  $n$  arches (voir Figure 4.6, qui donne de façon schématique la manière dont ce nouveau couplage est constitué).

La conjecture de Zuber dit que le nombre de configurations FPL induisant un tel couplage est un polynôme en  $m$ , dont le terme dominant peut être déterminé en utilisant un certain diagramme de Ferrers  $\lambda(X)$  attaché à un couplage  $X$  donné (voir section 4.2.2 pour la définition).

**Conjecture 4.1** ([74], Conj. 6). *Soit  $X$  un couplage non croisé de  $n - m$  arches, et  $X \cup m$  le couplage obtenu en ajoutant  $m$  arches emboîtées à  $X$ . Alors le nombre  $A_X(m)$  de configurations FPL qui ont  $X \cup m$  comme couplage est égal à  $\frac{1}{|X|!} P_X(m)$ , où  $P_X(m)$  est un polynôme de degré  $|\lambda(X)|$  à coefficients entiers, et dont le coefficient dominant vaut  $\dim(\lambda(X))$ . Ici,  $|\lambda(X)|$  dénote la taille du diagramme de Ferrers  $\lambda(X)$ , et  $\dim(\lambda(X))$  dénote la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique  $S_{|\lambda(X)|}$  indexée par le diagramme de Ferrers  $\lambda(X)$ , dimension qui est donnée par la formule des équerres, cf. 2.2.1).*

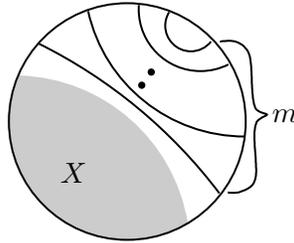


FIG. 4.6: Le couplage obtenu à partir d'un couplage fixé  $X$  et de  $m$  arches emboîtées.

La preuve de ce résultat constitue l'essentiel de ce chapitre. Donnons-en les grandes lignes, qui constituent les diverses sections :

La démonstration se base sur 2 observations élémentaires mais fondamentales dues à de Gier [20]. Si l'on considère l'ensemble des configurations associées à un couplage fixé, alors il y a de nombreuses arêtes qui appartiennent à *toutes* ces configurations. On détaillera cela dans la section 4.3, et l'on verra comment cette observation permet de scinder notre problème énumératif en 2 sous-problèmes dans des parties distinctes de la grille  $Q_n$ .

L'une de ces régions ne dépend pas de  $m$ , l'autre si : dans cette dernière région il faut donc montrer que les sous-configurations sont en nombre croissant polynomialement avec  $m$ . Pour cela on utilisera la deuxième observation de de Gier, à savoir une bijection entre les configurations FPL (avec certaines contraintes sur les arêtes) et les pavages d'une région triangulaire par des losanges ; voir la preuve du Théorème 4.9.

Dans notre cas, l'énumération de ces pavages est réalisé par la *hook content formula* (voir préliminaires, chapitre 2. La nature polynomiale des nombres obtenus est ici claire, et cela prouvera l'assertion que  $A_X(m)$  est un polynome, pour  $m$  assez grand : l'extension au cas des petits  $m$  sera fait dans la section 4.5 par un argument indirect.

Pour démontrer les assertions plus précises de la conjecture concernant l'intégralité des coefficients et le terme dominant, des résultats techniques plus fins sont

nécessaires : ceux-ci sont énoncés et prouvés dans la Section 4.6.

## 4.2 Résultats préliminaires

On identifiera les  $4n$  arêtes externes à un entier entre  $-2n + 1$  et  $2n$  comme défini par la numérotation explicitée sur la Figure 4.3.

### 4.2.1 Invariance par rotation

Soit  $X$  un couplage non croisé des arêtes externes impaires (resp. paires) ; on définit le couplage  $\tilde{X}$  des arêtes paires (resp. impaires) par la propriété que  $i$  et  $j$  sont appariés dans  $X$  si et seulement si  $i + 1$  et  $j + 1$  sont appariés dans  $\tilde{X}$  (on identifie ici  $2n + 1$  et  $-2n + 1$ ). Notons  $FPL(X)$  l'ensemble des configurations FPL correspondant au couplage  $X$ . Wieland [68] démontre le résultat suivant :

**Théorème 4.2** ([68]). *Pour tout couplage  $X$  des arêtes externes paires ou impaires, on a*

$$|FPL(X)| = |FPL(\tilde{X})|.$$

Ainsi le nombre de configurations FPL correspondant à un couplage donné ne dépend du positionnement de ce couplage qu'à une rotation près sur la grille carrée. Comme on l'a vu, cela permet de représenter les couplages non croisés comme des diagrammes de cordes tels que celui de la Figure 4.5.

Ce résultat nous sera utile pour placer notre couplage d'une certaine façon sur la grille de sorte que l'énumération des configurations correspondantes devienne aussi simple que possible ; pour cela, on verra dans la Section 4.3 l'existence d'arêtes qui sont présentes dans *toutes* les configurations associées à un couplage donné.

### 4.2.2 Couplage et diagramme de Ferrers

Soit  $X$  un couplage non croisé sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 2d\}$ , c'est-à-dire une involution sans point fixe qui peut être représentée par des arches qui ne se croisent pas dans le demi plan supérieur (cf. Figure 4.7 pour un exemple avec  $d = 8$ ). Un tel couplage peut être transformé en une suite de 0 et de 1  $v(X) = v_1 v_2 \dots v_{2d}$  de longueur  $2d$  en posant  $v_i = 0$  si  $X(i) > i$ , et  $v_i = 1$  si  $X(i) < i$ . Par exemple, si  $X$  est le couplage de la Figure 4.7, il vient  $v = 0010010011101101$ .

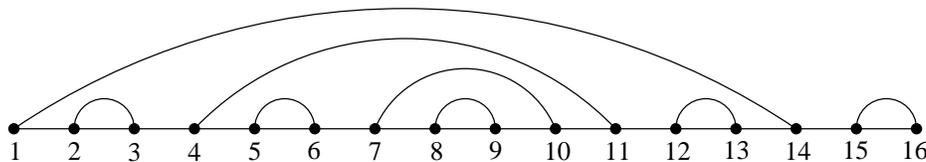
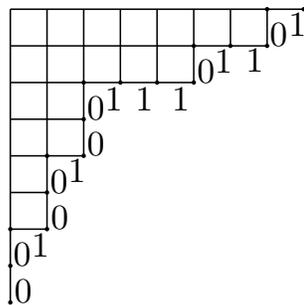


FIG. 4.7: Un couplage non croisé.

D'un autre côté, toute suite de 0 et de 1 peut être transformée en un diagramme de Ferrers : pour cela, on lit la suite de gauche à droite, et on interprète 0 comme un pas montant et 1 comme un pas à droite. On trace ensuite un segment montant depuis le sommet initial du chemin obtenu, et un segment à gauche du sommet final.


 FIG. 4.8: Un diagramme de Ferrers et son  $d$ -code

Par définition, la région enclose par le chemin ainsi que les segments horizontaux et verticaux est le *diagramme de Ferrers associé au couplage donné*. La Figure 4.8 illustre le diagramme de Ferrers associé au couplage de la Figure 4.7. Dans la suite, le diagramme de Ferrers associé au couplage  $X$  sera noté  $\lambda(X)$ .

Réciproquement, pour un diagramme de Ferrers  $\lambda$ , on peut associer une infinité de suites de 0 et de 1 qui donnent le diagramme via la procédure que l'on vient de décrire : on suit la frontière sud-est de  $\lambda$  du sud ouest au nord est, en enregistrant un 0 pour chaque pas montant rencontré, et un 1 pour chaque pas à droite. Ceci donne une suite de 0 et de 1, et toute suite obtenue à partir de cette dernière en ajoutant un nombre quelconque de 0 au début et un nombre quelconque de 1 à la fin convient. On va en sélectionner une en particulier, le  *$d$ -code* de  $\lambda$  (cf [62, Ex. 7.59]). Ici,  $d$  est un entier positif tel que  $\lambda$  est contenu dans le diagramme de Ferrers carré  $(d^d)$ ; une partition n'a donc un  $d$ -code que si elle possède moins de  $d$  parts et que toutes ses parts sont plus petites que  $d$ .

On plonge  $\lambda$  dans  $(d^d)$  en faisant coïncider leurs sommets en haut à gauche, puis on efface les côtés inférieur et droit du carré  $(d^d)$  (la Figure 4.8 correspond au cas  $d = 8$  et  $\lambda = (7, 5, 2, 2, 1, 1)$ ). On obtient alors une suite de 0 et de 1 en suivant le frontière sud est comme décrit ci-dessus ; par définition, il s'agit du  $d$ -code de  $\lambda$ . Le  $d$ -code a clairement  $d$  occurrences de 0 et  $d$  occurrences de 1. Ainsi, le 8-code de  $(7, 5, 2, 2, 1, 1)$  est 0010010011101101.

**Remarque:** Ce  $d$ -code est simplement une version tronquée de la suite  $\delta(\lambda)$  vu dans le chapitre de préliminaires, après avoir échangé 1 et 0.

### 4.2.3 Un résultat énumératif de pavage par des losanges

On va donner un résultat général d'énumération de pavages par des losanges, pour certaines sous-régions du réseau triangulaire régulier dans le plan. Tous les losanges ont côté 1 et des angles de  $60^\circ$  et  $120^\circ$ . Ce résultat a été utilisé dans l'article [12] démontrant d'autres conjectures de Zuber [74].

Soit  $\lambda$  un diagramme de Ferrers contenu dans le carré  $(d^d)$ , et  $h$  un entier positif ou nul. On introduit alors la région  $R(\lambda, d, h)$  sur le réseau triangulaire, qui est un pentagone avec quelques entailles sur son côté nord. Plus précisément (voir la Figure 4.9 où la région  $R(\lambda, 8, 3)$  avec  $\lambda$  le diagramme de Ferrers  $(7, 5, 2, 2, 1, 1)$  de la Figure 4.8), la région  $R(\lambda, d, h)$  est le pentagone pour lequel la base et le côté sud ouest ont longueur  $d$ , le côté nord ouest a longueur  $h$ , le côté nord a longueur

$2d$  avec des encoches explicitées ci-après, et le côté droit a longueur  $d + h$ . Pour déterminer les encoches du côté nord, on lit le  $d$ -code de  $\lambda$ , et, en parcourant le côté nord du pentagone, on forme une encoche (i.e. on ôte un triangle de la région) dès que l'on lit un 0, alors qu'on laisse la région intacte lorsque l'on lit un 1.

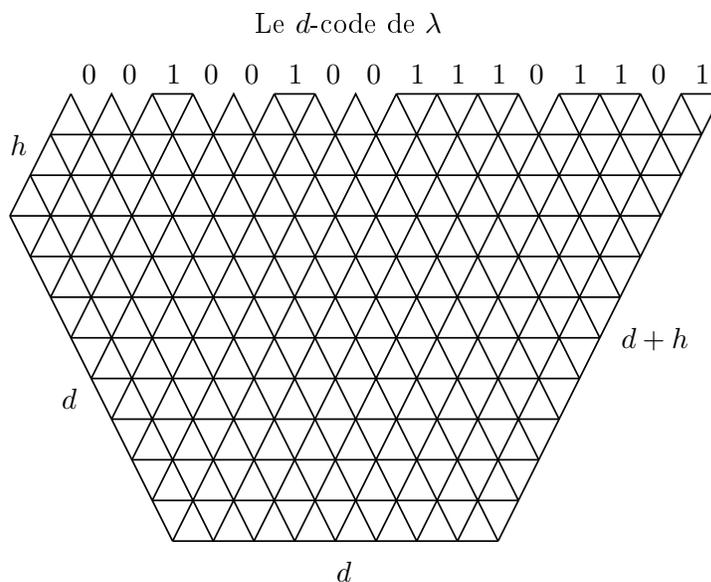


FIG. 4.9: La région  $R(\lambda, d, h)$

On peut maintenant énoncer le résultat pour les pavages de la région  $R(\lambda, d, h)$ . On rappelle la notation  $SSYT(\lambda, N)$ , qui désigne le nombre de tableaux semi-standard de forme  $\lambda$  dont les entrées sont au plus  $N$ . On se référera au chapitre 2 de préliminaires pour les définitions nécessaires, et à [62, Theorem 15.3] pour une preuve de la *hook content formula* rappelée ci-après ;

**Théorème 4.3.** *Étant donné un diagramme de Ferrers  $\lambda$  contenu dans le carré  $(d^d)$  et un entier positif  $h$ , le nombre de pavages par des losanges de  $R(\lambda, d, h)$  est donné par  $SSYT(\lambda, d + h)$ , c'est-à-dire*

$$SSYT(\lambda, N) = \prod_{u \in \lambda} \frac{c(u) + N}{h(u)}, \quad (4.2.1)$$

avec  $c(u)$  et  $h(u)$  le contenu et la longueur de l'équerre de  $u$ , respectivement, tels que défini dans le chapitre 2.

**Preuve du Théorème 4.3 :** On observe d'abord que certains losanges sont fixés dans la région  $R(\lambda, d, h)$  : lorsque plusieurs encoches sont consécutives, une petite région triangulaire est nécessairement remplie de losanges verticaux ; et lorsqu'on n'a pas d'encoches tout en haut à droite, alors tout un parallélogramme est nécessairement pavé de losanges avec une pointe nord est.

La région restante après ces simplifications opérées sur la Figure 4.9 est celle de la Figure 4.10. Or le Théorème 2.6 de [12] donne justement une bijection entre

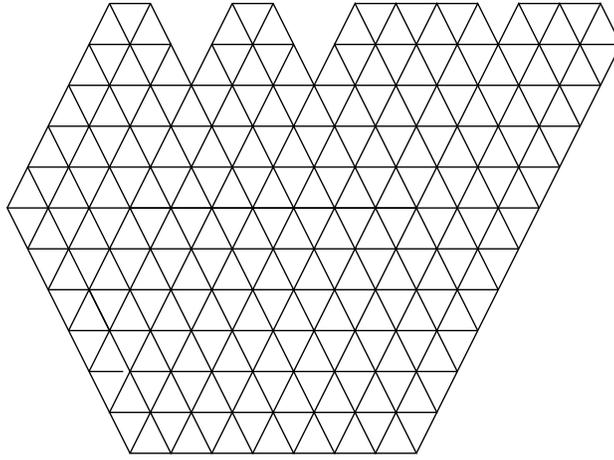


FIG. 4.10: La région réduite

les pavages d'une telle région et les tableaux semi-standard de forme  $\lambda$  dont les entrées sont au plus  $d + h$ , ce qui prouve le Théorème. □

### 4.3 Arêtes forcées

Dans cette section on va réaliser le premier pas en vue de la démonstration de la Conjecture 4.1. Soit  $X$  un couplage non croisé fixé, possédant  $d$  arches, et  $X \cup m$  le couplage obtenu en ajoutant  $m$  arches emboîtées à  $X$ , tel que défini lors de l'énoncé de la conjecture. Grâce au théorème de Wieland 4.2, on peut placer  $X \cup m$  arbitrairement autour de la grille  $Q_n = Q_{d+m}$  sans changer le nombre de configurations FPL correspondant. L'idée va être de placer  $X \cup m$  de sorte que grâce au Lemme 4.4 ci-dessous, on obtienne un grand nombre d'arêtes forcées.

Pour être plus précis, on place  $X \cup m$  de façon à ce que les arches de  $X$  se trouvent à l'extrême droite du côté supérieur de  $Q_n$ ; on les place en fait sur les arêtes externes  $n - 4d + 2, n - 4d + 4, \dots, n - 2, n$ . En d'autres termes, on positionne le centre  $M$  des  $m$  arches emboîtées sur l'arête externe  $-n - 2d + 1$ . On se référera à la Figure 4.11 pour une illustration schématique, et à la Figure 4.13 pour une plus fine (les arêtes dessinées dans cette dernière figure seront définies plus loin, et doivent être ignorées pour l'instant). Pour que le couplage  $X$  puisse être placé en totalité sur le côté supérieur, *on doit supposer que  $m \geq 3d$* .

Le lemme qui suit permet de repérer des arêtes qui sont occupées par *chaque* configuration FPL correspondant à un couplage donné. C'est une conséquence de l'usage répété d'un lemme dû à de Gier (cf. [20][Lemma 8] et [12, Lemmas 2.2 and 2.3]). Par la suite, on parlera d'*arêtes forcées* pour désigner les arêtes qui doivent appartenir à toutes les configurations considérées.

**Lemme 4.4.** *Soit  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = \beta$  une suite d'arêtes externes, avec  $\alpha_i = a + 2i \pmod{4n}$ , pour un certain  $a$ ; on prend donc une arête externe sur 2 entre  $\alpha$  et  $\beta$  sur le bord de  $Q_n$  dans le sens des aiguilles d'une montre. On suppose de plus que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

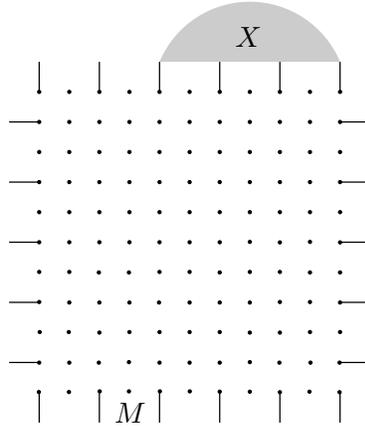


FIG. 4.11: Le positionnement du couplage autour de  $Q_n$ .

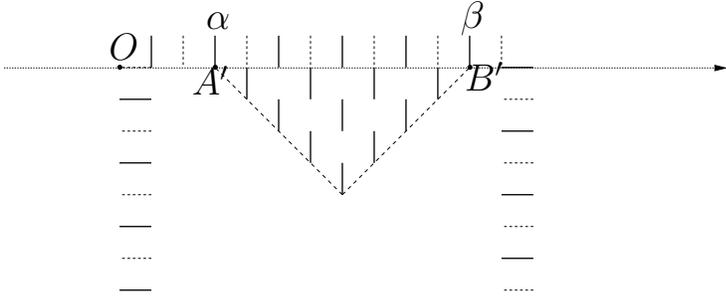
1.  $\alpha$  et  $\beta$  sont sur le bord supérieur de  $Q_n$ , i.e.  $1 \leq \alpha < \beta \leq n$  ;
2.  $\alpha$  est sur le bord supérieur et  $\beta$  est sur le bord droit de  $Q_n$ , i.e.  $1 \leq \alpha \leq n < \beta$  et  $n - \alpha > \beta - (n + 1)$  ;
3.  $\alpha$  est sur le bord gauche et  $\beta$  est sur le bord droit de  $Q_n$ , i.e.  $n < \beta \leq 2n$  et  $-n < \alpha \leq 0$ .

Dans les configurations pour lesquelles les arêtes externes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  appartiennent à des chemins différents, la région des arêtes forcées est (essentiellement) triangulaire (cf. la Figure 4.12 pour des illustrations de la région et des arêtes forcées à l'intérieur de celle-ci ; "essentiellement" se réfère au fait que dans les Cas (2) and (3) certaines parties du triangle sont coupées). Plus précisément, si l'on place l'origine  $O$  du repère une unité à gauche du coin supérieur gauche de  $Q_n$ , les coordonnées du triangle sont déterminées comme suit : soit  $A'$  et  $B'$  les points de l'axe des abscisses de coordonnées  $(\alpha, 0)$  et  $(\beta, 0)$ , respectivement, alors la région des arêtes forcées est l'intersection de la grille  $Q_n$  et du triangle rectangle isocèle ayant  $[A'B']$  comme hypoténuse.

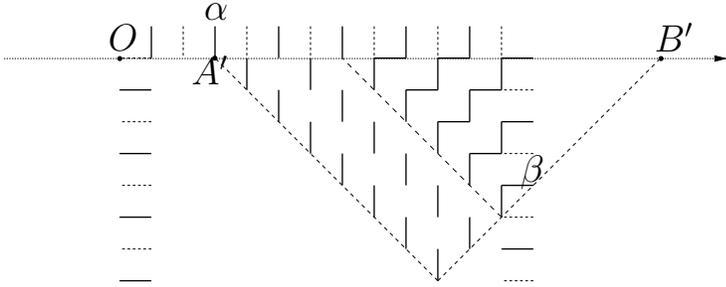
Dans les Cas (2) et (3), les configurations sont complètement déterminées comme des chemins en escalier dans les régions de  $Q_n$  qui sont les réflexions des parties du triangle qui ont été coupées (cf. une nouvelle fois la Figure 4.12).

Utilisons maintenant ce lemme pour déterminer les arêtes forcées des configurations FPL dans le cas du couplage  $X \cup m$  de la conjecture 4.1. Pour plus de clarté (le lecteur est avisé de regarder la Figure 4.13), on note  $A, B, C, D, E$  les sommets du bord de la grille associés aux arêtes externes  $n - 4d + 3, n - 1, n + 2d, -n + 2d, -n + 4d - 2$ , respectivement ;  $J$  le point d'intersection de la droite  $(DM)$  et de la demi-droite partant diagonalement de  $B$  ;  $K$ , le point d'intersection de cette dernière demi-droite et de la demi-droite partant diagonalement de  $A$  ;  $L$ , le point d'intersection de cette dernière demi-droite et de la droite  $(CM)$ . On peut maintenant énoncer le résultat de l'application du Lemme 4.4 dans le cas qui nous intéresse :

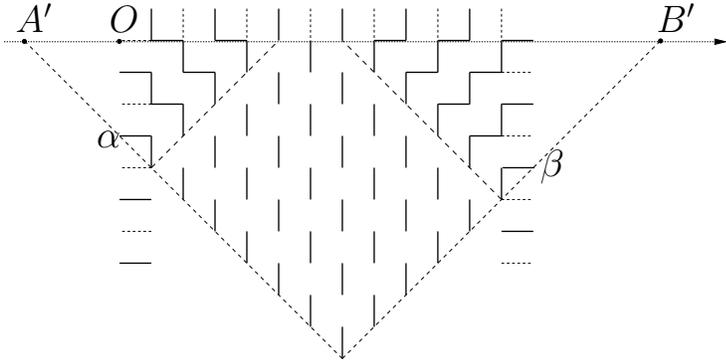
**Lemme 4.5.** *La région des arêtes forcées des configurations FPL correspondant au couplage de la Conjecture 4.1 contient toutes les arêtes de la Figure 4.13, à savoir :*



(1)



(2)



(3)

FIG. 4.12: Les cas possibles pour les arêtes forcées du Lemme 4.4.

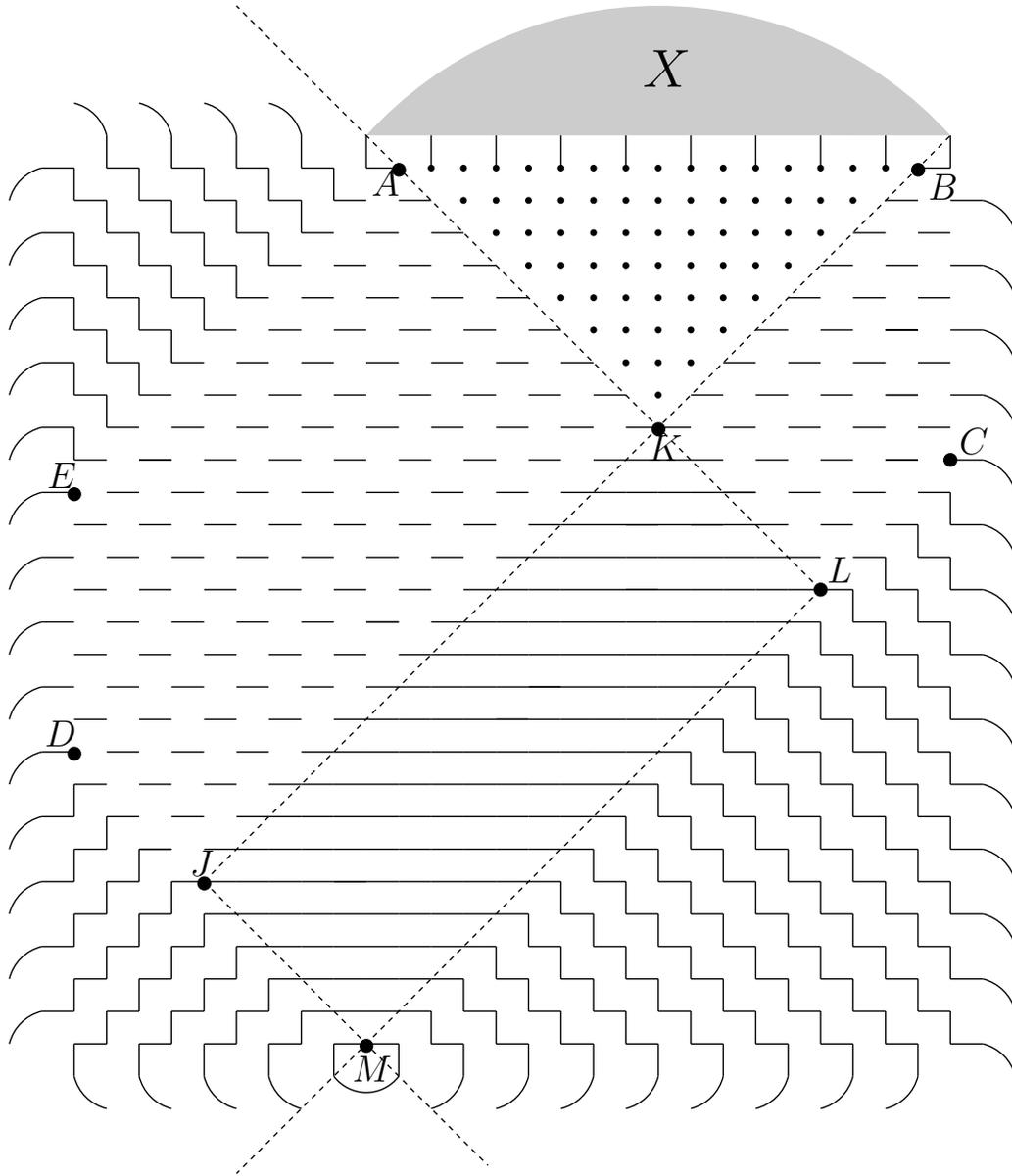


FIG. 4.13: Les arêtes forcées pour le couplage  $X \cup m$ .

1. toutes les arêtes horizontales de la région rectangulaire  $JKLM$ ,
2. une arête horizontale sur deux dans la région pentagonale  $AKJDE$ ,
3. une arête horizontale sur deux dans la région  $BCLK$ ,
4. les lignes en escalier dans les régions triangulaires situées au-dessus de la droite  $(EA)$ , ainsi que sous les droites  $(DM)$  et  $(MC)$  respectivement.

*Preuve:* Le résultat découle de l'application du Lemme 4.4 aux arêtes externes correspondant aux  $m$  arches emboîtées à gauche du centre  $M$  plus l'arête à l'extrême gauche des arches de  $X$ , d'une part ; et aux arêtes externes correspondant aux  $m$  arches emboîtées à droite du centre  $M$  plus l'arête à l'extrême droite des arches de  $X$ , d'autre part.

En détail, on applique le Lemme 4.4 aux ensembles

$$\{\alpha \text{ arête externe avec } -n - 2d + 2 \leq \alpha \leq n - 4d + 2 \text{ ou } \alpha \geq 3n - 2d\}$$

et

$$\{\alpha \text{ arête externe avec } \alpha \leq -n - 2d \text{ ou } \alpha \geq n\}.$$

Les triangles (coupés) formant ces deux régions sont représentés par des lignes en pointillé sur la Figure 4.13. On remarque que les deux triangles d'arêtes forcées se superposent dans la région rectangulaire  $JKLM$ , dans laquelle la configuration est ainsi complètement déterminée comme étant constituée de lignes horizontales.  $\square$

### La formule de Lindström–Gessel–Viennot

Il est connu que les pavages par des losanges sont en général en bijection avec des familles de chemins sans intersection. On utilisera cette bijection dans la Section 4.5. Le résultat fondamental sur les chemins sans intersection est la formule déterminantale de Lindström–Gessel–Viennot [35].

On va rappeler cette formule, ou plus exactement une spécialisation de cette formule qui nous suffira ici. Considérons des chemins sur le réseau entier  $\mathbb{Z}^2$  consistant de pas unités Est  $(1, 0)$  et Nord  $(0, 1)$ . Étant donnés deux points  $A$  et  $E$  de  $\mathbb{Z}^2$ , on note  $\mathcal{P}(A \rightarrow E)$  le nombre de chemins partant de  $A$  et terminant en  $E$ . On dit qu'une famille de chemins est *sans intersection* si deux chemins distincts n'ont aucun sommet commun.

On peut maintenant énoncer le résultat principal sur les familles de chemins sans intersection :

**Lemme 4.6.** *Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n, E_1, E_2, \dots, E_n$  des points du réseau  $\mathbb{Z}^2$ , tels que pour tous  $i < j$  le point  $A_i$  est au sud ouest (au sens large) du point  $A_j$ , et le point  $E_i$  est au sud ouest du point  $E_j$ . Alors le nombre de familles de chemins  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  sans intersection,  $P_i$  allant de  $A_i$  à  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , est donné par*

$$\det(\mathcal{P}(A_i \rightarrow E_j))_{1 \leq i, j \leq n}. \tag{4.3.1}$$

## 4.4 Preuve de la conjecture 4.1 pour $m$ suffisamment grand

Soit  $X$  un couplage non croisé composé de  $d$  arches, et  $m$  un entier positif tel que  $m \geq 3d$ ; on définit le couplage  $X \cup m$  en ajoutant  $m$  arches à  $X$ , comme

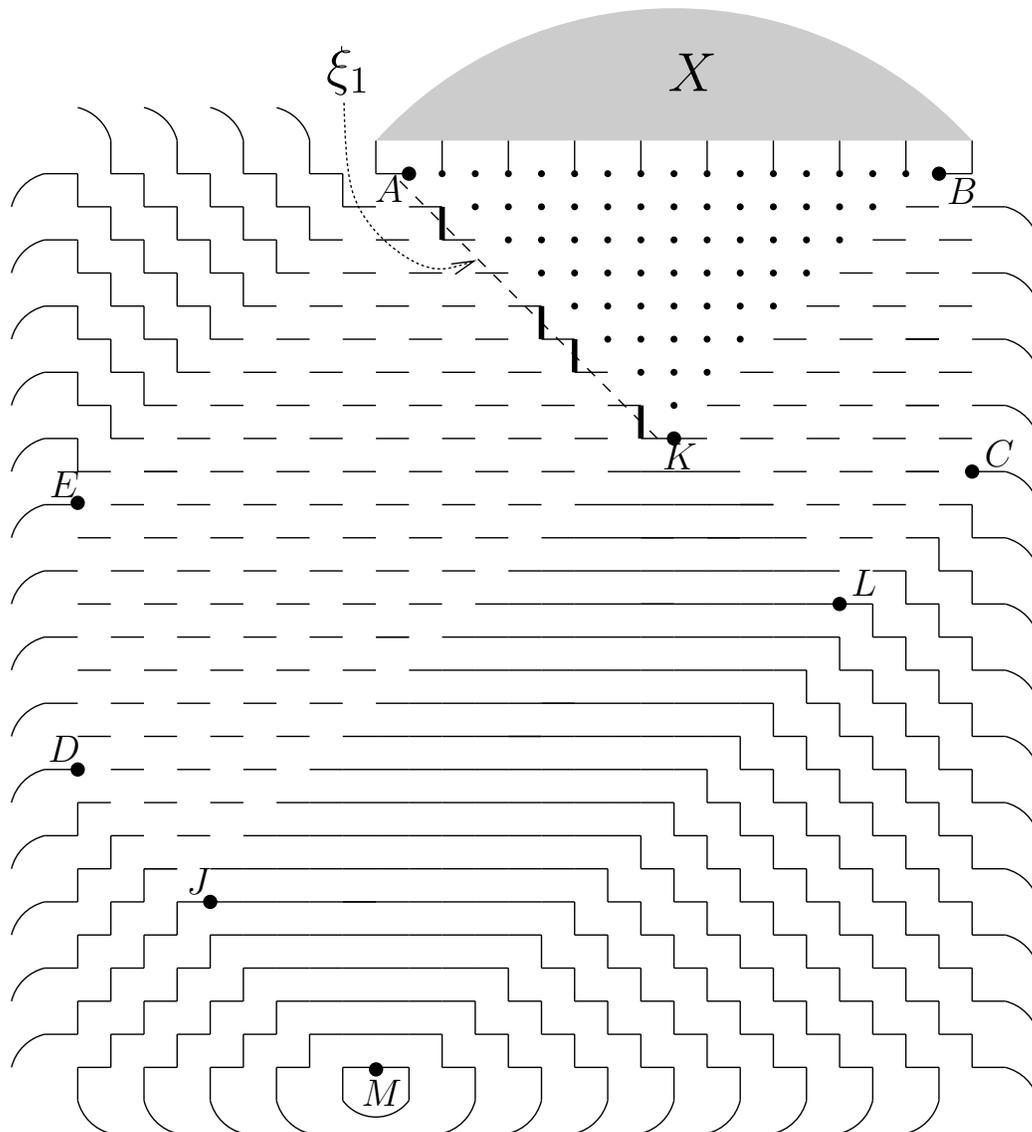


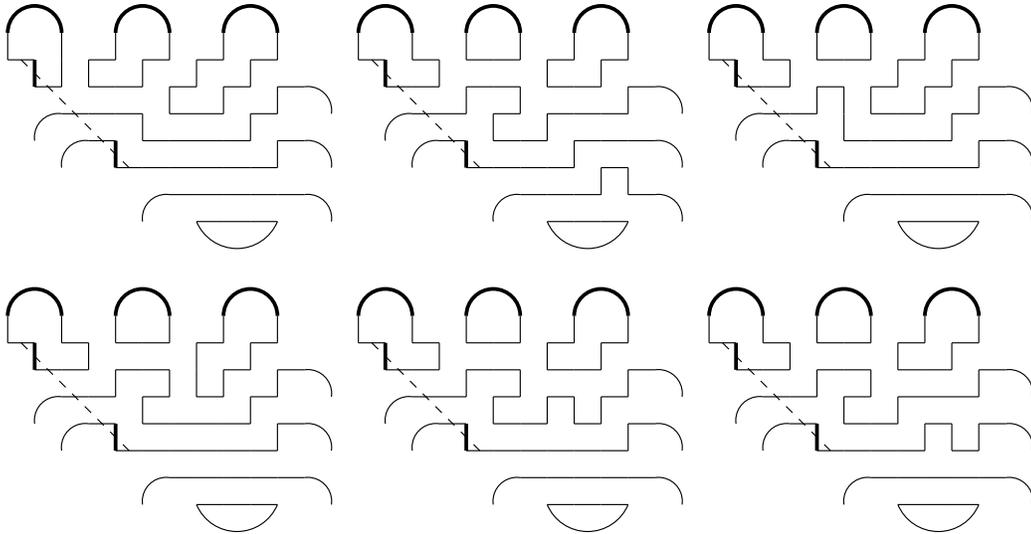
FIG. 4.14: Division du problème en deux sous-problèmes.

dans la Conjecture 4.1. Le but de cette section est de donner une formule explicite pour  $A_X(m)$ , le nombre de configurations FPL correspondant au couplage  $X \cup m$ , formule qui nous permettra de prouver la Conjecture 4.1 pour  $m \geq 3d$ . On place le couplage sur la grille  $Q_n = Q_{d+m}$  comme dans la section précédente, voir Figure 4.13 ; on définit de même les points  $A, B, C, D, E, J, K, L, M$ .

Soit  $\xi_1$  le segment défini comme le translaté de  $[AK]$  d'une demie unité vers la gauche (cf. Figure 4.14). Il y a exactement  $2d - 2$  arêtes verticales de la grille qui coupent  $\xi_1$  : on les note  $e_1, e_2, \dots, e_{2d-2}$ , en les parcourant dans la direction sud est.

**Lemme 4.7.** *Dans chaque configuration correspondant à  $X \cup m$ , il y a exactement  $d - 1$  arêtes occupées parmi  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2d-2}\}$*

**Preuve :** Dans la région rectangulaire  $JKLM$ , il y a  $m - d + 1$  lignes horizontales

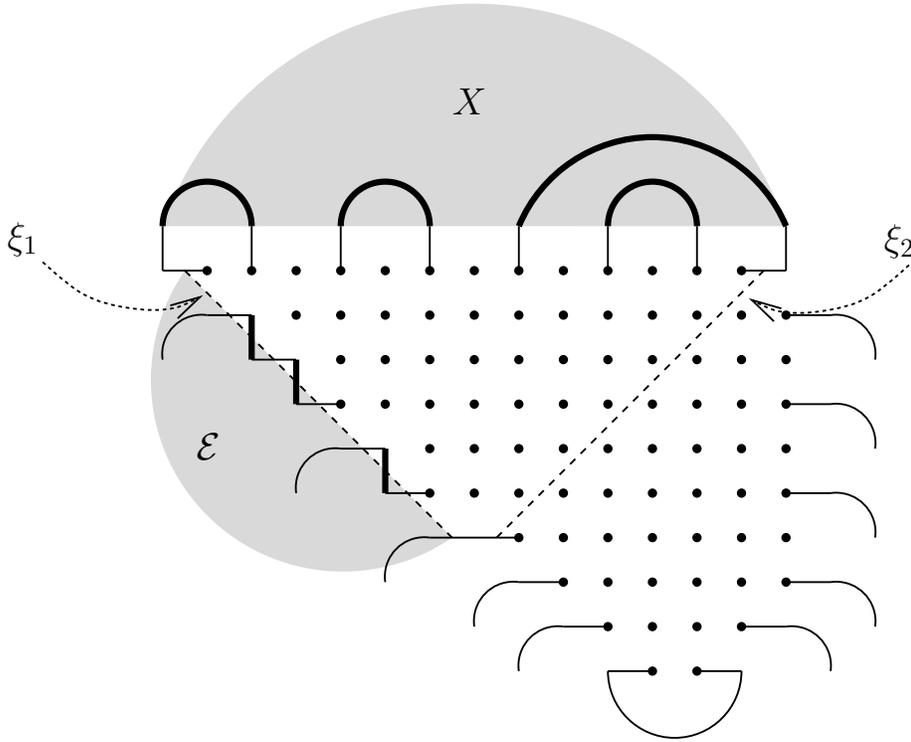

 FIG. 4.15: Configurations comptées par  $a_X(\mathcal{E})$ .

strictement en dessous de  $K$ . Chacune de ces lignes appartient à l'un des  $m + 1$  chemins issus des arêtes externes  $\{-n - 2d + 2, -n - 2d + 4, \dots, n - 4d, n - 4d + 2\}$  : ce sont les arêtes externes situées entre  $M$  et  $A$  lors d'un parcours du bord de la grille dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi on doit avoir  $d$  chemins qui croisent le segment  $\xi_1$ , ce qui implique qu'exactly  $d - 1$  arêtes verticales parmi  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2d-2}\}$  sont occupées par chaque configuration FPL correspondant à  $X \cup m$ .  $\square$

On encode un choix de  $d - 1$  arêtes dans  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2d-2}\}$  par l'ensemble  $\mathcal{E}$  de cardinal  $d - 1$  constitué des indices de ces arêtes entre 1 et  $2d - 2$ . Le choix d'un tel ensemble  $\mathcal{E} = \{i_1, i_2, \dots, i_{d-1}\}$  est équivalent au choix d'un diagramme de Ferrers  $\lambda(\mathcal{E}) \subset ((d - 1)^{d-1})$  via la construction suivante : on définit la suite  $c_{\mathcal{E}} := c_1 c_2 \dots c_{2d-2}$  comme la suite binaire déterminée par le fait que  $c_i = 0$  si et seulement si  $i \in \mathcal{E}$ . La suite  $c_{\mathcal{E}}$  obtenue ainsi détermine alors un diagramme de Ferrers  $\lambda(\mathcal{E})$  par la procédure décrite dans le paragraphe 4.2.2. Dans l'exemple de la Figure 4.14, on a  $\mathcal{E} = \{2, 5, 6, 8\}$  et donc  $\lambda(\mathcal{E}) = (4, 3, 3, 1)$ .

Il est clair que dès que l'on a fixé les arêtes verticales coupant  $\xi_1$ , une configuration correspondant au couplage  $X \cup m$  est divisée en deux régions que l'on peut choisir indépendamment : à savoir, la région  $ABCLK$  au dessus de  $\xi_1$ , et la région  $AKJDE$  à gauche de  $\xi$ . En particulier, le nombre de configurations FPL correspondant à  $X \cup m$  pour lesquelles un choix de  $\mathcal{E}$  est fait, est donné par le produit du nombre de configurations FPL dans  $AKJDE$  par le nombre de configurations FPL dans  $ABCLK$  qui respectent le couplage  $X$ .

La région  $ABCLK$  ne dépend pas de  $m$  ; on note  $a_X(\mathcal{E})$  le nombre de configurations dans cette région qui respectent  $X$  et telles que le choix d'arêtes coupant  $\xi_1$  est encodé par  $\mathcal{E}$ . Par exemple, si  $X$  est le couplage  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ , et que  $\mathcal{E}$  est l'ensemble  $\{1, 4\}$ , alors on a  $a_X(\mathcal{E}) = 6$ . Les six configurations correspondantes constituent la Figure 4.15, où les arches correspondant à  $X$  et les arêtes correspondant à  $\xi_1$  sont marquées en gras. On a  $\lambda(X) = (2, 1)$  et  $\lambda(\mathcal{E}) = (1, 1)$ . En particulier,  $\lambda(\mathcal{E}) \subseteq \lambda(X)$  : le lemme suivant montre que cela est un fait général :

FIG. 4.16: Les nombres  $a_X(\mathcal{E})$ .

**Lemme 4.8.** Soit  $X$  un couplage non croisé avec  $d$  arches, et  $\mathcal{E}$  un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, 2d - 2\}$  de cardinalité  $d - 1$ .

1. Si  $\lambda(\mathcal{E}) \not\subseteq \lambda(X)$ , alors  $a_X(\mathcal{E}) = 0$ .
2. Si  $\lambda(\mathcal{E}) = \lambda(X)$ , alors  $a_X(\mathcal{E}) = 1$ .

**Preuve :** Cela découle immédiatement du Corollaire 4.14. □

On est maintenant en mesure de prouver un premier résultat important :

**Théorème 4.9.** Soit  $X$  un couplage non croisé avec  $d$  arches, et  $m \geq 3d$ . Alors

$$A_X(m) = SSYT(\lambda(X), m - 2d + 1) + \sum_{\mathcal{E}: \lambda(\mathcal{E}) \subsetneq \lambda(X)} a_X(\mathcal{E}) \cdot SSYT(\lambda(\mathcal{E}), m - 2d + 1). \quad (4.4.1)$$

**Preuve :**

Fixons  $d - 1$  arêtes de  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2d-2}\}$ , encodées par l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Par le Lemme 4.8, il suffit de montrer que le nombre de configurations à gauche de  $\xi_1$ , dont l'ensemble d'arêtes verticales occupées sur  $\xi_1$  est codé par  $\mathcal{E}$ , est donné par  $SSYT(\lambda(\mathcal{E}), m - 2d + 1)$ . Pour cela, on va transformer le problème d'énumération des configurations en problème d'énumération de pavages par des losanges. Cette idée est due à de Gier [20], et est utilisée notamment dans les articles [12, 22].

On dit qu'un sommet de la grille est *libre* s'il appartient à exactement une arête forcée. On dessine alors un triangle autour de chaque sommet libre de  $AKJDE$  de manière à ce que deux triangles aient un côté commun exactement quand les

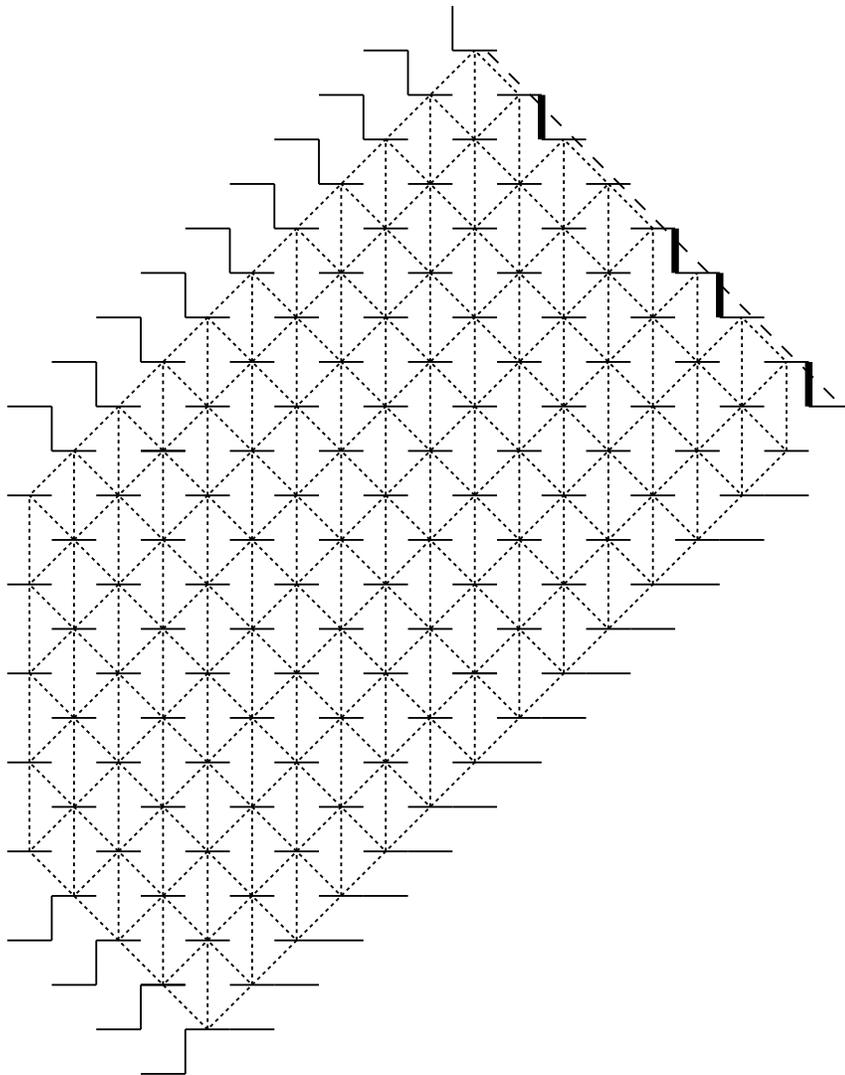


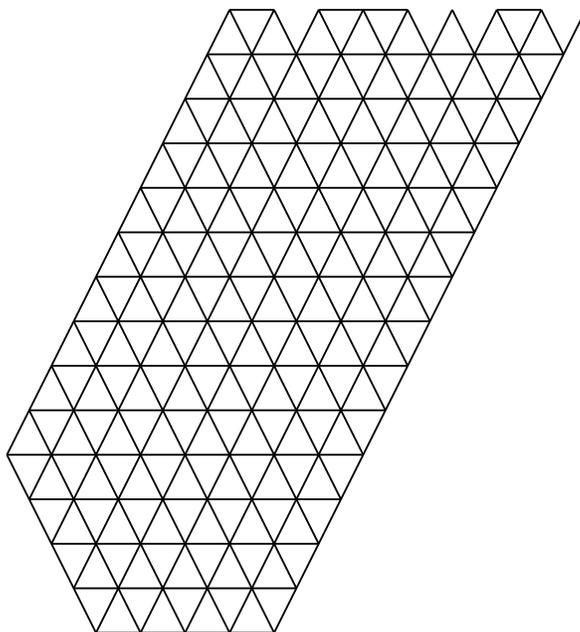
FIG. 4.17: Le dessin des triangles.

sommets sont voisins sur la grille. Pour l'exemple de la Figure 4.14, cela fournit la Figure 4.17.

On déforme ensuite l'ensemble de triangles obtenu de sorte que tous les triangles soient équilatéraux ; on obtient alors la région  $R(\lambda(\mathcal{E}), d - 1, m - 3d + 2)$  telle que définie dans la Section 4.2.3, voir Figure 4.18. Les arêtes verticales de  $\mathcal{E}$  se traduisent en encoches dans la région.

Il est maintenant facile de voir que les configurations FPL de la région  $AKJDE$  sont en bijection avec les pavages de la région  $R(\lambda(\mathcal{E}), d - 1, m - 3d + 2)$ . De fait, pour passer d'un pavage par des losanges à la configuration FPL correspondante, il suffit de connecter par une arête les sommets libres associés aux triangles qui font partie d'un même losange. Le résultat découle alors immédiatement du Théorème 4.3.  $\square$

La Conjecture 4.1 dans le cas  $m \geq 3d$ , est maintenant un simple corollaire du théorème ci-dessus.

FIG. 4.18: La région  $R(\lambda(\mathcal{E}), d - 1, m + 3d - 2)$ 

**Preuve de la Conjecture 4.1 pour  $m \geq 3d$  :** Le caractère polynomial en  $m$  de  $A_X(m)$  est évident au vu des équations (4.4.1) et de (4.2.1). L'assertion au sujet de l'intégralité des coefficients du polynôme  $P_X(m) = m!A_X(m)$  découle du fait que le produit des équerres  $\prod_{u \in \lambda} h_u$  divise  $|\lambda|!$  pour toute partition  $\lambda$ , comme le montre la formule des équerres 2.2.1. Enfin, pour voir que le coefficient dominant de  $P_X(m)$  est  $\dim(\lambda(X))$ , on observe que le terme dominant du membre de droite dans l'équation (4.4.1) provient de  $SSYT(\lambda(X), m - 2d + 1)$ . On conclut alors en utilisant les équations (4.2.1) et (2.2.1).  $\square$

## 4.5 Preuve de la conjecture 4.1 pour $m$ petit

Pour prouver la conjecture pour  $m < 3d$ , on va choisir un placement différent du couplage  $X \cup m$  sur  $Q_n$ ; on positionne le couplage de sorte que  $X$  se trouve centré au coin supérieur droit de la grille. Plus précisément, les arches de  $X$  occupent les arêtes externes  $n - 2d + 2, n - 2d + 4, \dots, n + 2d$ , cf. la Figure 4.19 pour un exemple avec  $n = 28$ ,  $d = 7$ , et  $m = 21$ . La figure montre un exemple avec  $m \geq 2d$ , et c'est ce que nous supposerons dorénavant; cela peut paraître surprenant étant donné que nous cherchons à prouver quelque chose pour tout  $m$ , mais c'est bien ce dont nous aurons besoin, et nous ne nous débarrasserons de cette hypothèse qu'à la toute fin.

On applique alors le Lemme 4.4 pour déterminer les arêtes forcées pour ce nouveau positionnement : on trouve alors des régions en escalier au niveau des coins supérieur gauche et inférieur droit de la grille, alors que dans une région pentagonale orientée dans une direction sud ouest chaque sommet appartient à exactement une arête forcée (ce qu'on a appelé des sommets libres). Il y a plus précisément deux parties dans cette dernière région : dans la partie supérieure

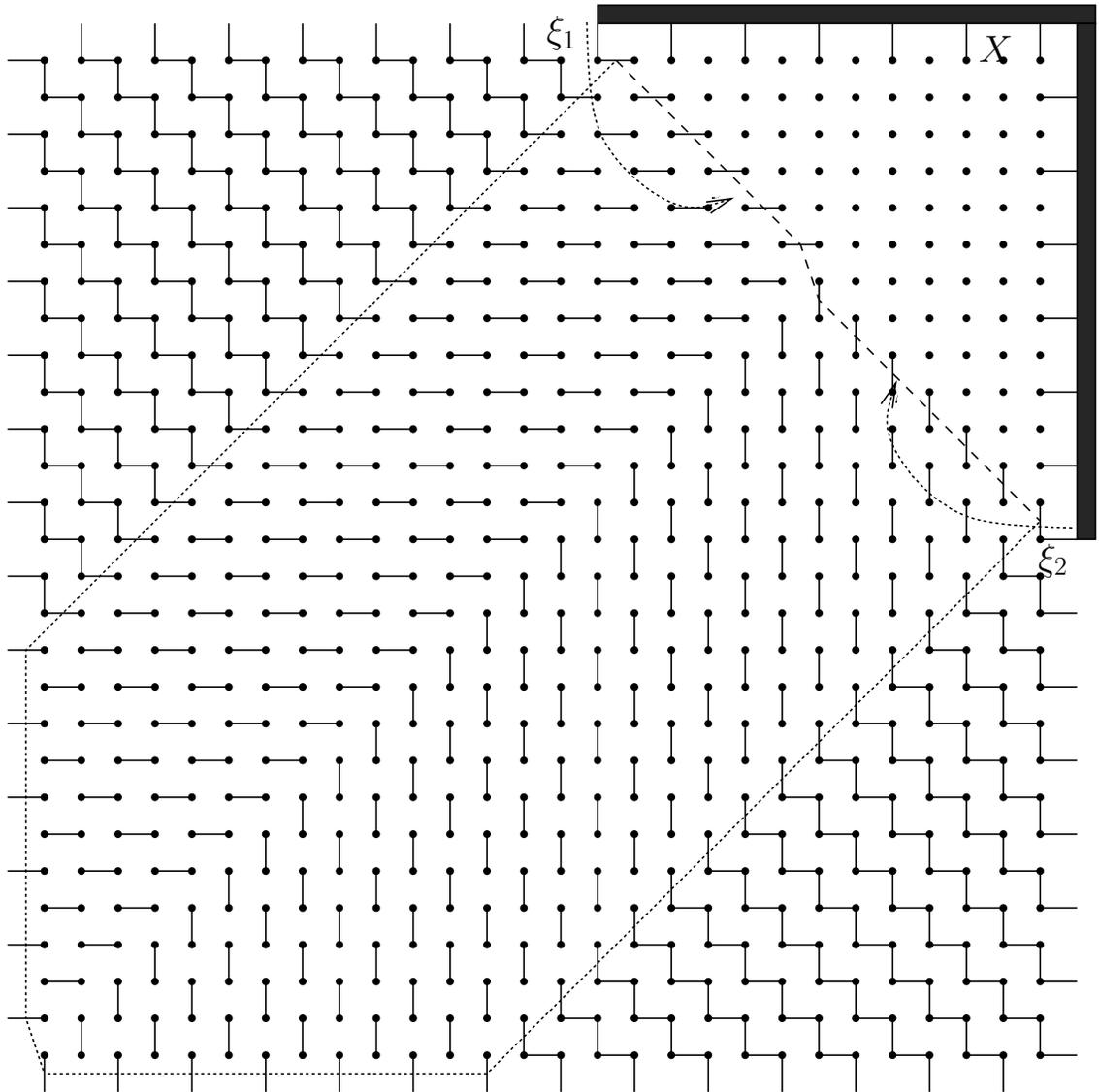


FIG. 4.19: Un placement différent des arches autour de la grille.

gauche une arête horizontale sur deux est occupée, et dans la partie inférieure droite, une arête verticale sur deux est occupée.

On procède alors de manière semblable à la preuve du Théorème 4.9. On distingue d'abord deux segments  $\xi_1$  et  $\xi_2$  (voir Figure 4.19), et l'on note  $\{e_1, e_2, \dots, e_{d-2}\}$  l'ensemble des arêtes verticales qui intersectent  $\xi_1$ , et  $\{f_1, f_2, \dots, f_{d-1}\}$  l'ensemble des arêtes horizontales qui intersectent  $\xi_2$ .

Considérons la région triangulaire en haut à droite, limitée au sud ouest par  $\xi_1$  et  $\xi_2$  : comme chaque chemin qui y entre par  $\xi_1$  doit nécessairement la quitter par  $\xi_2$ , chaque configuration FPL associée à  $X \cup m$  qui occupe un sous ensemble de  $\{e_1, e_2, \dots, e_{d-2}\}$  encodé par  $\mathcal{E}$  et un sous ensemble de  $\{f_1, f_2, \dots, f_{d-1}\}$  encodé par  $\mathcal{F}$  doit vérifier  $|\mathcal{E}| = |\mathcal{F}| - 1$ . Une fois qu'un tel choix de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  est fait, le nombre de configurations FPL qui possèdent exactement les arêtes verticales et horizontales encodées par  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  est le produit du nombre de configurations possibles dans

la région pentagonale par le nombre de configurations possibles dans la région triangulaire supérieure droite.

On note le premier de ces nombres  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$ , et le second  $c(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ . On a alors l'écriture de  $A_X(m)$  sous la forme

$$A_X(m) = \sum_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} c(\mathcal{E}, \mathcal{F}) N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d), \quad (4.5.1)$$

où la somme porte sur tous les sous ensembles  $\mathcal{E} \subseteq \{1, 2, \dots, d-2\}$  et  $\mathcal{F} \subseteq \{1, 2, \dots, d-1\}$  tels que  $|\mathcal{E}| = |\mathcal{F}| - 1$ . Le lemme suivant indique les propriétés des nombres  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  qui nous serviront à démontrer la Conjecture 4.1 pour  $m < 3d$ .

**Lemme 4.10.** *Pour  $m \geq 2d$ , on a*

1. *Le nombre  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  est un polynôme en  $m$ .*
2. *En tant que polynôme en  $m$ ,  $m$  divise  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  pour tous  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ , sauf lorsque  $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d-2\}$  et  $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, d-1\}$ , auquel cas  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d) = 1$ .*

**Preuve :** On veut trouver une expression de  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  sous la forme d'un déterminant. Pour cela on commence comme dans la preuve du Théorème 4.9 par remplacer les configurations FPL possibles du pentagone par les pavages possibles d'une certaine sous région du réseau triangulaire. Comme dans cette preuve, on substitue un triangle à chaque sommet libre de sorte que deux triangles partagent un côté précisément quand les sommets sont voisins sur la grille ; on redresse ensuite la région obtenue pour en faire une sous-région du réseau triangulaire. La région obtenue est illustrée Figure 4.20. Il s'agit en général d'un hexagone dont les côtés inférieur et inférieur gauche ont longueur  $d-1$ , le côté supérieur gauche a longueur  $m-d+2$ , le côté supérieur a longueur  $d-2$ , le côté supérieur droit a longueur  $d$ , et enfin le côté inférieur droit a longueur  $m-d+1$ . Cependant, en fonction des choix de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ , il existe des encoches sur les côtés supérieur et supérieur droit.

Dans la Figure 4.20, les positions possibles pour les encoches sont notées  $\{e_1, e_2, \dots, e_{d-2}\}$ , et  $\{f_1, f_2, \dots, f_{d-1}\}$ . La position  $f_d$  ne peut pas être encochée, et le nombre d'encoches dans  $\{f_1, f_2, \dots, f_{d-1}\}$  doit être supérieur d'une unité au nombre d'encoches parmi  $\{e_1, e_2, \dots, e_{d-2}\}$ . Un exemple d'encoches possibles pour  $d=5$ ,  $m=7$ ,  $\mathcal{E} = \{2\}$  et  $\mathcal{F} = \{1, 4\}$  est illustré sur la gauche de la Figure 4.21.

Par cette bijection, le nombre  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  est égal au nombre de pavages par des losanges de cette région hexagonale avec des encoches. Pour obtenir une formule pour cette dernière quantité, on applique une bijection standard entre pavages et famille de chemins sans intersection [12] : on place des sommets au milieu de chacune des arêtes du bord inférieur droit de la région, ainsi qu'au milieu de chacune des arêtes sud ouest des encoches du bord supérieur, et au milieu de chacune des arêtes sud ouest du bord supérieur droit (cf. Figure 4.21 où ces points sont en gras.) Les sommets du bord inférieur gauche sont ensuite reliés à ceux des bords supérieur et supérieur droit, en joignant les milieux de 2 arêtes sud ouest opposées dans chacun des losanges du pavage, cf. encore la Figure 4.21. Par leur construction même, deux chemins ne s'intersectent pas. On déforme alors ces chemins de sorte qu'ils soient dessinés sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , et on obtient alors une famille de chemins dont les points de départ sont les sommets  $A_i = (-i, i)$ ,

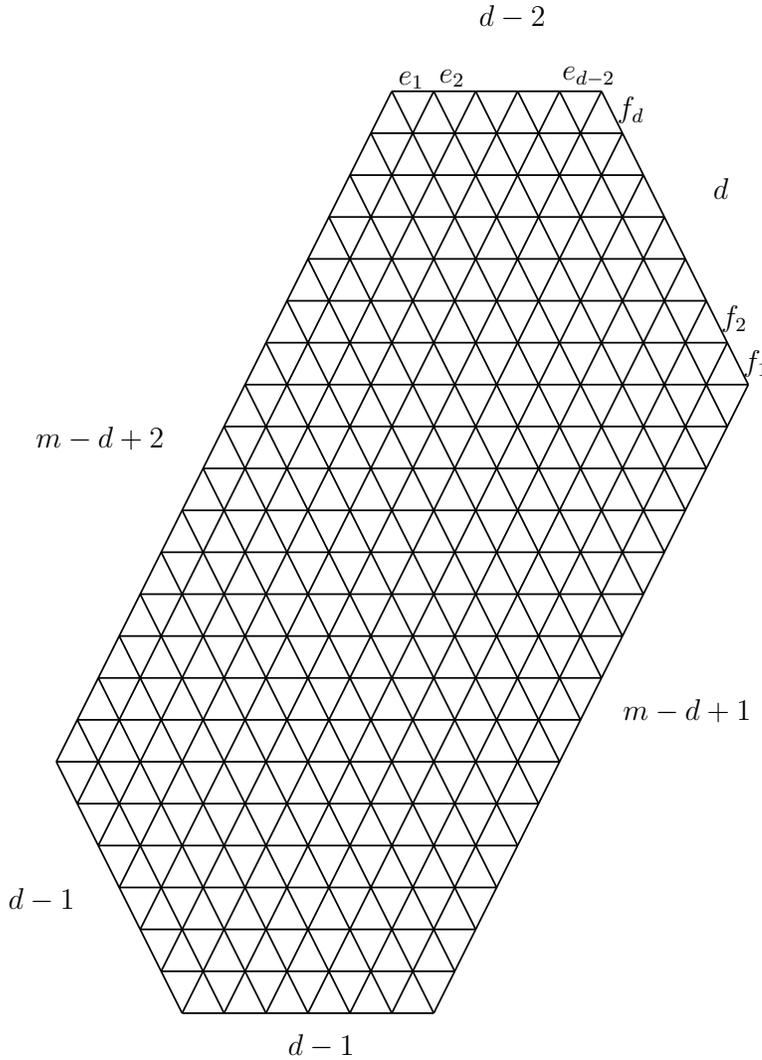


FIG. 4.20: La région à paver.

$i = 1, 2, \dots, d-1$ , et dont les points d'arrivée sont un sous ensemble de cardinal  $d-1$  de  $\{E_1, E_2, \dots, E_{d-2}\} \cup \{F_1, F_2, \dots, F_d\}$ , où  $E_i = (-d+i, m+1)$ ,  $i = 1, \dots, d-2$ , et  $F_j = (d-j-1, m-d+j+1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ . Le point  $F_d$  doit se trouver parmi les points d'arrivée. La famille de chemins obtenue pour le pavage de la Figure 4.21 est dessinée sur la droite de cette même figure.

On peut maintenant appliquer le lemme 4.6 pour obtenir un déterminant pour le nombre de pavage par des losanges. Le nombre de chemins allant du point  $A_i$  au point  $E_j$  est  $\binom{m+1+j-d}{j+i-d}$ , alors que le nombre de chemins allant de  $A_i$  à  $F_j$  est  $\binom{m}{d-j+i-1}$ , ce qui constitue dans chaque cas une entrée dans le déterminant de l'équation (4.3.1). Dans chaque cas, c'est un polynôme en  $m$ , donc le déterminant également, ce qui montre l'assertion (1) du Lemme.

Pour l'assertion (2), on observe que  $m$  divise le second des coefficients binomiaux ci-dessus,  $\binom{m}{d-j+i-1}$ , tant que  $d-j+i-1 > 0$ . C'est le cas sauf si  $i = 1$  et  $j = d$ . En particulier, si l'on choisit  $F_j$  avec  $j < d$  comme point d'arrivée, toutes les entrées de la colonne correspondant à  $F_j$  dans le déterminant (4.3.1)

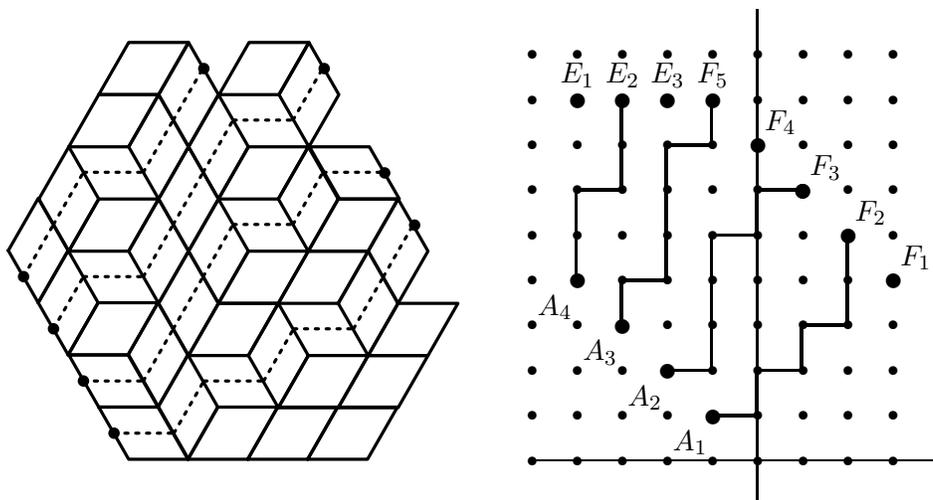


FIG. 4.21: Un pavage par des losanges d'un hexagone avec des encoches, et la famille de chemins sans intersection correspondante.

sont divisibles par  $m$ , et par conséquent le déterminant lui-même. Le seul cas où le déterminant pourrait ne pas être divisible par  $m$  est celui où l'ensemble des points d'arrivée est  $\{E_1, E_2, \dots, E_{d-2}, F_d\}$ , qui correspond à  $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d-2\}$  et  $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, d-1\}$ . Or dans ce cas le déterminant dans (4.3.1) vaut 1 car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire avec des 1s sur son antidiagonale ; pour une preuve alternative, il est également aisé de constater qu'il n'y a qu'un pavage possible avec ces conditions. Cela prouve (2), et termine la preuve du lemme.  $\square$

On est maintenant en mesure de terminer la preuve de la Conjecture 4.1 pour  $m < 3d$ . On souhaite démontrer que le polynôme obtenu en substituant l'expression déterminantale de  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  dans l'équation (4.5.1) donne le nombre de configurations FPL associées à  $X \cup m$  pour tout  $m \geq 0$  ; on a pour l'instant prouvé que c'était le cas pour  $m \geq 2d$  seulement.

Vérifions que c'est bien le cas pour  $m = 0$ . En faisant  $m = 0$  dans le membre de droite (4.5.1) (après avoir opéré la substitution pour  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  que l'on vient d'évoquer), alors par le Lemme 4.10, le seul terme qui subsiste est celui avec  $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d-2\}$  et  $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, d-1\}$  ; et on a de plus  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d) = 1$  dans ce cas. Donc pour  $m = 0$ , l'expression dans le membre de droite de (4.5.1) vaut  $c(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ , le nombre de configurations possibles dans la région triangulaire dans le coin supérieur droit de la grille. La Figure 4.22 montre alors ce qui se passe pour de tels choix de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  : des arêtes forcées se propagent en escalier vers l'intérieur, si bien que seule une région carrée de côté  $d-1$  reste indéterminée. Ainsi, le nombre  $c(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  de configurations possibles dans cette région est effectivement égal au nombre de configurations FPL sur la grille  $Q_d$  associées au couplage  $X$  ; ce qui est précisément ce que nous voulions démontrer.

Il pourrait sembler que l'on a encore à vérifier les valeurs du polynôme pour  $m = 1 \dots 2d-1$ , mais en fait on n'a pas besoin de faire ce genre de manipulations. Soit  $H_X(m)$  le polynôme constituant le membre de droite de (4.5.1), toujours en comprenant  $N(\mathcal{E}, \mathcal{F}, m, d)$  comme un déterminant. Soit maintenant  $m$  positif ; on

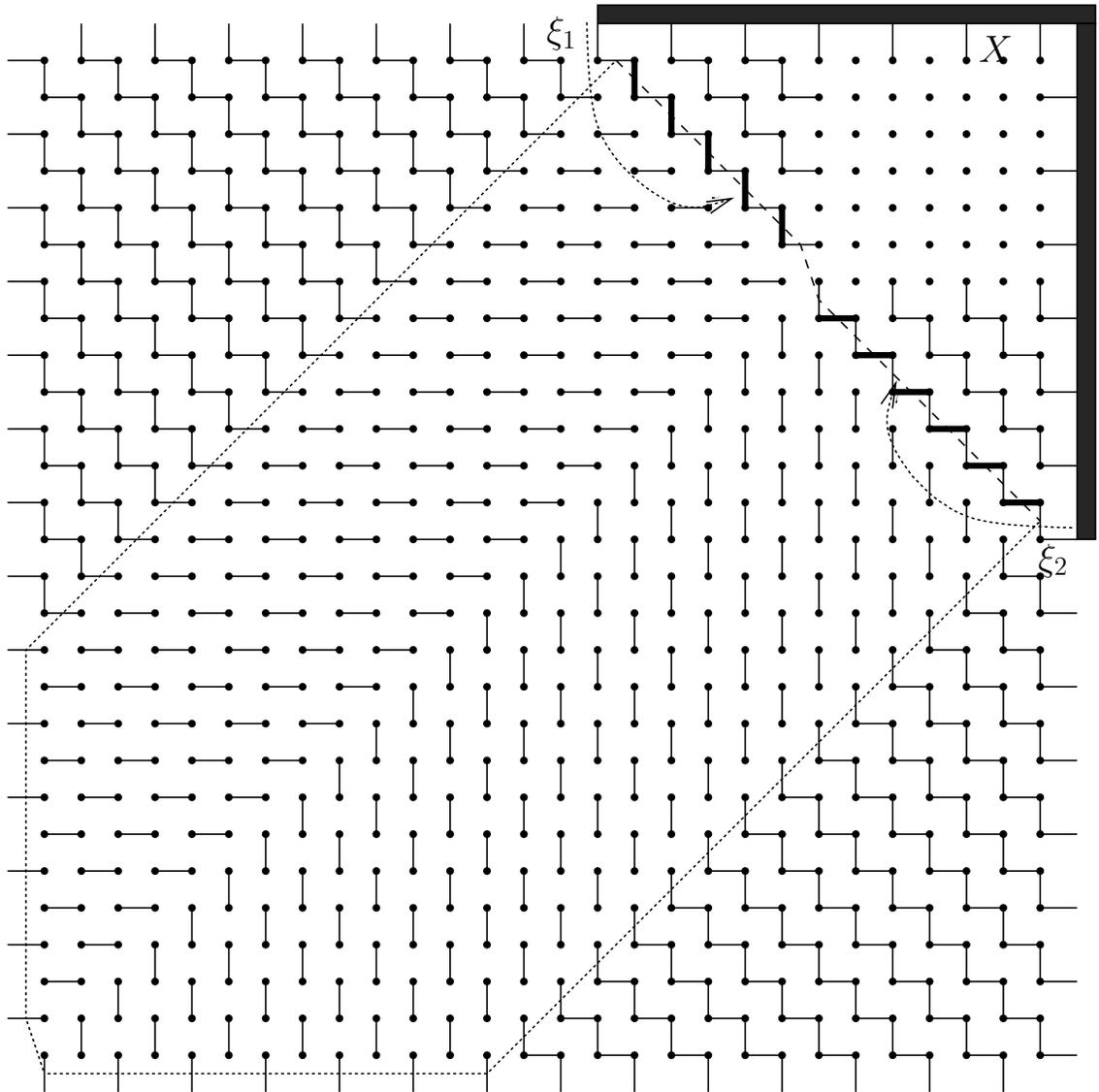


FIG. 4.22: Arêtes fixées dans le cas extrême.

sait que le nombre  $A_X(m) = A_{X \cup m}(0)$  de configurations FPL associées au couplage  $X \cup m$  est égal à  $H_{X \cup m}(0)$  : c'est le contenu du paragraphe précédent. De plus pour tout entier positif  $s$  on a  $A_{X \cup m}(s) = A_X(m + s)$  : on remarque juste qu'il s'agit du même couplage  $X \cup (m + s)$  dans chacun des cas. Si  $s$  est assez grand, on a aussi  $A_{X \cup m}(s) = H_{X \cup m}(s)$  et  $A_X(m + s) = H_X(m + s)$ . Or  $H_{X \cup m}(s)$  et  $H_X(m + s)$  sont deux polynômes en  $s$ . Comme ils coïncident pour une infinité de valeurs de  $s$ , ils sont identiques ; en particulier  $A_{X \cup m}(0) = H_{X \cup m}(0) = H_X(m)$ . Le nombre  $A_{X \cup m}(0)$  de configurations FPL associées au couplage  $X \cup m$  est donc bien donné par le même polynôme pour tout  $m$ . Il s'agit donc forcément du polynôme du Théorème 4.9, car on a affaire à deux polynômes qui coïncident pour une infinité de valeurs. La Conjecture 4.1 est maintenant complètement démontrée pour les  $m$  supérieurs à  $3d$

## 4.6 Configurations FPL dans un triangle

Dans cette section nous démontrons les résultats techniques nécessaire à la preuve du Lemme 4.8 ; c'est une conséquence immédiate du Théorème 4.11, et plus directement du Corollaire 4.14.

Il sera utile ici d'encoder des diagrammes de Ferrers  $\lambda$  par des chemins avec des pas  $(1,1)$  et  $(1,-1)$  partant de l'origine. Pour obtenir un chemin à partir d'un diagramme  $\lambda \subset (d^d)$ , on garde seulement la frontière inférieure droite de  $\lambda$  (en commençant au coin inférieur gauche du carré  $(d^d)$  et en finissant en son coin supérieur droit), puis on effectue une rotation de  $45^\circ$  du chemin obtenu. La procédure est illustrée sur la Figure 4.23, avec  $\lambda = (4, 2, 1) \subset (5^5)$ .

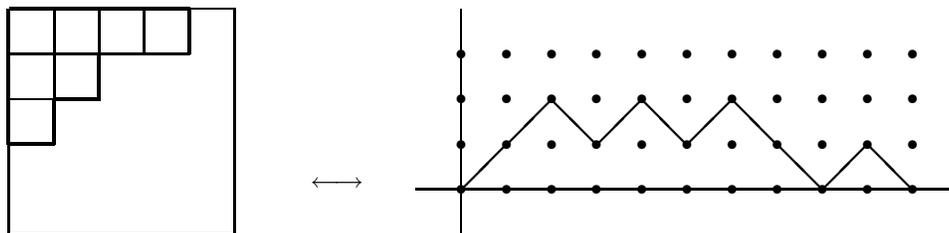


FIG. 4.23: Un diagramme de Ferrers dans un carré, et le chemin de Dyck associé.

Étant donné un couplage non croisé  $X$  avec  $d$  arches, on notera  $\pi(X)$  le chemin de Dyck correspondant à  $\lambda(X)$  contenu dans  $(d^d)$ . Ainsi le couplage  $X_0 = \{(1, 8), (2, 3), (4, 5), (6, 7), (9, 10)\}$  correspond au chemin  $\pi(X_0)$  de la Figure 4.23. Il est clair que  $\pi(X)$  sera toujours un chemin de Dyck, c'est-à-dire qu'il ne passera jamais sous l'axe des abscisses.

Pour  $\mathcal{E} \subseteq \{1, 2, \dots, 2d - 2\}$ , soit  $c_{\mathcal{E}}$  la suite binaire définie au début de la Section 4.4. On notera  $\pi(\mathcal{E})$  le chemin obtenu à partir de la suite  $0c_{\mathcal{E}}1$  en lisant la suite de gauche à droite, et en transformant les 0s en pas montants et les 1s en pas descendants. Pour  $d = 5$  et  $\mathcal{E}_0 = \{1, 2, 4, 8\}$ , on a  $c_{\mathcal{E}_0} = 00101110$ , et le chemin  $\pi(\mathcal{E}_0)$  est le chemin en trait fin de la Figure 4.24. On notera qu'en général  $\pi(\mathcal{E})$  n'est pas contraint à terminer sur l'axe ni à rester toujours au-dessus.

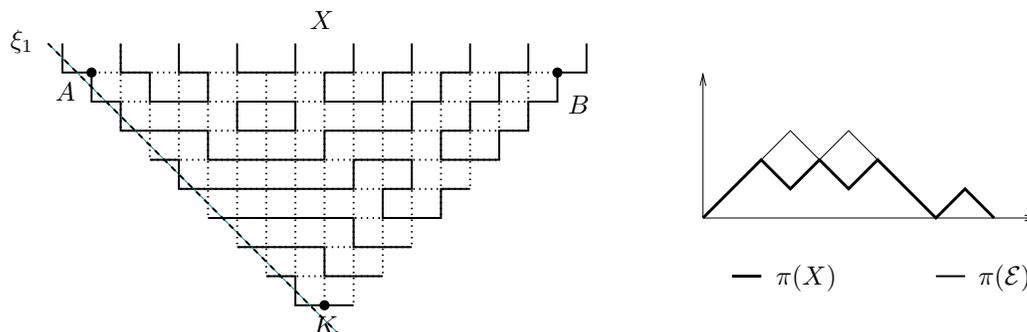


FIG. 4.24: La région triangulaire  $\mathcal{R}$  avec un exemple de configuration FPL, et les chemins  $\pi(\mathcal{E})$  and  $\pi(X)$ .

On considère maintenant une région triangulaire  $\mathcal{R}$  située sous un couplage non croisé  $X$  de  $d$  arches, telle que le triangle  $ABK$  de la Figure 4.12. On y inclut les

$2 \times (2d - 1)$  sommets à gauche et à droite. Un exemple est donné sur la Figure 4.24 pour  $d = 5$ . Comme auparavant, on note  $\xi_1$  le segment obtenu en tradant  $[AK]$  d'une demie unité vers la gauche. En accord avec les situations rencontrées dans la Section 4.4, les configurations que nous allons rencontrer incluent toutes les arêtes horizontales sur les bords gauches et droits de  $\mathcal{R}$ . De plus on ne considère que les configurations qui consistent en des chemins qui connectent des arêtes externes de  $X$  entre elles, ou qui entrent dans  $\mathcal{R}$  par la gauche et ressortent par la droite (avec éventuellement des chemins fermés à l'intérieur de  $\mathcal{R}$ ). On note ces configurations FPL des *configurations  $\mathcal{R}$ -FPL*.

Dans une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL, on encode l'ensemble des arêtes verticales qui croisent  $\xi_1$  par un sous ensemble  $\mathcal{E}$  de  $\{1, 2, \dots, 2d - 2\}$ , comme on l'a déjà fait. La Figure 4.24 illustre une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL de  $\mathcal{R}$  pour  $d = 5$ . Ici, le couplage  $X$  est le  $X_0$  ci-dessus, et l'ensemble  $\mathcal{E}$  codant les intersections avec  $\xi_1$  est le  $\mathcal{E}_0$  ci-dessus également. La partie droite de la figure illustre les chemins associés  $\pi(X_0)$  et  $\pi(\mathcal{E}_0)$ . Notons qu'ici *on ne suppose pas*  $|\mathcal{E}| = d - 1$ ; ce sera une conséquence des considérations à venir.

Pour un chemin  $\pi(\cdot)$  (i.e. un chemin  $\pi(X)$  ou un chemin  $\pi(\mathcal{E})$ ), on note  $\pi_i(\cdot)$  la hauteur du point d'abscisse  $i$ . Ainsi  $\pi_3(X_0) = 1$  et  $\pi_3(\mathcal{E}_0) = 3$ . Les deux hauteurs  $\pi_i(\mathcal{E})$  et  $\pi_i(X)$  diffèrent d'un entier pair : on peut donc définir des entiers relatifs

$$h_i = \frac{\pi_i(\mathcal{E}) - \pi_i(X)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, 2d - 1.$$

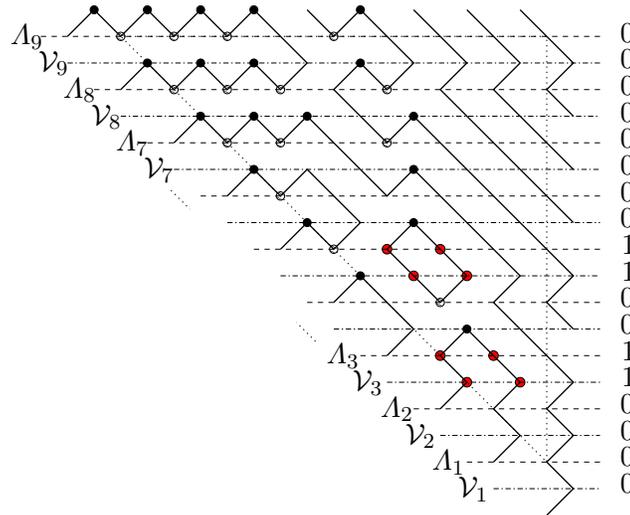


FIG. 4.25: La région  $\mathcal{R}$  après rotation.

Par la suite on considèrera en fait une version de  $\mathcal{R}$  ayant subi une rotation, voir la Figure 4.25 (Les nombres sur la droite seront définis plus tard). Les arêtes externes de  $X$  font partie de cette région.

On découpe maintenant la région  $\mathcal{R}$  en tranches, comme illustré sur la Figure 4.25. Les lignes délimitant ces tranches sont notées  $\Lambda_i$  et  $\mathcal{V}_i$ , respectivement,  $i = 1, 2, \dots, 2d - 1$ . Pour une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL, on partitionne l'ensemble des sommets en 4 *types*, comme expliqué ci-dessous; il est conseillé de jeter un oeil à la Figure 4.26 tout en lisant la définition de ces types.

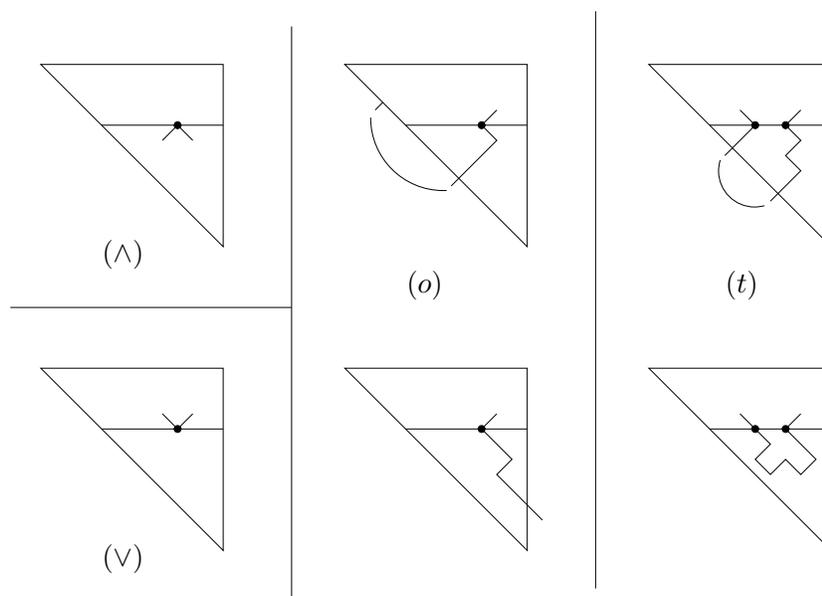


FIG. 4.26: Les quatre types de sommets.

On se fixe une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL. Soit  $v$  un sommet de la ligne  $l$ , où  $l$  est une des lignes  $A_i$  ou  $\mathcal{V}_i$ , pour un certain  $i$ . On dit que  $v$  a type  $\vee$  (respectivement  $\wedge$ ) si les deux arêtes attachées à  $v$  sont au dessus (resp. au dessous) de  $l$ . Si l'on n'est pas dans un de ces cas, il y a exactement une arête  $e$  attachée à  $v$  qui se trouve sous la ligne  $l$ . Cette arête fait partie d'un certain chemin de la configuration : on parcourt alors ce chemin en partant du sommet  $v$  dans la direction donnée par  $e$ . À un certain moment, on devra soit sortir de  $\mathcal{R}$  (par une arête externe de  $X$  ou une arête à droite), soit passer strictement au dessus de  $l$ . Notons  $e'$  la dernière arête avant que cela se produise :

- Si  $e'$  croise  $\xi_1$ , ou est une arête externe liée par  $X$  à une arête externe située strictement au dessus de  $l$ , alors  $v$  est dit de type  $o$ .
- Si  $e'$  est attachée à un sommet de  $l$ , ou est une arête externe liée par  $X$  à une arête externe située au dessus de  $l$  (au sens large), alors  $v$  est dit de type  $t$ .

Les sommets de types  $t$  vont toujours par paires sur une même ligne  $l$ . Par convention, le sommet le plus à droite de  $\mathcal{V}_i$  est de type  $o$  s'il n'est pas lié à son voisin sur  $A_{i-1}$ .

On désire maintenant compter les sommets sur chaque ligne : on désigne par  $\Lambda_{\vee}(i)$  (respectivement  $\Lambda_{\wedge}(i)$ ,  $\Lambda_t(i)$ ,  $\Lambda_o(i)$ ) le nombre de sommets sur  $A_i$  de type  $\vee$  (resp.  $\wedge$ ,  $t$ , and  $o$ ). On introduit de même les quantités  $V_{\vee}(i)$ ,  $V_{\wedge}(i)$ ,  $V_t(i)$ , et  $V_o(i)$  pour la ligne  $\mathcal{V}_i$ . Comme les sommets de type  $t$  vont par paires,  $\Lambda_t(i)$  et  $V_t(i)$  sont des entiers pairs. On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat majeur de cette section :

**Théorème 4.11.** *Pour  $1 \leq i \leq 2d - 1$ , on a*

$$\Lambda_{\wedge}(i) + \frac{1}{2}\Lambda_t(i) = V_{\vee}(i) + \frac{1}{2}V_t(i) = h_i.$$

Ce résultat est illustré sur la Figure 4.25. Les nombres sur la droite de cette

figure sont les quantités  $\Lambda_\wedge(i) + \frac{1}{2}\Lambda_t(i)$  et  $V_\vee(i) + \frac{1}{2}V_t(i)$  selon que la ligne est de la forme  $\Lambda_i$  ou  $\mathcal{V}_i$ , respectivement. Ils sont bien égaux aux entiers  $h_i$ , comme on peut le voir en comparant avec les chemins de la Figure 4.24.

Le Théorème 4.11 est un corollaire des deux lemmes suivants, comme on le voit aisément par induction immédiate. Dans les lemmes, on utilise les notations  $\Delta^{(A-\mathcal{V})}(i) = (\Lambda_\wedge(i) + \frac{1}{2}\Lambda_t(i)) - (V_\vee(i) + \frac{1}{2}V_t(i))$  et  $\Delta^{(\mathcal{V}-A)}(i) = (V_\vee(i) + \frac{1}{2}V_t(i)) - (\Lambda_\wedge(i-1) + \frac{1}{2}\Lambda_t(i-1))$  qui désignent donc les différences des quantités apparaissant dans le théorème.

**Lemme 4.12.** *Pour  $i = 1, 2, \dots, 2d - 1$ , on a  $\Delta^{(A-\mathcal{V})}(i) = 0$ .*

**Lemme 4.13.** *Pour  $i = 1, 2, \dots, 2d - 1$ , on a*

$$\Delta^{(\mathcal{V}-A)}(i) = \begin{cases} 1 & s_i(\mathcal{E}) = (1, 1) \text{ et } s_i(X) = (1, -1), \\ -1 & s_i(\mathcal{E}) = (1, -1) \text{ et } s_i(X) = (1, 1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $s_i(\mathcal{E})$  est le  $i$ ème pas du chemin  $\pi(\mathcal{E})$ , et  $s_i(X)$  le  $i$ ème pas du chemin  $\pi(X)$ .

### Preuve des lemmes 4.12 et 4.13

On va encore devoir introduire un peu de terminologie et de notations. On considèrera les tranches entre  $\mathcal{V}_i$  et  $\Lambda_i$  d'une part,  $i = 1, 2, \dots, 2d - 1$ , et entre les lignes  $\Lambda_{i-1}$  et  $\mathcal{V}_i$  d'autre part,  $i = 2, 3, \dots, 2d - 1$ ; les premières sont liées au Lemme 4.12, les secondes au Lemme 4.13. Ces tranches sont illustrées sur la Figure 4.27. Le sommet à l'extrême gauche de  $\mathcal{V}_i$  est toujours incident à une arête externe, tandis que les sommets les plus à droite de  $\mathcal{V}_i$  et  $\Lambda_i$  sont toujours connectés par une des arêtes horizontales (avant rotation) qui coupent  $\xi_1$ . Ces arêtes sont représentées en trait plein sur la Figure 4.27.

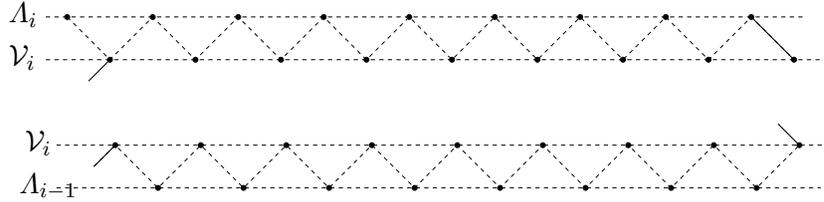


FIG. 4.27: Les deux types de tranches.

Considérons la restriction d'une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL à une tranche comme un graphe, et appelons *composante* une composante connexe de ce graphe non réduite à un sommet isolé. Deux composantes sont dites *liées* si chacune d'elles possède un sommet de type  $t$  tels que ces 2 sommets forment une paire (cf. paragraphe de définition des types); il peut arriver que deux sommets d'une paire appartiennent à la même composante, auquel cas cette dernière est considérée liée à elle-même. On appelle *groupe* les classes d'équivalence de la clôture réflexive et transitive de cette relation. Les groupes sont donc les ensembles minimaux de composantes tels que 2 composantes puissent toujours être jointes par une série de liens.

Pour un sous-ensemble  $E$  des sommets de ce graphe, on introduit la notation  $\Delta_E^{(A-\mathcal{V})}$  (respectivement  $\Delta_E^{(\mathcal{V}-A)}$ ) pour représenter la quantité  $\Delta^{(A-\mathcal{V})}$  (resp.  $\Delta^{(\mathcal{V}-A)}$ ) où le compte des sommets est restreint à ceux de  $E$ . Lorsque  $g$  est un

groupe,  $c$  est une composante, ou  $Isol$  est l'ensemble des sommets isolés, on introduit donc les quantités correspondantes  $\Delta_g^{(A-\mathcal{V})}$ ,  $\Delta_g^{(\mathcal{V}-A)}$ ,  $\Delta_c^{(A-\mathcal{V})}$ ,  $\Delta_c^{(\mathcal{V}-A)}$ ,  $\Delta_{Isol}^{(A-\mathcal{V})}$ , et  $\Delta_{Isol}^{(\mathcal{V}-A)}$ . Comme les groupes et les sommets isolés forment une partition de l'ensemble des sommets d'une tranche, il vient

$$\Delta^{(A-\mathcal{V})} = \Delta_{Isol}^{(A-\mathcal{V})} + \sum_{g \text{ groupe}} \Delta_g^{(A-\mathcal{V})} \quad \text{et} \quad \Delta^{(\mathcal{V}-A)} = \Delta_{Isol}^{(\mathcal{V}-A)} + \sum_{g \text{ groupe}} \Delta_g^{(\mathcal{V}-A)}.$$

Pour les figures, on utilisera certaines simplifications dans la représentation du remplissage des tranches. On considérera ainsi que les composantes d'un groupe sont organisées de gauche à droite, et que deux de ces composantes apparaissent côte à côte si elles sont liées ; en effet, ces manipulations ne modifient évidemment pas  $\Delta_g$ . Ensuite, on ne représentera les composantes que sous des formes réduites telles que détaillées dans la colonne "Simplification" de la Figure 4.28. Là encore la quantité  $\Delta_c$  n'est pas modifiée.

	Composante	Simplification	Coefficient
<i>I</i>		$\wedge$	1
<i>II</i>		$/$	0
		$\backslash$	0
<i>III</i>		$\vee$	-1

FIG. 4.28: Les diverses composantes possibles, leurs versions simplifiées, et les coefficients utilisés dans la preuve du Lemme 4.13.

On peut maintenant prouver le Lemme 4.12. On a  $\Delta_{Isol}^{(A-\mathcal{V})} = 0$ , où  $Isol$  désigne les sommets isolés dans la tranche entre  $\mathcal{V}_i$  et  $A_i$  : en effet, ces sommets sont de type  $\wedge$  (respectivement  $\vee$ ) lorsqu'ils appartiennent à  $\mathcal{V}_i$  (resp.  $A_i$ ). Ils ne contribuent donc pas à  $\Delta_{Isol}^{(A-\mathcal{V})}$ , qui est donc une somme vide. Pour ce qui est des groupes  $g$ , les différentes possibilités sont illustrées sur la Figure 4.29. et pour chacun d'eux un calcul immédiat montre que  $\Delta_g^{(A-\mathcal{V})} = 0$ . Comme  $\Delta^{(A-\mathcal{V})}$  est la somme des quantités  $\Delta_g^{(A-\mathcal{V})}$  et  $\Delta_{Isol}^{(A-\mathcal{V})}$ , le Lemme 4.12 est prouvé.

Il nous reste à prouver le Lemme 4.13, ce qui est plus délicat : on n'a plus  $\Delta_{Isol}^{(\mathcal{V}-A)} = 0$  en général, et il existe d'autres groupes à étudier en plus de ceux de la Figure 4.28. On va d'abord se débarrasser de  $\Delta_{Isol}^{(\mathcal{V}-A)}$  en modifiant les  $\Delta_g^{(\mathcal{V}-A)}$ .

Considérons la tranche entre  $A_{i-1}$  et  $\mathcal{V}_i$ . Un *bloc*  $b$  de sommets isolés est une suite maximale de tels sommets dans la tranche (considérée comme un graphe linéaire) ; en général, de tels blocs sont entourés de 2 composantes. Alors on remarque que  $\Delta_b^{(\mathcal{V}-A)}$  vaut 1 (respectivement  $-1$ , respectivement 0) si les deux sommets aux extrêmes droite et gauche de  $b$  sont sur  $\mathcal{V}_i$  (resp. sur  $A_{i-1}$ , resp. un sur chaque ligne). On récrit ces valeurs sous les formes  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ,  $-1 = (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})$ , et  $0 = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})$ , respectivement  $0 = (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$ , et l'idée est de *faire passer* le terme de

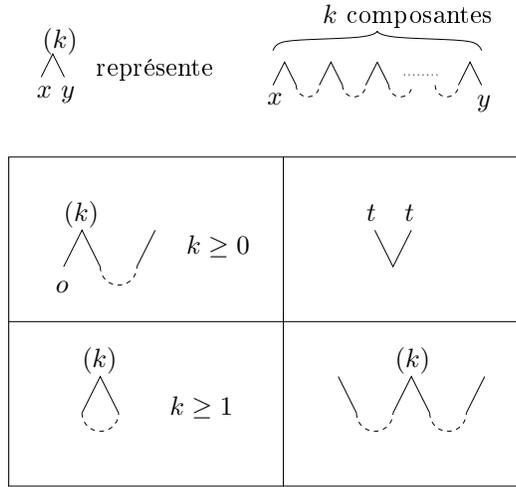


FIG. 4.29: Les groupes possibles pour le Lemme 4.12

droite de ces sommes dans la composante à droite de  $b$ , et le terme de gauche dans la composante à gauche de  $b$ . Ainsi chaque composante  $c$  va acquérir une ou deux valeurs parmi  $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ . Si  $c$  est entre deux blocs, alors la somme de ces valeurs est 1, 0, ou  $-1$ . La colonne *Coefficient* de la Figure 4.28 donne cette somme pour ces composantes, pour lesquelles on pose

$$\Delta'_c = \Delta_c^{(\mathcal{V}-A)} + \varepsilon, \tag{4.6.1}$$

où  $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$  la valeur de la colonne *Coefficient* associée. Si une composante  $c$  est à l'extrême gauche de la tranche, elle n'a qu'un bloc de sommets à sa droite : dans ce cas, on pose  $\Delta'_c = \Delta_c^{(\mathcal{V}-A)} + \varepsilon$  également, mais avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  si le sommet le plus à droite de  $c$  est sur  $\Lambda_{i-1}$ , et  $\varepsilon = -\frac{1}{2}$  si le sommet le plus à droite de  $c$  est sur  $\mathcal{V}_i$ . De même, pour une composante tout à droite, on définit également (4.6.1), mais avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  si le sommet tout à gauche de  $c$  est sur  $\Lambda_{i-1}$ , et avec  $\varepsilon = -\frac{1}{2}$  si le sommet tout à gauche de  $c$  est sur  $\mathcal{V}_i$ . Voir la Figure 4.30 pour ces composantes. On pose finalement  $\Delta'_g = \sum \Delta'_c$ , et le raisonnement précédent nous donne :

$$\Delta^{(\mathcal{V}-A)} = \sum_{g \text{ a group}} \Delta'_g. \tag{4.6.2}$$

Pour chaque groupe de la Figure 4.29, on vérifie aisément que  $\Delta'_g = 0$ . Les autres groupes sont ceux dont une des composantes se trouve tout à droite ou tout à gauche de la tranche : ils sont répertoriés sur la Figure 4.30. On a utilisé une simplification de plus ici : les paires de sommets de type  $t$  sur la ligne  $\Lambda_{i-1}$  ne sont pas représentées car elles ne modifient pas la quantité  $\Delta'_g$ .

Les valeurs de  $\Delta'_g$  sont données pour ces groupes latéraux dans la Figure 4.30. En utilisant l'équation (4.6.2), on vérifie alors que ces valeurs nous permettent de prouver l'assertion du Lemme 4.13, ce qui achève également la preuve du Théorème 4.11. □

Donnons maintenant un corollaire au théorème, qui sert dans la preuve du Lemme 4.8 :

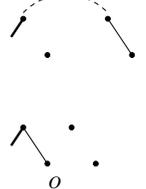
$s_i(X) = \text{up}$ 	Group $g$	$\Delta'_g$	$s_i(\mathcal{E}) = (1, 1)$ 	Group $g$	$\Delta'_g$
$s_i(X) = (1, -1)$ 		$\frac{1}{2}$	$s_i(\mathcal{E}) = \text{down}$ 		$-\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$
$s_i(X) = s_i(\mathcal{E}) = (1, -1)$ 		$\Delta'_g = 0$			

FIG. 4.30: Les groupes latéraux.

- Corollaire 4.14.**
1. *S'il existe une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL pour  $\mathcal{E}$  et  $X$  donnés, alors le chemin  $\pi(\mathcal{E})$  est toujours au dessus de  $\pi(X)$ . De manière équivalente,  $\lambda(\mathcal{E}) \subseteq \lambda(X)$ .*
  2. *S'il existe une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL pour  $\mathcal{E}$  et  $X$  donnés, alors le chemin  $\pi(\mathcal{E})$  est un chemin de Dyck. En particulier,  $\mathcal{E}$  possède  $d - 1$  éléments.*
  3. *Si  $\pi(\mathcal{E}) = \pi(X)$  (ou, de façon équivalente,  $\lambda(\mathcal{E}) = \lambda(X)$ ), alors il existe exactement une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL dans la région  $\mathcal{R}$ .*

**Preuve :**

L'assertion (1) est une reformulation de  $h_i \geq 0$ , qui est une conséquence directe du Théorème 4.11.

Pour (2), on remarque qu'à cause de (1) et du fait que  $\pi(X)$  est un chemin de Dyck,  $\pi(\mathcal{E})$  est certainement un chemin qui ne passe pas sous l'axe des abscisses ; il reste à voir qu'il termine sur l'axe des abscisses. Comme les derniers pas de  $\pi(X)$  et  $\pi(\mathcal{E})$  sont descendants par définition, il s'agit en fait de prouver que  $h_{2d-1} = 0$ . Tous les sommets de  $A_{2d-1}$  sont incidents à l'une des arêtes horizontales du bord inférieur droit de  $\mathcal{R}$  (avant rotation) : on ne peut donc pas avoir de sommets du type  $\wedge$ . On ne peut pas avoir de sommets de type  $t$  non plus, par définition d'une configuration  $\mathcal{R}$ -FPL : en effet, les arêtes du bord inférieur droit doivent faire partie de chemins qui traversent la région  $\mathcal{R}$ . Par le Théorème 4.11, il vient alors  $h_{2d-1} = \Lambda_{\wedge}(i) + \frac{1}{2}\Lambda_t(i) = 0$ , qui est ce que l'on voulait.

On en vient finalement à la preuve de (3). Supposons  $\pi(\mathcal{E}) = \pi(X)$ , ce qui signifie  $h_i = 0$  pour tout  $i$ . Par le Théorème 4.11, on doit donc construire des configurations  $\mathcal{R}$ -FPL telles que les lignes  $A_i$  contiennent exclusivement des sommets de type  $\vee$  ou  $o$ , tandis que les lignes  $\mathcal{V}_i$  contiennent exclusivement des sommets de type  $\wedge$  ou  $o$ . On va montrer inductivement qu'en procédant tranche par tranche du bas vers le haut, alors la configuration est bien uniquement déterminée.

**Lemme 4.15.** *Lorsque  $X = \mathcal{E}$ , pour  $i \in 1 \dots 2d - 1$ ,*

- *la ligne  $A_i$  comporte des sommets de type  $\vee$  sur sa gauche, et des sommets de type  $o$  sur sa droite, et*
- *la ligne  $\mathcal{V}_i$  comporte des sommets de type  $\wedge$  sur sa gauche, et des sommets de type  $o$  sur sa droite.*

**Preuve :**

On montre cela par induction sur  $i$  ; c'est trivial pour  $i = 1$ . La situation entre  $\mathcal{V}_i$  et  $\Lambda_i$  est montrée sur la Figure 4.31 : l'unicité du remplissage est claire. Il y a 2 cas pour le remplissage entre  $\Lambda_{i-1}$  et  $\mathcal{V}_i$ . Dans le Cas 1 (cf. Figure 4.32), le remplissage est obtenu en parcourant la tranche de droite à gauche : le premier sommet de type  $s$  doit être attaché à une arête orientée vers la droite, sinon le couplage  $X$  ne serait pas respecté par la configuration ; toutes les arêtes suivantes sont également orientées vers la droite car elles appartiennent à des chemins différents. Dans le Cas 2 (cf. Figure 4.33), le remplissage est obtenu en parcourant la tranche de gauche à droite. Pour le sommet  $s$  tout à droite, l'arête incidente de la tranche doit être orientée à gauche pour respecter le fait que les sommets  $s$  appartiennent à des chemins différents. Cela se répercute sur les sommets  $s$  suivants, et toutes les arêtes correspondantes sont parallèles, et la tranche est remplie de manière unique.  $\square$

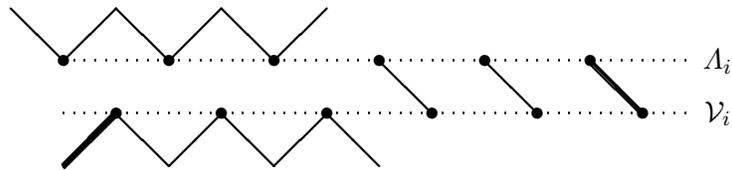


FIG. 4.31: La configuration entre  $\mathcal{V}_i$  et  $\Lambda_i$

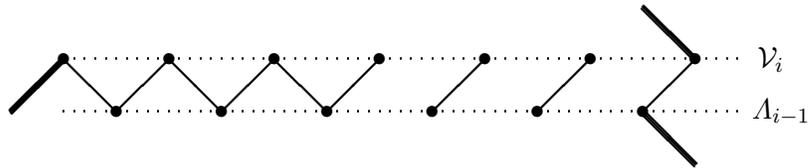


FIG. 4.32: La configuration entre  $\Lambda_{i-1}$  et  $\mathcal{V}_i$  dans le Cas 1.

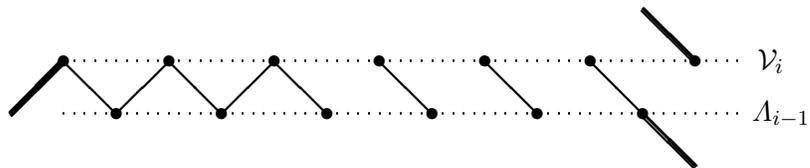


FIG. 4.33: La configuration entre  $\Lambda_{i-1}$  et  $\mathcal{V}_i$  dans le Cas 2.

La configuration  $\mathcal{R}$ -FPL complète, pour  $X_0 = \mathcal{E}$  avec  $X_0$  le couplage de la Figure 4.24, est illustrée Figure 4.6.  $\square$

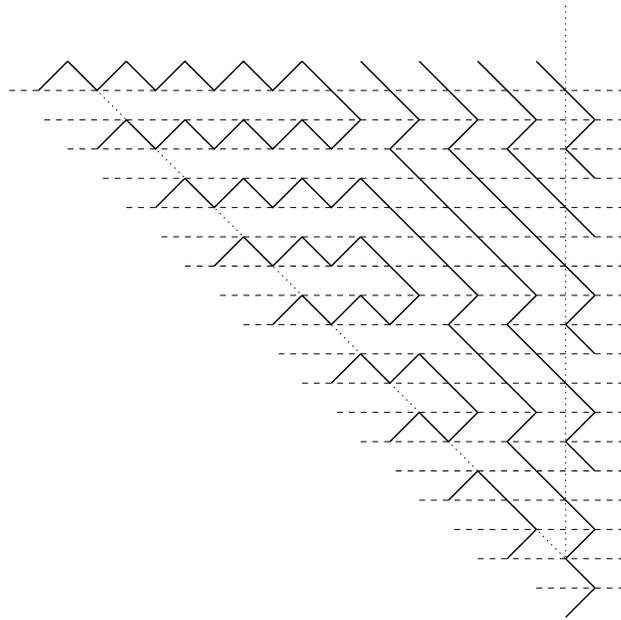


FIG. 4.34: L'unique configuration  $\mathcal{R}$ -FPL dans le cas  $X = \mathcal{E}$ .



## Chapitre 5

# Permutations : tableaux et motifs

On rappelle que les *tableaux de permutations* sont des remplissages de diagramme de Ferrers avec des  $\mathbf{0}$  et des  $\mathbf{1}$ , avec au moins un  $\mathbf{1}$  par colonne et l'interdiction d'avoir un  $\mathbf{0}$  dans une case s'il y a à la fois un  $\mathbf{1}$  quelque part au dessus dans la même colonne et un autre quelque part à gauche dans la même ligne. Ce sont des objets apparus récemment, en lien avec des problèmes à la frontière entre combinatoire et géométrie algébrique [49, 69].

Des relations entre ces tableaux de permutations et un certain modèle de physique statistique, le PASEP, a été établi dans les articles de Corteel et Williams [18, 19] : les tableaux de permutations permettent en quelque sorte de comprendre la combinatoire cachée de ce modèle.

Une bijection de ces tableaux avec les permutations a été étudiée en détail dans l'article [64]. Cet article, et en particulier certaines conjectures qu'il contient, a alors motivé de nouvelles recherches pour mieux comprendre cette relation entre permutations et tableaux [10, 17, 66, 70].

Le résultat majeur de ce chapitre est la définition d'une nouvelle bijection entre ces tableaux et les permutations, et certaines applications de ce résultat.

Nous définissons d'abord un certain nombre de notions sur les permutations, puis sur les tableaux de permutation (Sections 5.1 et 5.2). Dans la Section 5.3, nous introduisons une description récursive des tableaux. Cette décomposition est utilisée d'une part pour définir une nouvelle bijection entre tableaux et permutations dans la Section 5.4, puis pour énumérer les permutations avec zéro ou une occurrence du motif 31-2 dans la Section 5.5. Enfin nous introduirons des sous classes des tableaux de permutations en lien avec le motif 32-1 dans la Section 5.6.

### 5.1 Compléments sur les permutations

On considèrera les permutations comme des mots  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  où  $\sigma_i = \sigma(i)$ . On fera bien attention en général de distinguer les positions (correspondant aux indices  $i$ ) des entrées (les valeurs  $\sigma_i$ ). Ainsi, on dira par exemple que 3 est à gauche de 5 (ou encore avant 5) dans  $\sigma$ , si  $3 = \sigma_i, 5 = \sigma_j$  et  $i < j$ .

Par convention, posons  $\sigma_0 = 0, \sigma_{n+1} = n + 1$ . Une *montée* (resp. une *descente*) de la permutation  $\sigma$  est une entrée  $\sigma_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\sigma_i < \sigma_{i+1}$  (resp.  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ ). Ceci est différent de la terminologie habituelle, dans laquelle une montée désigne l'indice  $i$  tel que  $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ .

On peut affiner alors ces notions en prenant en compte l'entrée précédente dans la permutation. Pour  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  une permutation et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  une position, on dit que  $\sigma_i$  est

- une *vallée* si  $\sigma_{i-1} > \sigma_i < \sigma_{i+1}$  ;
- une *double montée* si  $\sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}$  ;
- un *pic* si  $\sigma_{i-1} < \sigma_i > \sigma_{i+1}$  ;
- une *double descente* si  $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$ .

Une entrée  $\sigma_i$  est un *minimum de droite à gauche* si pour tout  $j > i$  on a  $\sigma_j > \sigma_i$  ; on abrégera cela en *DG-minimum*. On remarque que les DG-minima sont forcément des montées.

### Motifs Généralisés

On appelle *motif généralisé* un mot  $\tau = \tau_1 \varepsilon_1 \tau_2 \cdots \varepsilon_{k-1} \tau_k$  où  $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$  est une permutation de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , et où chaque  $\varepsilon_i$  est soit vide soit un tiret '-'. Une *occurrence* du motif  $\tau$  dans une permutation  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  est la donnée de  $k$  indices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  de la permutation  $\sigma$  tels que :

- $\sigma_{i_i} < \sigma_{i_j}$  si et seulement si  $\tau_i < \tau_j$
- $i_{j+1} = i_j + 1$  si  $\varepsilon_j$  est vide.

On notera  $\tau(\sigma)$  le nombre d'occurrences du motifs généralisé dans la permutation  $\sigma$ . On dit que  $\sigma$  *évite* le motif  $\tau$  si  $\tau(\sigma) = 0$ , et qu'elle *contient* le motif sinon.

On aura affaire ici à des motifs généralisés de longueur 3, étudiés par exemple dans [14, 15]. Par exemple la permutation  $\sigma = 652413$  a trois occurrences du motif généralisé 31-2, pour les indices (2, 3, 4), (2, 3, 6) et (4, 5, 6), si bien que  $31-2(\sigma) = 3$ . Les deux premières positions doivent être consécutives, si bien que (1, 3, 6) n'est pas une occurrence de 31-2, tout en étant cependant une occurrence de 3-1-2

Les motifs classiques correspondent à intercaler des tirets partout dans  $\tau$ , et correspondent donc à ne pas imposer que certains indices soient consécutifs dans  $\sigma$ . Les motifs généralisés ont été introduits par Babson et Steingrímsson [1], les motifs au sens classique ayant été étudiés auparavant, entre autres, par Simion et Schmidt [57], et par de très nombreux autres auteurs depuis.

### Permutations et Formes :

Pour une permutation  $\sigma$  de taille  $n$ , définissons  $u_i$  comme étant 1 si l'entrée  $i$  est une montée de  $\sigma$ , et 0 si  $i$  est une descente. Notons qu'on a  $u_1 = 1$  car 1 est une montée dans toute permutation (non vide).

On associe un chemin à la suite  $u_1 u_2 \dots u_n$  en interprétant les 0 comme des pas ouest et les 1 comme des pas sud ; ce chemin forme naturellement la frontière sud est d'un diagramme, qui est un diagramme de Ferrers à ceci près *que certaines lignes peuvent être de taille nulle* ; on note  $sh(\sigma)$  ce diagramme, ainsi que la suite décroissante d'entiers positifs ou nuls correspondante. On utilisera le terme de *forme* pour désigner ces diagrammes, de façon à les différencier des partitions.

## 5.2 Tableaux de permutations

**Définition 5.1.** Soit  $\lambda$  une forme. On appelle tableau de permutation de forme  $\lambda$  un remplissage de  $\lambda$  avec des **1** et des **0** vérifiant les 2 conditions suivantes :

1. Chaque colonne contient au moins un **1** ;

2. Si une case contient un **0**, alors il ne peut y avoir à la fois un **1** plus haut dans la même colonne et un **1** plus à gauche dans la même ligne.

On dit qu'un remplissage de la forme  $\lambda$  est valide s'il vérifie ces 2 conditions. La Figure 5.2 donne un exemple d'un tel tableau de forme  $(3, 3, 3, 3, 1)$ .

1	1	0	1
0	0	0	2
1	1	1	3
0	0	1	4
1	6	5	7

8

FIG. 5.1: Exemple de tableau de permutation.

Soit maintenant  $T$  un tableau de permutation donné de forme  $\lambda$ . La *longueur* de  $T$  est le demi-périmètre de la forme  $\lambda$ ; en d'autres termes,  $n = lg(T)$  est égal à la somme du nombre de lignes et du nombre de colonnes. On numérote alors lignes et colonnes comme indiqué sur la Figure 5.2, en écrivant les nombres de 1 à  $n$  en parcourant la frontière sud-est du diagramme de haut en bas et de droite à gauche.

On va maintenant définir plusieurs statistiques sur les tableaux; ces statistiques ont déjà été considérées, notamment dans [19, 64].

On dit qu'un **1** dans une case donnée est *nécessaire* s'il est le plus haut **1** dans sa colonne. Comme chaque colonne contient par définition au moins un **1**, un tableau de permutation contient exactement un **1** nécessaire par colonne. Les autres **1** du tableau sont appelés *superflus*: il s'agit donc des **1** tels qu'il existe au moins un autre **1** placé plus haut dans la même colonne. On nomme *rang* de  $T$  le nombre de **1** superflus, et on le note  $rg(T)$ .

On dit qu'un **0** dans une case donnée est *restreint* s'il existe un **1** placé plus haut dans la même colonne. On remarque immédiatement qu'à gauche d'un **0** restreint (dans la même ligne), toutes les cases sont remplies par des **0**, sinon la condition 2. de la définition 5.1 serait violée par le tableau  $T$ . Une ligne du tableau  $T$  est alors dite *non restreinte* si elle ne contient pas de **0** restreint. On note  $u(T)$  le nombre de lignes non restreintes *moins* 1: si  $T$  n'est pas vide alors sa première ligne est forcément non restreinte, et ainsi  $u(T) \geq 0$ .

Le tableau de la figure a pour taille  $n = 8$ . Les lignes numérotées 1, 3 et 7 sont non restreintes, et le tableau contient quatre **1** superflus.

### 5.3 Construction récursive des tableaux de permutation

On va expliciter une décomposition récursive des tableaux de permutation. Cette description est exposée brièvement à la fin de l'article [64], où elle est utilisée pour énumérer les tableaux à 1 ou 2 lignes selon certains paramètres. Nous

allons utiliser cette décomposition de plusieurs manières dans ce travail : dans la section 5.4, cette décomposition nous servira à définir une bijection entre tableaux et permutations. Ensuite, nous coderons également cette décomposition sous forme d'un chemin dirigé particulier, ce qui permettra (via la bijection sus-citée) de prouver bijectivement quelques résultats connus sur les permutations à nombre fixé de motifs 31-2 (section 5.5).

### Réduction d'un tableau

Soit un tableau donné  $T$  non vide. Supposons que sa dernière ligne a pour numéro  $k$ , de sorte que  $k + 1$  est le numéro d'une colonne, et la case  $(k, k + 1)$  est un coin du diagramme. Si  $k = n$ , c'est-à-dire que la dernière ligne est de taille nulle, on suppose que  $(n, n + 1)$  est un coin dégénéré. Trois cas sont alors possibles :

**type  $r_0$**  : *la ligne  $k$  ne contient pas de  $\mathbf{1}$* . Si la ligne n'est pas vide, c'est équivalent à ce que  $(k, k + 1)$  contienne un  $\mathbf{0}$ . De fait, dans ce cas, par la définition d'un tableau de permutations, la colonne  $k + 1$  contient un  $\mathbf{1}$  et donc les cases de la ligne  $k$  ne peuvent pas contenir de  $\mathbf{1}$  sous peine de contredire la condition 2 de 5.1. On voit aussi aisément que tous les  $\mathbf{0}$  de la ligne  $k$  sont des zéros restreints.

**type  $r_1$**  : *la case  $(k, k + 1)$  contient un  $\mathbf{1}$  nécessaire* : par définition, toutes les autres cases de la colonne  $k + 1$  contiennent des  $\mathbf{0}$ .

**type  $s$**  : *la case  $(k, k + 1)$  contient un  $\mathbf{1}$  superflu*.

Il est clair que le type d'un tableau non vide est défini de manière unique.

Dans chacun de ces cas on va effectuer une *réduction* sur le tableau. Pour le type  $r_0$  (respectivement le type  $r_1$ , le type  $s$ ), on supprime la ligne  $k$  (resp. la colonne  $k + 1$ , la case  $(k, k + 1)$ ). Cela est illustré sur la Figure 5.3. On va préciser ces suppressions : supposons que le tableau non vide  $T$  a pour forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m)$ , et longueur  $n$ . Alors

1. si  $T$  est de type  $r_0$ ,  $red(T)$  a pour forme  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$  et le contenu des lignes ne varie pas.
2. si  $T$  est de type  $r_1$ ,  $red(T)$  a pour forme  $(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_m - 1)$ ; on supprime la colonne  $k + 1$ , et le contenu des autres colonnes reste le même.
3. si  $T$  est de type  $s$ ,  $red(T)$  a pour forme  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m - 1)$ ; on enlève simplement la case  $(k, k + 1)$ .

Il est clair que dans chaque cas on obtient bel et bien un tableau de permutations, les conditions de la définition restant bien vérifiées. On remarque que pour les types  $r_0$  et  $r_1$ , la longueur du tableau diminue d'une unité lors de la réduction mais le nombre de  $\mathbf{1}$  superflus ne varie pas, alors que pour le type  $s$ , c'est le nombre de  $\mathbf{1}$  superflus du tableau qui décroît de 1, et la longueur ne bouge pas. Ainsi la quantité  $lgrg(T) := \lg(T) + \text{rg}(T)$  a diminué :  $lgrg(red(T)) = lgrg(T) - 1$ .

### Reconstruction

On s'intéresse alors à inverser cette procédure : étant donné un tableau  $T_1$ , quels sont les tableaux  $T_2$  tels que  $T_1 = red(T_2)$ ? On va définir des règles élémentaires qui permettront de reconstruire un tableau; On notera ces règles  $R_0(t)$  ( $t \in \mathbb{N}$ ),  $R_1$  et  $S$ , et l'on notera  $T; X$  le tableau obtenu en appliquant la règle  $X$ . Définissons les cas d'application de ces règles ainsi que leur effet sur un tableau  $T$  (on pourra avec profit regarder de nouveau la Figure 5.3) :

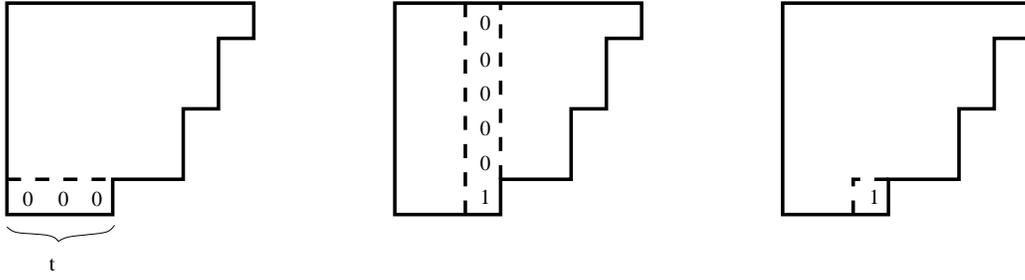


FIG. 5.2: Réduction d'un tableau.

**Définition 5.2.** Soit  $T$  un tableau de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m)$  et de longueur  $n$ ; on note  $k$  le numéro de sa dernière ligne ( $k = 0$  par convention si  $T$  est vide).

- La règle  $R_0(t)$  est applicable lorsque  $0 \leq t \leq \lambda_m$ . Alors  $T; R_0(t)$  est le tableau de forme  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, t)$  : ses  $m$  premières lignes sont identiques à celles de  $T$ , la dernière étant formée de  $t \mathbf{0}$ .
- La règle  $R_1$  est applicable lorsque  $\lambda$  n'est pas vide. Alors  $T; R_1$  est le tableau de forme  $(\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_m + 1)$ , dont la "nouvelle colonne" de numéro  $k + 1$  est remplie de  $\mathbf{0}$  sauf la case  $(k, k + 1)$  qui contient un  $\mathbf{1}$ ; les autres colonnes restent identiques.
- La règle  $S$  est applicable lorsque  $\lambda_{m-1} > \lambda_m$ .  $T; S$  est alors le tableau de forme  $(\lambda, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m + 1)$ , et la nouvelle case  $(k, k + 1)$  contient un  $\mathbf{1}$ .

Alors on a le Théorème suivant, dont la preuve est immédiate :

**Théorème 5.3.** Soit  $T$  un tableau non vide dont la dernière ligne a taille  $t$ , et  $T' := \text{red}(T)$ . Alors si  $T$  a type  $r_0$  (respectivement  $r_1$ , resp.  $s$ ), on a  $T = T'; R_0(t)$  (resp.  $T = T'; R_1$ , resp.  $T = T'; S$ ).

Notons  $T = X_1; \dots; X_u$ , si  $T$  a été obtenu en appliquant les règles  $X_1, X_2, \dots$  successivement en partant de l'ensemble vide; c'est donc un raccourci pour  $((\dots((\emptyset; X_1); X_2); \dots); X_u)$ . Le Théorème nous dit alors que tout tableau  $T$  s'écrit de manière unique  $T = X_1; \dots; X_u$  où la règle  $X_v$  est applicable au tableau  $T = X_1; \dots; X_{v-1}$  à chaque étape  $v$ .

Notons que l'on a  $u = \text{lgrg}(T) = \text{lg}(T) + \text{rg}(T)$ , car chaque application de règles augmente cette quantité d'une unité comme on l'a vu. On note également que  $X_1 = R_0(0)$ , car c'est la seule règle applicable à  $\emptyset$ .

Par exemple, le tableau  $T_0$  de la figure 5.2 peut être défini par

$$T_0 = R_0(0); R_1; R_1; R_0(2); R_0(0); S; S; R_1; R_0(2); S; R_0(0); S,$$

comme explicité sur la figure 5.3.

**Remarque:** Il est facile de passer d'un tableau  $T$  à la suite de règles associées. Supposons que  $T$  a  $m$  lignes. La suite de règles associées s'écrit alors comme la concaténation  $L_1; L_2; \dots; L_m$ , où, pour chaque  $j$ ,  $L_j$  est la suite de règles :

- commençant par la règle  $R_0(l_j)$ ,  $l_j$  étant défini comme le nombre de  $\mathbf{0}$  restreints de la ligne  $j$ .
- se poursuivant par des règles  $R_1$  et  $S$ , déterminées en lisant la  $j$ -ème ligne de gauche à droite et notant  $R_1$  (respectivement  $S$ ) lorsque la case rencontrée contient un  $\mathbf{1}$  nécessaire (resp. un  $\mathbf{1}$  superflu).

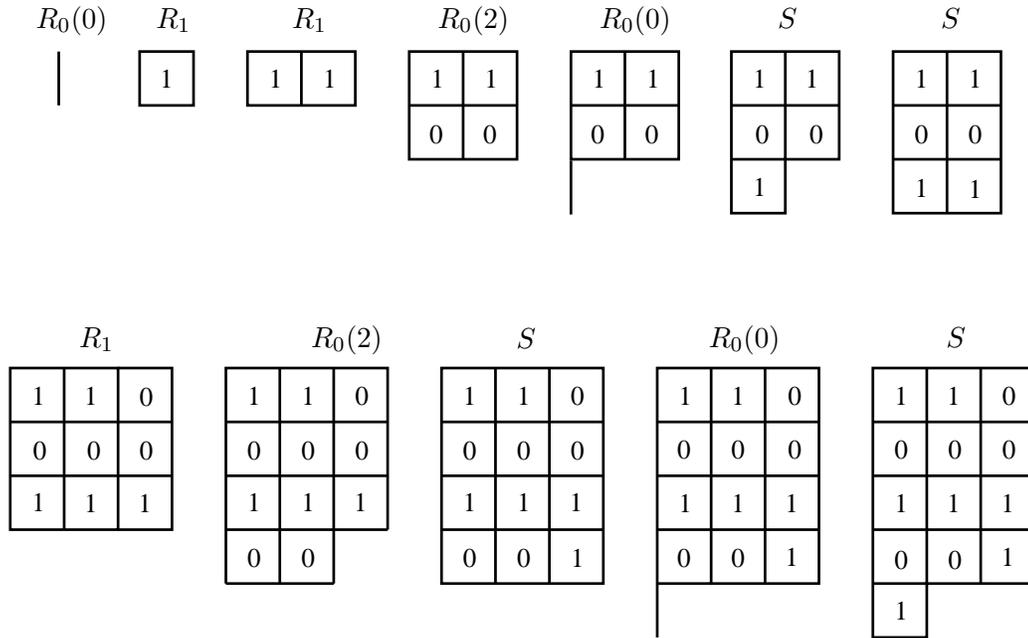


FIG. 5.3: La construction récursive des tableaux de permutation

La preuve est immédiate par induction sur  $lgrg(T)$ .

### 5.4 Bijection entre tableaux et permutations

Dans cette section, nous allons décrire une bijection entre tableaux et permutations ; cette bijection a la propriété de faire correspondre les tableaux avec  $t$  uns superflus et permutations comportant  $t$  occurrences du motif 31-2.

**Théorème 5.4.** *Il existe une bijection  $\Phi$  entre les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et les tableaux de permutations de longueur  $n$ . Cette bijection vérifie, lorsque  $T = \Phi(\sigma)$  :*

- *$i$  est une montée de  $\sigma$  si et seulement si  $i$  numérote une ligne dans  $T$  ; en d'autres termes, la forme de  $T$  est donnée par  $sh(\sigma)$  ;*
- *$i$  est un DG-minimum de  $\sigma$  si et seulement si la ligne numérotée  $i$  est non restreinte.*
- *$rg(T) = 31-2(\sigma)$ , c'est-à-dire que  $T$  a  $j$  1 superflus si et seulement si  $\sigma$  a  $j$  occurrences du motif 31-2.*

Remarquons qu'une bijection avec les deux premières propriétés peut être obtenue par la composition des 2 bijections décrites dans l'article [64]. Cependant la bijection définie ici ne semble pas être comparable à cette dernière (ou à des variantes immédiates).

On va utiliser la description récursive des tableaux : rappelons qu'un tableau est donné par une suite finie de règles parmi  $\{R_0(t)_{t \geq 0}, R_1, S\}$  soumise à certaines conditions. On va alors définir la bijection par induction sur la longueur de cette suite de règles. Un tableau peut être de 3 types :  $r_0, r_1$  ou  $s$ . On va définir également des *types de permutations* (auquel on donnera également les noms  $r_0, r_1$  et  $s$ ), avec une opération de réduction associée, et on va en fait montrer que les permutations possèdent exactement la même structure récursive que les tableaux de permutation.

### 5.4.1 Types de permutations

Soit  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  une permutation de  $\llbracket n \rrbracket$ . Par convention, on pose  $\sigma_0 = 0, \sigma_{n+1} = n + 1$ , et  $\sigma_0$  est défini comme une montée (ce qui est assez naturel), et  $\sigma_{n+1}$  comme une descente. On note  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la plus grande montée de  $\sigma$ ; comme 1 est une montée,  $k$  est bien défini. L'entier  $k$  est en fait le numéro de la dernière ligne dans la forme  $sh(\sigma)$ . Notons également que  $k + 1 \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$  est alors une descente de  $\sigma$  (même dans le cas extrême  $k = n$  par notre convention).

Avec ces définitions, on peut maintenant définir un type  $r_0, r_1$ , ou  $s$  pour chaque permutation; en fait le type  $r_1$  se subdivise en deux sous-types, et le type  $s$  comptera 6 sous-types. On aura en fait besoin de cette classification plus fine pour définir les opérations de réduction, qui, comme on le verra plus loin, sont plus techniques à réaliser que dans le cas des tableaux de permutations.

**Définition 5.5.** Soit  $\sigma$  une permutation, dont  $k$  est la plus grande montée. Alors  $\sigma$  est dite

- de type  $r_0$ , si  $k$  est une double montée, située à gauche de  $k + 1$ , et que l'on a  $31-2(k) = 0$ .
- de type  $r_1$  si  $k + 1$  est à gauche de  $k$ , que  $31-2(k + 1) = 0$  et que l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :
  1.  $k + 1$  précède immédiatement  $k$  dans  $\sigma$ , ou
  2.  $k + 1$  est une double descente.
- de type  $s$  dans tous les autres cas, qu'on peut subdiviser en :
  1.  $k$  est une vallée précédant immédiatement  $k + 1$ , ou
  2.  $k$  est une double montée à gauche de  $k + 1$  avec  $31-2(k) > 0$ , ou
  3.  $k + 1$  est un pic précédant immédiatement  $k$  et  $31-2(k + 1) > 0$ , ou
  4.  $k + 1$  est une double descente à gauche de  $k$ , et  $31-2(k + 1) > 0$ , ou
  5.  $k$  est une vallée à gauche de  $k + 1$  mais pas adjacent, ou
  6.  $k + 1$  est un pic à gauche de  $k$ , mais pas adjacent.

C'est une simple vérification que de montrer qu'une permutation non vide appartient à un et un seul de ces types, et que les sous-types de  $s$  sont disjoints (on peut en revanche avoir une permutation de type  $r_1$  vérifiant 1. et 2. ce qui ne posera pas de problèmes). Étant donnée la terminologie choisie, on va sans surprise vouloir montrer que les trois types définis ici sont en bijection avec les types de même nom définis sur les tableaux. Avant cela, on va donner quelques résultats préliminaires sur le motif 31-2.

### 5.4.2 Compléments sur le motif 31-2

On veut étudier l'évolution du nombre d'occurrences du motif 31-2 en fonction de manipulations élémentaires sur les permutations. On écrira  $31-2(\sigma, m)$  pour désigner le nombre d'occurrences  $(i_1, i_{1+1}, i_2)$  de 31-2 dans  $\sigma$  telles que  $\sigma_{i_2} = m$ ; on a donc clairement  $31-2(\sigma) = \sum_m 31-2(\sigma, m)$ .

Soit  $n \geq 1$ , et  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ; on fixe  $k < n$  une descente de  $\sigma$  telle que  $k + 1$  soit une montée. On note  $i$  et  $j$  les indices de  $k$  et  $k + 1$  respectivement,

c'est-à-dire  $k = \sigma_i$  et  $k + 1 = \sigma_j$ . Notons que les entrées  $k$  et  $k + 1$  ne peuvent pas être adjacentes dans  $\sigma$  (on entend par là que  $|j - i| > 1$ ), justement parce que  $k$  est une descente et  $k + 1$  une montée.

On note  $\sigma'$  la permutation dans laquelle  $k$  et  $k + 1$  ont été échangés :  $\sigma'_i = k + 1, \sigma'_j = k$  et  $\sigma'_\ell = \sigma_\ell$  pour tout autre indice. Dans  $\sigma'$ ,  $k$  est maintenant une montée et  $k + 1$  est une descente (c'est une conséquence de la non adjacence de  $k$  et  $k + 1$ ) ; les autres entrées ont quant à elles le même statut dans  $\sigma$  et  $\sigma'$ .

Alors on a les propriétés élémentaires :

**Lemme 5.6.** *Soit  $n \geq 1$ , et  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On définit  $k$  et  $\sigma'$  comme ci-dessus. Alors*

- pour tout  $m \neq k, k + 1$ , on a  $31-2(\sigma', m) = 31-2(\sigma, m)$  ;
- si  $k + 1$  est à gauche de  $k$  dans  $\sigma'$ , i.e.  $i < j$ , on a
  - (**cas A**) si  $k + 1$  est une double descente de  $\sigma'$ ,  
 $31-2(\sigma', k) = 31-2(\sigma, k + 1)$  et  $31-2(\sigma', k + 1) = 31-2(\sigma, k)$
  - (**cas B**) si  $k + 1$  est un pic de  $\sigma'$ ,  
 $31-2(\sigma', k) = 31-2(\sigma, k + 1) + 1$  et  $31-2(\sigma', k + 1) = 31-2(\sigma, k)$
- si  $k$  est à gauche de  $k + 1$  dans  $\sigma'$ , i.e.  $i > j$ , on a
  - (**cas C**) si  $k$  est une double montée de  $\sigma'$ ,  
 $31-2(\sigma', k) = 31-2(\sigma, k + 1)$  et  $31-2(\sigma', k + 1) = 31-2(\sigma, k)$
  - (**cas D**) si  $k$  est une vallée de  $\sigma'$ ,  
 $31-2(\sigma', k) = 31-2(\sigma, k + 1)$  et  $31-2(\sigma', k + 1) = 31-2(\sigma, k) + 1$

*Preuve:* c'est une vérification immédiate : dans  $\sigma'$ , les occurrences de 31-2 sont les mêmes que dans  $\sigma$ , avec en plus :

- $(i, i + 1, j)$  si  $k + 1$  est un pic à gauche de  $k$ .
- $(j - 1, j, i)$  si  $k$  est une vallée à gauche de  $k + 1$ .

□

On déduit immédiatement du lemme que  $31-2(\sigma') = 31-2(\sigma)$  dans les cas **A** et **C**, et  $31-2(\sigma') = 31-2(\sigma) + 1$  dans les cas **B** et **D**.

On veut maintenant définir une permutation  $g(\sigma)$  telle que  $31-2(g(\sigma)) = 31-2(\sigma) + 1$  dans tous les cas : on se base pour cela sur la permutation intermédiaire  $\sigma'$ , et l'on définit  $g(\sigma)$  en distinguant suivant les quatre cas du lemme précédent :

- **Cas A** : On considère  $\sigma'$  comme un mot sur  $n + 2$  lettres, formé de la permutation  $\sigma'$  précédée de 0 et suivie de  $n + 1$ . Il se factorise uniquement sous la forme

$$\sigma' = X(k + 1)p_1G_1p_2 \cdots p_tG_tkY,$$

pour un  $t \geq 1$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux mots, et les  $G_a$  et  $p_a$  sont des mots non vides (sauf éventuellement  $G_t$ ) formés de lettres respectivement plus grandes que  $k + 1$ , et plus petites que  $k$ . Notons que  $X$  termine par une lettre supérieure à  $k + 1$ , et que  $p_1$  n'est pas vide car  $k + 1$  est une descente non adjacente à  $k$ .

On définit la permutation  $g(\sigma)$  comme suit :

1. si  $t = 1$  et  $G_1$  est vide, on pose  $g(\sigma) := Xp_1(k + 1)kY$ .
2. sinon, on pose  $g(\sigma) := Xp_1G_1(k + 1)p_2 \cdots p_tG_tkY$

- **Cas B** : On pose  $g(\sigma) := \sigma'$ .
- **Cas C** : En considérant  $\sigma'$  comme un mot de même que dans le cas A, on a ici une unique factorisation

$$\sigma' = XkG_1p_1G_2 \cdots G_t p_t(k+1)Y,$$

pour un  $t \geq 1$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux mots, où les  $G_a$  et  $p_a$  sont des mots non vides (sauf éventuellement  $p_t$ ) formés de lettres respectivement plus grandes que  $k+1$ , et plus petites que  $k$ . Notons que  $X$  termine par une lettre inférieure à  $k$ , et que  $G_1$  n'est pas vide car  $k$  est une montée non adjacente à  $k+1$ .

On définit la permutation  $g(\sigma)$  comme suit :

1. si  $t = 1$  et  $p_1$  est vide, on pose  $g(\sigma) := XG_1k(k+1)Y$ .
2. sinon, on on pose  $g(\sigma) := Xp_1G_1(k+1)p_2 \cdots G_t p_t k Y$

- **Cas D** : On pose  $g(\sigma) := \sigma'$ .

**Lemme 5.7.** *Soit  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , dont  $k < n$  est une montée et  $k+1$  une descente. Alors :*

- dans  $g(\sigma)$ ,  $k$  est une montée,  $k+1$  une descente, les autres entrées gardent le même statut que dans  $\sigma$ .
- $31-2(g(\sigma)) = 31-2(\sigma) + 1$ .

*Preuve:* La première propriété est vraie pour  $\sigma'$  comme on l'a remarqué ; il suffit alors de remarquer que le passage de  $\sigma'$  à  $g(\sigma)$  dans les cas A et C est défini de sorte à ne pas modifier la forme de la permutation.

Pour le résultat sur le motif 31-2, c'est évident pour les cas **B** et **D** d'après le Lemme 5.6. Pour les deux autres cas, il suffit là encore d'étudier la définition de  $g(\sigma)$  : on remarquera que pour les cas A1, A2 et C1, on a  $31-2(g(\sigma), k+1) = 31-2(\sigma', k+1) + 1$ , et pour le cas C2, on a  $31-2(g(\sigma), k) = 31-2(\sigma', k) + 1$ . □

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette partie :

**Proposition 5.8.** *Soit  $j > 0$  un entier,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  une forme telle que  $\lambda_m > 0$ . On a une bijection entre*

1. les permutations de type  $s$  et de forme  $\lambda$  avec  $j$  occurrences du motif 31-2.
2. les permutations de forme  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m - 1)$  avec  $j - 1$  occurrences du motif 31-2.

*Preuve:* Soit  $\sigma$  une permutation de type  $s$ , on va détailler la bijection de 1. vers 2. en reprenant (dans l'ordre) les six sous-types de  $s$  définis dans la partie 5.4.1.

Pour cela, on va de nouveau utiliser des factorisations des permutations (telles que dans les cas A et C de la définition de la fonction  $g$  auparavant). Dans ce qui suit,  $X$  et  $Y$  sont deux mots, les facteurs  $p_a$  et  $G_a$  sont tous non vides, et on notera  $p_a < k$  par exemple pour signifier que toutes les lettres de  $p_a$  sont inférieures strictement à  $k$ .

1.  $\sigma = Xp_1G_1k(k+1)Y$ , avec  $p_1 < k$  et  $G_1 > k+1$ . On pose  $\sigma'' := Xp_1kG_1(k+1)Y$ .
2.  $\sigma = Xp_1G_1p_2kY$  avec  $p_1, p_2 < k, G_1 > k$  : on pose  $\sigma'' := Xp_1kG_1p_2Y$ .

3.  $\sigma = Xp_1G_1p_2(k+1)kY$  : on pose  $\sigma'' := Xp_1(k+1)G_1p_2kY$
4.  $\sigma = Xp_1G_1p_2G_2(k+1)Y$  : on pose  $\sigma'' := Xp_1G_1(k+1)p_2G_2Y$
5. on pose  $\sigma'' := \sigma$ .
6. on pose  $\sigma'' := \sigma$ .

On définit alors  $red(\sigma)$  comme la permutation  $\sigma''$  suivi de l'échange de  $k$  et  $k+1$ . :  $red$  constitue la bijection recherchée.

De fait,  $red$  est exactement l'opération inverse de  $\sigma \mapsto g(\sigma)$  de la sous-section précédente (en choisissant  $k$  comme la plus grande montée de  $\sigma$ ). Plus précisément, pour le sous-type 1 de  $s$  ( resp. le sous-type 2,3,4,5,6), l'inverse est donnée par le cas A1 ( resp. le cas A2,C1,C2,B,D), comme on le vérifie avec un peu d'attention.  $\square$

### 5.4.3 Réduction et reconstruction d'une permutation

On est en mesure de définir l'opération de réduction pour chacun des types :

**Règles de réduction :**

- dans le cas  $r_0$ ,  $red(\sigma)$  est la permutation obtenue en supprimant  $k$  et en décrémentant de 1 toutes les entrées supérieures à  $k$ .
- Dans le cas  $r_1$ ,  $red(\sigma)$  est la permutation obtenue en supprimant  $k+1$  et en décrémentant de 1 toutes les entrées supérieures à  $k+1$ .
- dans le cas  $s$ ,  $red(\sigma)$  est la bijection de la proposition 5.8.

On définit alors les règles de reconstruction associées :

**Définition 5.9.** Soit  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de forme  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , dont la plus grande montée est  $k$  ( $= n - \lambda_m$  nécessairement).

- La règle  $R_0(t)$  est applicable lorsque  $0 \leq t \leq \lambda_m$ , c'est-à-dire  $0 \leq t \leq n - k$ . La permutation  $\sigma; R_0(t)$  est définie comme suit : on incrémente de 1 toutes les entrées supérieures ou égales à  $n + 1 - t$ ,  $\sigma$  se décompose alors sous la forme  $\sigma = p_1G_1Y$ , avec  $p_1 < n + 1 - t$  et  $G_1 > n + 1 - t$  non vides, et on insère  $n + 1 - t$  entre  $p_1$  et  $G_1$ .
- La règle  $R_1$  est applicable lorsque  $\lambda$  n'est pas vide. La permutation  $\sigma; R_1$  est définie comme suit :
  1. si  $\sigma$  est de la forme  $p_1kY$ , alors on incrémente de 1 toutes les entrées strictement supérieures à  $k$ , et on place  $k+1$  juste avant  $k$ .
  2. si  $\sigma$  est de la forme  $p_1G_1Y$ , alors on incrémente de 1 toutes les entrées strictement supérieures à  $k$ , et on place  $k+1$  juste après  $G_1$ .
- La règle  $S$  est applicable lorsque  $\lambda_{m-1} > \lambda_m$ . La permutation  $\sigma; S$  est la transformation  $g(\sigma)$  définie plus haut.

Alors on a le Théorème suivant :

**Théorème 5.10.** Soit  $\sigma$  une permutation non vide de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dont la plus grande montée est  $k$ , et  $\sigma' := red(\sigma)$ . Alors si  $\sigma$  a type  $r_0$  (respectivement  $r_1$ , resp.  $s$ ), on a  $\sigma = \sigma'; R_0(n - k)$  (resp.  $\sigma = \sigma'; R_1$ , resp.  $\sigma = \sigma'; S$ ).

*Preuve:* Cela a été fait pour le type  $s$ ; il reste à voir les types  $r_0$  et  $r_1$ , ce qui est une simple vérification.  $\square$

#### 5.4.4 La bijection

La fonction  $\Phi$  peut être décrite de la façon suivante : soit  $\sigma$  une permutation  $\sigma_1 \cdots \sigma_n$  de forme  $\lambda$ . Alors

- Si  $\sigma$  est vide,  $\Phi(\sigma)$  est le tableau vide ;
- sinon, soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  sa plus grande montée. Par induction, on calcule  $T' = \Phi(\text{red}(\sigma))$  ; on définit alors  $\Phi(\sigma) := T', X$ , où  $X$  est la règle  $R_0(n - k)$  (respectivement  $R_1$ , resp.  $S$ ) si  $\sigma$  est de type  $r_0$  (resp.  $r_1$ , resp.  $s$ ).

L'induction porte ici sur la somme du nombre de motifs 31-2 et de la taille de la permutation.

**Exemple :** Donnons un exemple complet ; on va calculer le tableau  $\Phi(\sigma)$  pour  $\sigma = 28451637$ . Pour cela, donnons d'abord les réductions successives en soulignant la plus grande montée  $k$  et (lorsque  $k$  n'est pas l'entrée maximale) la descente  $k+1$ , et en indiquant le type :

- $28451637$ , type  $s$  ;
- $27451638$ , type  $r_0$  ;
- $2745163$ , type  $s$  ;
- $2574163$ , type  $r_0$  ;
- $264153$ , type  $r_1$  ;
- $25143$ , type  $s$  ;
- $25314$ , type  $s$  ;
- $24315$ , type  $r_0$  ;
- $2431$ , type  $r_0$  ;
- $321$ , type  $r_1$  ;
- $21$ , type  $r_1$  ;
- $1$ , type  $r_0$ .

Alors, en dé-récursifiant, on trouve les règles décrivant le tableau  $\Phi(\sigma)$  : il s'agit de  $(R_0(0); R_1; R_1; R_0(2); R_0(0); S; S; R_1; R_0(2); S; R_0(0); S)$ . On remarque que c'est le tableau de la Figure 5.2, dont les règles de construction sont détaillées sur la Figure 5.3.

Le Théorème 5.10 montre par induction immédiate que  $\Phi$  est une bijection préservant la forme. On remarque de plus que les règles  $R_0(t)$  et  $R_1$  sur les permutations ne modifient pas le nombre d'occurrences de 31-2 : on a donc bien  $31-2(\sigma) = rg(\Phi(\sigma))$ .

Pour achever la preuve du Théorème 5.4, il reste à montrer que les numéros des lignes restreintes de  $\Phi(\sigma)$  sont les DG-minima de  $\sigma$ . D'après la remarque finale de la Section 5.3, les lignes non restreintes d'un tableau correspondent aux règles  $R_0(0)$ . Il s'agit finalement de montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.11.** *Soit  $\sigma$  une permutation dont les DG-minima sont les entrées  $k_1 < k_2 < \dots < k_\ell$ , et dont la plus grande montée est  $k$ . Alors les DG-minima de  $\text{red}(\sigma)$  sont identiques, sauf lorsque  $\sigma$  termine par  $n$ , auquel cas  $k_\ell = k = n$  et les DG-minima de  $\text{red}(\sigma)$  sont  $k_1 < k_2 < \dots < k_{\ell-1}$*

*Preuve:* Supposons que  $\sigma$  se termine par  $n$  ; elle est donc de type  $r_0$ . L'entrée  $n$  en est bien évidemment un DG-minima, et  $\text{red}(\sigma)$  est obtenue en supprimant  $n$ , et ses DG-minima sont alors clairement comme indiqués.

Supposons que  $\sigma$  est de type  $r_0$ , mais que  $k \neq n$ . Alors  $k$  n'est pas un DG-minimum de  $\sigma$  : en effet, par définition du type  $r_0$ ,  $k+1$  est une descente à droite de  $k$  dans  $\sigma$ , donc l'entrée qui suit  $k+1$  est un  $\sigma_i$  plus petit que  $k$  et à sa droite. Il s'ensuit aisément que  $red(\sigma)$ , obtenue en supprimant  $k$  dans  $\sigma$  et en normalisant, a bien les mêmes DG-minima que  $\sigma$ .

Si  $\sigma$  est de type  $r_1$ , alors la suppression de  $k+1$  ne modifie pas les DG-minima. De même si  $\sigma$  est de type  $s$ , il est facile de voir que les déplacements de  $k$  et  $k+1$  pour passer de  $\sigma$  à  $red(\sigma)$  ne modifient pas les DG-minima. □

Cela démontre bien le Théorème 5.4 ; nous allons maintenant utiliser cette bijection pour donner des preuves bijectives de résultats énumératifs sur les permutations.

## 5.5 Chemins et énumération à nombre de 31-2 fixé

Revenons maintenant sur la description récursive des tableaux : notre but est de coder les suites (valides) de règles par un certain chemin. Nous utiliserons ensuite ce codage pour obtenir des résultats énumératifs sur les permutations avec un nombre fixé d'occurrences du motif 31-2.

On aura ici affaire à des chemins du plan  $\mathbb{Z}^2$ , issus de l'origine, dont les pas sont donnés par les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ , où les pas montants  $(1, 1)$  peuvent être de 2 types, "U" ou "V" ; on pourra donc les encoder par des mots sur l'alphabet  $\{D, U, V\}$ . Pour ces chemins, on définit une *montée* comme un facteur maximal (non vide) constitué par des pas  $(1, 1)$  consécutifs (donc de type U ou V indifféremment ; on appelle *descente* un facteur non vide maximal de pas  $(1, -1)$  consécutifs. On appelle *retour à zéro* un point du chemin différent de O, qui se trouve sur l'axe des abscisses.

### 5.5.1 Codage par un chemin

On va coder un tableau par un mot sur l'alphabet à 3 lettres  $D, U, V$ . On définit la hauteur d'un mot  $u$  sur  $\{D, U, V\}$  comme suit : on pose  $h(D) = -1$  et  $h(U) = h(V) = 1$ , puis on calcule la hauteur finale  $h(w)$  de  $w = w_1 \cdots w_n$  en additionnant

$$h(w) = \sum_{i=1}^n h(w_i)$$

Il s'agit simplement de l'ordonnée du point d'arrivée du chemin associé à  $w$ . Le mot est *positif* si  $h(w_1 \cdots w_i) \geq 0$  pour tout  $i \leq n$ . Cela revient bien sûr au fait que le chemin correspondant reste en permanence au-dessus de l'axe des abscisses.

La donnée d'un tableau  $T$  est équivalente à la donnée d'une suite de règles de la forme  $R_0(t), R_1$  ou  $S$  vérifiant certaines conditions comme on l'a vu dans la Section 5.3. Considérons donc cette suite de règles  $w(T)$  comme un mot sur l'alphabet infini  $\mathcal{R} = \{R_0(t)_{t \geq 0}, R_1, S\}$  ; on écrira  $w(T) = w_1 w_2 \dots w_u \in \mathcal{R}^*$ .

On va alors définir un mot  $co(w(T))$  sur  $\{D, U, V\}$  par induction. On pose  $co(\varepsilon) := \varepsilon$ . Supposons que  $co$  transforme le préfixe  $w_1 \dots w_i$  en  $W \in \{D, U, V\}^*$  :

1. si  $w_{i+1} = R_1$ , on définit  $co(w_1 \dots w_{i+1}) := WU$
2. si  $w_{i+1} = S$ , on définit  $co(w_1 \dots w_{i+1}) := WV$
3. si  $w_{i+1} = R_0(t)$ , on définit  $co(w_1 \dots w_{i+1}) = WD^iU$ , où  $i \geq 0$  est choisi de sorte que  $h(WD^i) = t$ .

**Lemme 5.12.** *Soit  $T$  un tableau non vide de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , dont la description par règles est fournie par le mot  $w(T)$ . Alors le mot  $co(w(T))$  ci-dessus est bien défini, à pour hauteur finale  $1 + \lambda_k$ .*

*Preuve:* Une application des règles  $R_1$  ou  $S$  augmente la dernière ligne d'un tableau de 1, alors que l'application de la règle  $R_0(t)$  amène cette longueur à  $t$ . Cela montre bien l'assertion sur la hauteur finale par induction immédiate. Comme  $R_0(t)$  n'est applicable à un tableau que lorsque  $t$  est inférieur à la taille de la dernière ligne du tableau, le choix de  $i$  ci-dessus est bien possible, ce qui montre bien que  $co$  est bien définie.  $\square$

Déterminons quelle est l'image de cette application  $co$  :

**Définition 5.13.** *Un mot positif sur l'alphabet  $\{D, U, V\}$  est dit valide s'il ne termine pas par un pas  $D$ , et si pour chaque facteur constitué d'une descente suivie d'une montée, cette dernière :*

1. commence par un  $U$ , et
2. contient au plus  $d$  pas  $V$ , où l'on note  $d+1$  la longueur de la descente considérée.

**Proposition 5.14.** *L'application  $co$  est injective, et a pour image l'ensemble des chemins valides.*

*Preuve:* Étant donné un mot  $W = co(w(T))$ , chaque facteur  $D^kU$  avec  $k \geq 1$  correspond forcément à une règle  $R_0(x)$  (où  $x$  est la hauteur de  $w$  après  $D^k$ ), le premier pas du chemin (nécessairement un  $U$ ) correspond à la règle  $R_0(0)$ ; enfin, tous les  $U$  et  $V$  restants correspondent respectivement à l'application de règles  $R_1$  et  $S$ . L'application  $co$  est donc bien injective.

Soit  $W = co(w(T))$  pour un certain tableau  $T$  donné par le mot  $w(T)$  que constituent les règles qui le décrivent; montrons que  $W$  est valide.

$W$  est clairement un mot positif. De plus, chaque montée commence bien par  $U$ , grâce à la façon dont on a encodé les règles  $R_0(t)$ . Supposons maintenant qu'une montée suive une descente de taille  $d+1$ , correspondant à une factorisation  $w(T) = w_1 D^{d+1} U M D w_2$ , où  $M$  est le mot sur  $\{U, V\}$  qui constitue la montée. On veut montrer que  $M$  contient au plus  $d$  pas de type  $V$ . Notons  $T_0$  le tableau tel que  $co(T_0) = w_1 D^{d+1} U$ . Par le lemme 5.12, son avant-dernière ligne est de taille  $h(w_1) - 1$ , et sa dernière de taille  $h(w_1) - d - 1$ . Les  $U$  et  $V$  de  $M$  correspondent à des règles  $R_1$  et  $S$  appliquées à  $T_0$  respectivement; il est alors aisé de voir qu'on ne peut appliquer au plus que  $d$  règles  $S$ , car celles-ci décrémentent de 1 la différence entre les deux dernières parts d'une forme (cette différence n'étant pas modifiée par les règles  $R_1$ ).

On a montré que les mots  $co(T)$  sont bien des mots valides; réciproquement, il est facile de voir que chaque chemin valide  $w$  correspond bien à un tableau de permutations tel que  $co(T) = w$ ; cela termine la preuve.  $\square$

**Le codage :** on définit l'application *code* des tableaux de permutation vers les TP-chemins : on pose  $code(T) = co(w(T))D^t$ , avec  $t$  choisi de sorte que  $code(T)$  soit de hauteur finale égale à zéro ; par le Lemme 5.12,  $t$  est égal à  $1 + \lambda_k$  où  $\lambda_k$  est la taille de la dernière ligne de  $T$ .

**Définition 5.15.** On appelle TP-chemin un chemin valide sur  $\{D, U, V\}$  qui termine à la hauteur 0. On appellera aussi TP-mot le mot associé.

Le préfixe "TP" est choisi pour "Tableau de Permutation" ; l'explication se trouve dans le résultat suivant :

**Théorème 5.16.** L'application *code* constitue une bijection entre :

1. les tableaux de permutation de taille  $n$ , comportant  $k$  uns superflus,  $m$  lignes dont  $j$  non restreintes.
2. les TP-chemins de longueur  $2n + 2k$ , avec  $k$   $V$ ,  $m$  montées et  $j$  retours à zéro.

**Preuve :** Soit  $T$  un tableau avec les spécifications du 1. L'application *code* associe un pas exactement parmi  $\{U, V\}$  à chacune des  $n + k$  règles décrivant  $T$  ; donc, comme  $code(T)$  termine sur l'axe des abscisses, il a bien longueur  $2(n + k)$  – il y a en effet autant de pas montants que descendants.

Les montées sont en bijection immédiate avec les règles  $R_0(t)$  décrivant  $t$ , il y en a donc bien  $m$  ; enfin, les  $j$  lignes restreintes sont représentées par  $m$  règles  $R_0(0)$ , ce qui correspond par la définition de *co* à précisément  $j$  retours à zéro. □

Décrivons enfin la forme de  $T$  en fonction de son chemin  $code(T)$  ; on va donner cette description par une suite de 0 et de 1 représentant la frontière sud est parcourue de haut en bas, comme décrit dans la Section 5.1.

Factorisons  $code(T)$  en montées et descentes, c'est-à-dire sous la forme

$$code(T) = U^{k_0} D^{l_1} M_{k_1} \dots D^{l_t} M_{k_t} D^{l_{t+1}},$$

les exposants étant non nuls, et pour chaque  $i$ ,  $M_{k_i}$  est une montée dont on note  $v_i$  le nombre de  $V$  qu'elle contient. Alors la frontière de  $T$  est

$$10^{l_1-1-v_1} 10^{l_1-1-v_1} 1 \dots 0^{l_t-1-v_t} 10^{l_{t+1}-1}.$$

En français, pour chaque descente, on a un facteur constitué de  $l - v - 1$  '0' suivi d'un '1', où  $l$  est la longueur de la descente et  $v$  le nombre de pas  $V$  dans la montée qui la suit. On obtient la forme en ajoutant un '1' au début et en enlevant un '1' à la fin. La preuve de ce fait consiste en une simple induction sur le nombre de règles du tableau.

### 5.5.2 Permutations sans occurrence de 31-2

La bijection 5.4, composée avec le codage est une bijection entre les permutations de taille  $n$  évitant le motif 31-2 et les chemins de Dyck de longueur  $2n$ . Il y a donc  $C_n$  permutations de  $[[1, n]]$  qui évitent le motif 31-2 (cf. [14]).

On remarque en fait qu'éviter le motif 31-2 est équivalent à éviter le motif 3-1-2 : déjà, si une permutation contient 31-2 aux indices  $(i_1, i_1 + 1, i_2)$ , alors elle contient

aussi 3-1-2 avec les mêmes indices. Maintenant, supposons  $\sigma$  a une occurrence  $i_1, i_2, i_3$  de 3-1-2. On a donc  $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$  : en regardant  $i_1, i_1 + 1, \dots$  on trouvera alors forcément un indice  $j < i_2$  tel que  $\sigma_j > \sigma_{j+1}$ . Ainsi  $j, j + 1, i_3$  est une occurrence de 31-2.

Or il est bien connu (cf. [39, 57]) que le nombre de permutations évitant 3-1-2 est donné par les les nombres de Catalan. La composition bijective  $code \circ \Phi$  nous donne en fait plus.

Ainsi, les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  évitant 31-2 avec  $p$  DG-minima sont en bijection avec les chemins de Dyck de longueur  $2n$  qui ont  $p$  retours à zéro, dont l'énumération est donnée par les *ballot numbers*.

Et les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  évitant 31-2 avec  $m$  montées sont en bijection avec les chemins de Dyck de longueur  $2n$  possédant  $m$  montées, dont l'énumération est faite par le nombre de Narayana

$$N(n, m) = \frac{1}{n} \binom{n}{m} \binom{n}{m-1}.$$

Notons que Christian Krattenthaler [40] a donné une bijection entre ces permutations et les chemins de Dyck possédant des propriétés similaires.

Pour ce qui concerne les tableaux de permutation obtenus au passage, à savoir les tableaux avec un unique  $\mathbf{1}$  par colonne, ce sont les *tableaux de Catalan* selon la terminologie de Xavier Viennot [66]. Ce dernier a donné le premier une bijection entre ces tableaux et des arbres binaires, dont il est bien connu qu'ils sont en bijection avec les chemins de Dyck.

### 5.5.3 Permutations avec une occurrence de 31-2

La bijection 5.4, composée avec le codage est une bijection entre les permutations de taille  $n$  avec une occurrence du motif 31-2 et les TP-chemins de longueur  $2n + 2$  avec un pas  $V$ .

Dans l'article de Claesson et Mansour [15], il est prouvé que

**Théorème 5.17** ([15]). *Les permutations de taille  $n$  avec exactement une occurrence du motif 31-2 sont comptées par  $\binom{2n}{n-3}$*

A la fin de l'article, les auteurs demandent une preuve bijective de ce résultat. On peut en donner une grâce aux TP-chemins (il est conseillé de regarder les étapes sur la Figure 5.5.3 lors de la lecture des preuves) :

**Proposition 5.18.** *Il existe des bijections simples entre*

1. *les TP-chemins de longueur  $2n + 2$  avec un pas  $V$  ;*
2. *les chemins sur  $\{D, U\}$  de longueur  $2n$  terminant en  $-2$ , tel que la hauteur atteinte après le dernier pas  $D$  est strictement plus grande que la hauteur minimale du chemin.*
3. *les chemins sur  $\{D, U\}$  de longueur  $2n$  terminant en  $-6$ .*

*Preuve:* 1.  $\leftrightarrow$  2. : soit  $w$  un TP-chemin de longueur  $2n + 2$  avec un pas  $V$  ; en tant que mot,  $w$  se décompose uniquement sous la forme

$$w = w_0 D^2 U U^t V w_1,$$

avec  $w_0$  et  $w_1$  des mots sur  $\{D, U\}$  et  $t \geq 0$ ;  $w_0$  est alors un mot positif, qui vérifie  $h(w_0) \geq 2$ . On transforme alors  $w$  en

$$w' = w_1 D w_0 D U^t,$$

qui a longueur  $2n$  et se termine bien à la hauteur  $-2$ . Il s'agit d'un élément de l'ensemble décrit au 2. de la proposition. D'après les propriétés de  $w_0$ , il est évident que la hauteur minimale de  $w'$  est atteinte après le préfixe  $w_1 D$ , et de là que  $w'$  appartient bien à l'ensemble décrit au 2.

On remarque que  $w_1 D$  constitue en fait le premier préfixe où la hauteur minimale est atteinte, ce qui permet aisément de construire l'inverse : pour  $P$  élément de l'ensemble décrit au 2., on cherche le premier instant où il atteint son minimum, donnant une factorisation  $P = x_1 D x_2 D U^i$  si ce premier sommet minimum est atteint après le pas  $D$  qui suit  $x_1$ . Le TP-chemin que l'on cherche est alors  $x_2 D^2 U^{i+1} V x_1$ , et on vérifie aisément que les procédures sont inverses l'une de l'autre.

2.  $\leftrightarrow$  3. : prenons maintenant  $w'$  un chemin tel que dans le point 2. Il se décompose sous la forme

$$w' = w_2 D w_3 D U^i,$$

avec  $i \geq 0$  où  $w_2 D$  est le premier préfixe de  $w'$  qui touche la droite  $y = -i - 3$  (la propriété du 2. assure justement de l'existence d'une telle décomposition) En s'inspirant du principe de réflexion d'André (cf. chapitre 2), on réfléchit alors  $w_3$  par rapport à cette droite  $y = -i - 3$ , ce qui revient à changer les pas  $D$  en  $U$  et réciproquement. En notant  $\widetilde{w}_3$  le mot réfléchi, on pose alors

$$w'' = w_2 D \widetilde{w}_3 D U^i.$$

On vérifie aisément que ce chemin termine à la hauteur  $-6$ , et est donc élément de l'ensemble décrit au 3. L'inverse est ici déterminé comme pour le principe de réflexion d'André. □

En composant les bijections  $\Phi$ , *code*, puis les bijections de 1. vers 2. et de 2. vers 3. dans la proposition précédente, on obtient une bijection entre les permutations avec une occurrence de  $31-2$  et les chemins du point 3. : or de tels chemin comportent nécessairement  $n-3$  pas montants  $U$ , dont on peut choisir les occurrences librement, ce qui montre qu'ils sont énumérés par  $\binom{2n}{n-3}$ ; on a donc bien compté bijectivement nos permutations.

**Remarque:** Il est aussi possible d'utiliser la correspondance de Françon-Viennot [31] pour trouver une preuve bijective de ce dernier résultat. En fait, cette correspondance induit une bijection entre les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  avec une occurrence de  $31-2$  et les chemins de Motzkin bicolores de taille  $n-1$ , dont un pas est distingué; ce pas doit de plus partir d'un sommet à une ordonnée supérieure ou égale à 1. On peut alors réaliser des manipulations très similaires à celles données plus haut pour montrer que ces derniers chemins sont comptés par  $\binom{2n}{n-3}$ .

Notons également que cette correspondance associe les permutations sans  $31-2$  aux chemins de Motzkin bicolores, qui sont comptés par les nombres de Catalan comme on l'a montré dans le chapitre 2.

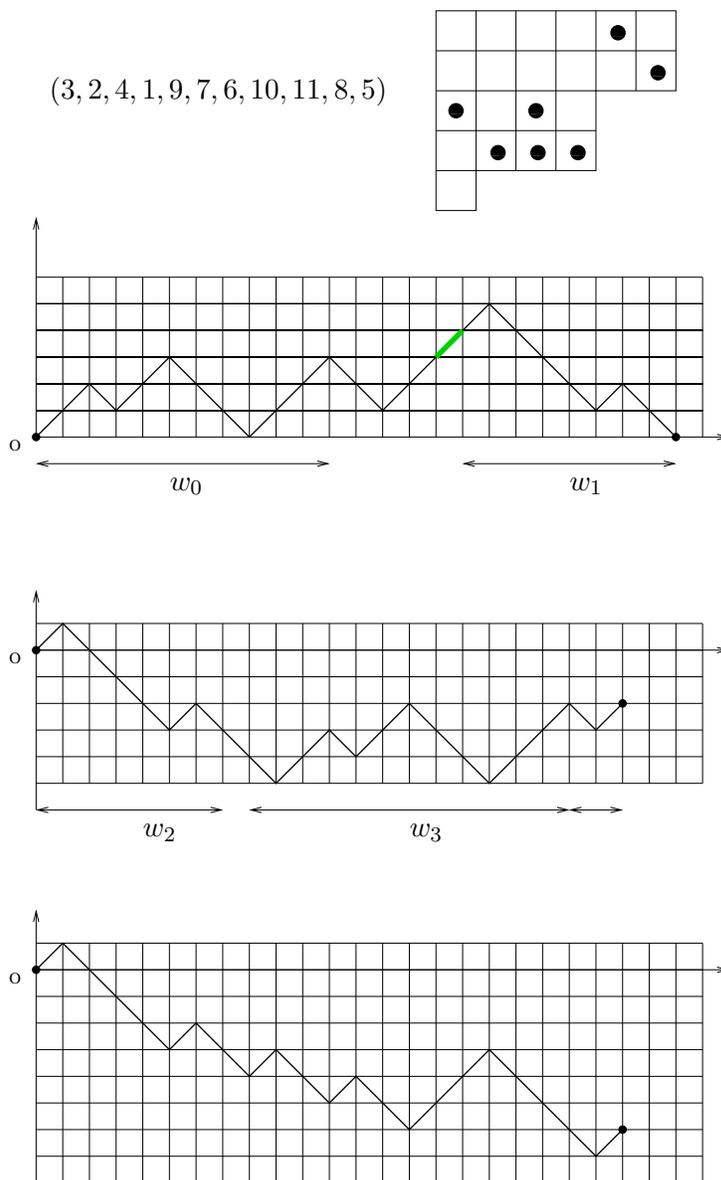


FIG. 5.4: Les étapes de la bijection montrant que les permutations de taille  $n$  avec une occurrence de 31-2 sont comptées par  $\binom{2n}{n-3}$

## 5.6 Tableaux de Bell

On va définir deux sous-classes des tableaux de permutations :

**Définition 5.19.** *On appelle tableau D-Bell (respectivement G-Bell) un tableau de permutation dans lequel tous les 1 nécessaires sont les 1 les plus à droite (resp. à gauche) de leur ligne*

On va d'abord montrer que ces deux classes sont comptées par les fameux *nombre de Bell*, définis plus bas. On montrera ensuite (via un résultat de Claesson [14]) que ces classes de tableaux sont en bijection avec les permutations qui évitent le motif 32-1, en préservant les formes :

**Théorème 5.20.** *Il existe des bijections entre*

1. les tableaux G-Bell de forme  $\lambda$  ;
2. les tableaux D-Bell de forme  $\lambda$  ;
3. les permutations  $\sigma$  évitant 32-1 telles que  $sh(\sigma) = \lambda$ .

### 5.6.1 Tableaux G-Bell

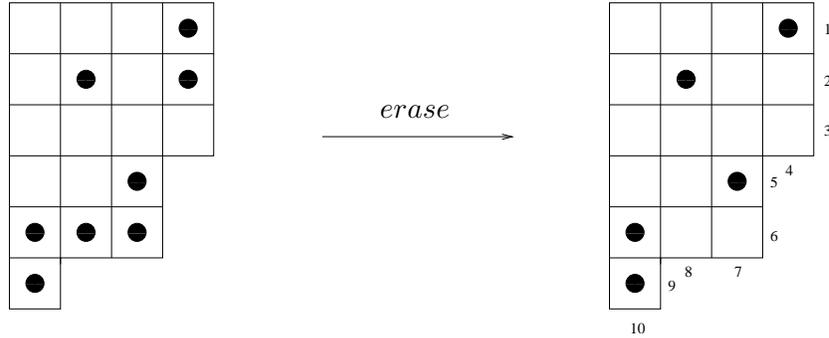


FIG. 5.5: Un tableau G-Bell et son P-tableau associé.

On va voir que le nombre de tableaux G-Bell de longueur  $n$  est égal au  $n$ -ième nombre de Bell  $B_n$  : il s'agit du nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , c'est-à-dire le nombre d'ensembles  $\{A_1, \dots, A_k\}$  où les  $A_i$  sont des parties non vides (appelés *blocs*), disjointes deux à deux, et dont l'union forme  $\{1, \dots, n\}$ .

Soit un tableau de permutations quelconque ; pour chaque  $\mathbf{1}$  qui a un  $\mathbf{1}$  à sa gauche et un  $\mathbf{1}$  au dessus, on le remplace par un  $\mathbf{0}$ . Appelons *erase* cette opération : les tableaux obtenus de cette manière vérifient alors la condition :

2'. Les cases telles qu'il existe un  $\mathbf{1}$  au dessus dans la même colonne et un  $\mathbf{1}$  à gauche dans la même ligne contiennent nécessairement un  $\mathbf{0}$ .

L'opération *erase* constitue alors une bijection entre les tableaux de permutations et les tableaux vérifiant la condition 2' au lieu de 2 dans la définition 5.1 ; ces derniers tableaux ont été introduits par Alexander Burstein [10].

Il est alors facile de voir que la fonction *erase* induit une bijection entre :

- les tableaux G-Bell de forme  $\lambda$ , et
- les remplissages de la forme  $\lambda$  par des  $\mathbf{0}$  et des  $\mathbf{1}$  qui ont au moins un  $\mathbf{1}$  par colonne, et au plus un  $\mathbf{1}$  par ligne.

Appelons *P-tableaux* ces derniers objets, qui sont proches des 0-1 tableaux de Leroux [43]. Montrons qu'ils sont en bijection avec les partitions de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , ce qui prouvera le résultat annoncé.

Soit  $T$  un *P-tableau*. Pour chaque colonne, on forme un bloc constitué du numéro de la colonne ainsi que des numéros des lignes qui ont un  $\mathbf{1}$  dans cette colonne. Pour chaque ligne sans  $\mathbf{1}$ , on forme aussi un bloc réduit à un singleton, constitué seulement du numéro de la ligne. Il est facile de voir que c'est une partition. Par exemple, pour le tableau de la Figure 5.5, la partition obtenue est

$$\{\{10, 9, 6\}, \{8, 2\}, \{7, 5\}, \{4, 1\}, \{3\}\}$$

Inversement, donnons nous  $\{A_1, \dots, A_k\}$  partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on veut lui associer  $T$  un P-tableau. La forme de  $T$  est donnée par :  $i$  numérote une colonne si et seulement si le bloc auquel appartient  $i$  est de taille au moins 2, et  $i$  en est le plus grand élément. Le remplissage consiste alors, pour chaque colonne  $i$ , à placer des  $\mathbf{1}$  dans les lignes dont les numéros sont dans le même bloc que  $i$ . Il est facile de voir que c'est l'inverse de la construction précédente.

### 5.6.2 Bijection entre tableaux G-Bell et D-Bell

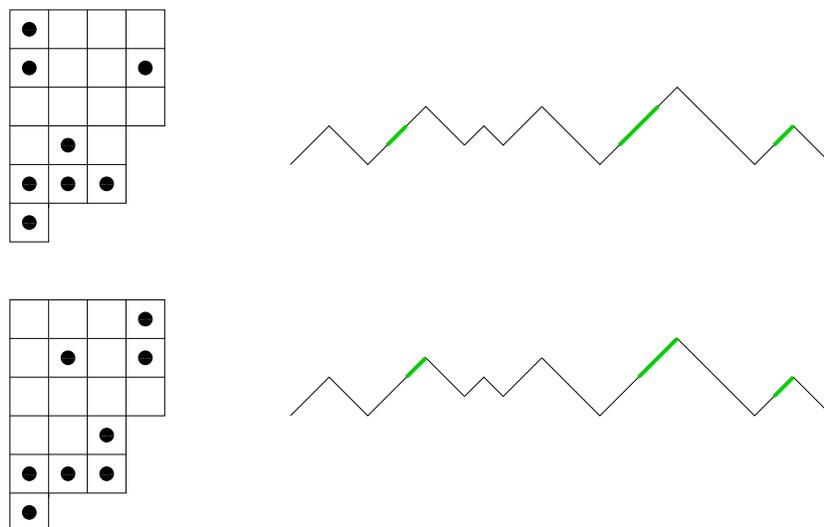


FIG. 5.6: Bijection entre D-Bell et G-Bell

Il est en fait assez aisé de donner une bijection entre G-Bell et D-Bell via le codage par les chemins. Rappelons qu'on appelle montée du TP-chemin un facteur maximal constitué de pas  $U$  et  $V$ .

Il est alors facile de voir que

- Les TP-chemins des tableaux D-Bell sont caractérisés par le fait que chaque montée est constituée d'un  $U$ , suivi d'un certain nombre de  $V$  (éventuellement aucun), suivi d'un  $U$  (ou pas).
- Les TP-chemins des tableaux G-Bell sont caractérisés par le fait que chaque montée est constituée d'un  $U$ , suivi éventuellement d'un autre, suivi d'un certain nombre de  $V$  (éventuellement aucun).

En terme de mots, cela signifie que pour un tableau D-Bell, chaque facteur maximal constitué de  $U$  et de  $V$  est de la forme  $UV^n$  ou  $UV^nU$ ; et pour un tableau G-Bell, un tel facteur est de la forme  $UV^n$  ou  $UUV^n$ ;  $n$  étant un entier positif ou nul. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 5.21.** *On considère l'application sur les TP-chemins qui consiste à transformer chaque montée  $Ua_1a_2 \cdots a_t$  en  $Ua_t a_{t-1} \cdots a_1$ .*

*Alors C'est une application involutive, qui préserve la forme et le nombre de  $\mathbf{1}$  des tableaux associés. Cette application échange bijectivement tableaux G-Bell et tableaux D-Bell.*

*Preuve:* L'aspect involutif est immédiat ; pour la forme, on voit qu'elle ne change pas grâce au critère donné après le Théorème 5.16. Sur chaque ligne, le nombre de **1** superflus et nécessaires est préservé, comme on le voit immédiatement. Enfin, l'involution échange bien tableaux G-Bell et D-Bell d'après la description de leurs TP-chemins associés.

□

### 5.6.3 Permutations qui évitent 32-1

Claesson, dans l'article [14], a montré que les permutations qui évitent 32-1 sont en bijection avec les partitions d'ensembles. Donnons son argument : soit  $A_1, A_2, \dots, A_k$  les différents blocs d'une partition ordonnés suivant l'ordre croissant de leur plus petit élément . De plus, écrivons pour chaque bloc les éléments par ordre croissant, hormis l'élément minimal qui est placé en fin, ce qui forme un mot noté toujours  $A_i$ . Alors le mot  $A_1 \cdots A_n$  est une permutation sans 32-1, et la correspondance est bijective.

La partition obtenue dans la partie précédente est ainsi associée à la permutation

$$4, 1, 8, 3, 2, 7, 5, 9, 10, 6.$$

On remarque alors que cette transformation entre partitions et permutations amène les plus grands éléments des blocs de cardinal au moins 2 sur les descentes. On en déduit finalement le Théorème 5.20.

On a donc obtenu une bijection préservant la forme entre permutations sans 32-1 et tableaux ; il est naturel de se demander comment étendre une telle bijection à toutes les permutations, de sorte que l'on “ contrôle” le nombre d'occurrences du motif 32-1 par une statistique (à trouver) sur les tableaux de permutations.

## Chapitre 6

# Tableaux de Rubans

La correspondance dite de Schensted [54] est une bijection entre les permutations et les tableaux de Young standards de même forme ; elle est rappelée dans le chapitre 2. Elle a été étendue dans de nombreuses directions, la plus fameuse étant sans doute la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth (RSK) entre matrices d'entiers et tableaux semi-standards [38] . Mais d'autres extensions existent : tableaux oscillants [13, 23], tableaux gauches, tableaux de  $k$ -rubans [56, 63].

Sergey Fomin a développé au tournant des années 90 une théorie générale de ces correspondances à la Schensted, voir les articles cf. [25–29]. Il s'agit d'unifier une grande partie des correspondances listées au dessus en interprétant ces tableaux comme des chemins dans des *graphes gradués* ; ainsi un tableau de Young est-il un chemin particulier dans le graphe dont les sommets sont les partitions, et  $(\lambda, \mu)$  est une arête si  $\mu$  s'obtient en ajoutant une case à  $\lambda$ . Ce graphe est couramment appelé graphe (ou treillis) de Young. D'autres objets combinatoires s'obtiennent dans ce même graphe en spécifiant les arêtes possibles à chaque étape, ou en modifiant les points de départ et d'arrivée : c'est ainsi que l'on construit les tableaux oscillants, ou les tableaux gauches. Ce sont les propriétés *locales* du graphe qui à elles seules permettent alors de donner diverses versions et extensions d'une même correspondance élémentaire de base

De plus, Fomin donne en parallèle une approche par l'algèbre linéaire à ses résultats ; cette approche est directement inspirée de l'article de Stanley [60]. Il apparaît que la grande majorité des résultats de Fomin possède à la fois une preuve bijective et une preuve algébrique.

Dans l'article [67], Dennis White définit quant à lui une extension de la correspondance de Schensted pour des couples de *tableaux de rubans* ; son but était de donner une preuve combinatoire d'une formule issue de la théorie des caractères. L'algorithme qui décrit sa correspondance est décrit par un mécanisme d'insertion, suivant la version classique de celui de Schensted.

Nous allons ici montrer comment la double approche de Fomin –bijective et algébrique– peut être adaptée pour s'appliquer au cas de la correspondance de White. Il y aura un effet bénéfique dans les deux sens : d'une part, on sera en mesure de généraliser le travail originel de White ; d'autre part, on aura de fait étendu le cadre d'applications des méthodes de Fomin à des graphes plus généraux que ceux qu'il a considérés dans les articles précités.

Nous aurons affaire ici à des énumérations signées : notons que pour l'approche

bijective, on devra faire appel au fameux *principe de Garsia et Milne*.

## 6.1 Définitions

On note  $\mathbf{Y}$  l'ensemble des partitions d'entiers, et  $\mathbf{Y}_n$  le sous-ensemble constitué par les partitions de taille  $n$ . Deux partitions  $\lambda \subseteq \mu$  (au sens de l'inclusion des diagrammes de Ferrers) définissent une *forme gauche*  $\mu/\lambda$ . On identifiera ici une forme gauche à la collection de cases  $\mu \setminus \lambda$ , lorsque  $\mu$  ou  $\lambda$  est bien défini : bien qu'en général deux formes gauches distinctes puissent définir le même ensemble de cases, cela ne créera pas d'ambiguïté dans ce cas. La *taille* de  $\mu/\lambda$  est son nombre de cases, et sera notée  $|\mu/\lambda|$ . La forme gauche  $(9, 8, 7, 4, 4, 1, 1)/(8, 6, 5, 2, 2, 1, 1)$  est donnée sur la droite de la Figure 6.1 ; elle est de taille 9.

On dit qu'un ensemble  $S$  de cases de  $\mathbb{Z}^2$  est *connexe* si, pour tout couple de cases  $c, c'$  de  $S$ , il existe une suite de cases  $c = c_0, c_1, \dots, c_t = c'$  dans  $S$  telles que deux éléments consécutifs de cette suite ont un côté commun.

**Définition 6.1.** *On appelle ruban une forme gauche connexe et qui ne contient pas de carré  $2 \times 2$  de cases.*

Un ruban est donc, de façon imagée, une mince forme gauche d'un seul tenant. exemples de rubans sont donnés sur la Figure 6.2. On remarque que la forme gauche de la précédente Figure 6.1 n'est pas connexe, et contient de plus un carré  $2 \times 2$  de cases : deux raisons qui font que ce n'est pas un ruban.

Soit  $r = \mu/\lambda$  un ruban non vide. Un tel ruban est dit  $\mu$ -ajoutable et  $\lambda$ -enlevable (que l'on me pardonne les néologismes). Sa *hauteur*  $ht(r)$  est défini comme le nombre de lignes qu'il occupe *diminué de 1* ; son *signe*  $\varepsilon(r)$  est  $(-1)^{ht(r)}$ . Par convention, un ruban vide est de signe positif, on posera donc  $\varepsilon(\lambda/\lambda) := 1$ . La case la plus en bas à gauche d'un ruban non vide est sa *queue*, et celle la plus en haut à droite est sa *tête* : un ruban ajoutable ou enlevable à une partition  $\lambda$  est donc entièrement déterminé dès que l'on connaît les positions de sa tête et sa queue.

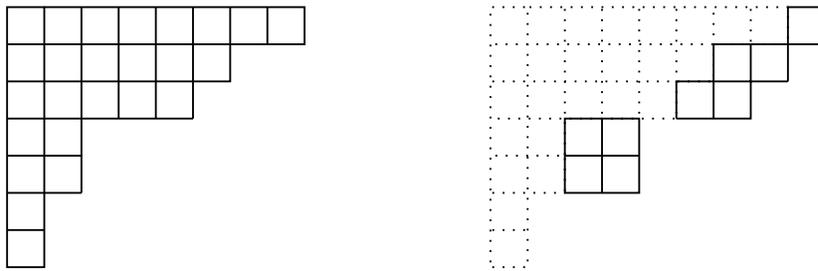


FIG. 6.1: Partition et forme gauche.

La Figure 6.2 donne deux exemples de rubans : celui de gauche a taille 4, hauteur 2 et signe  $+1$ , alors que celui de droite a taille 6, hauteur 1 et signe  $-1$ .

Pour  $i$  entier positif, on note  $Rib_i$  l'ensemble des rubans de taille  $i$ , et on pose  $Rib := \cup_{i>0} Rib_i$ . On pensera dorénavant à l'ensemble  $\mathbf{Y}$  comme aux sommets d'un graphe non orienté  $GR$ , dont les arêtes sont données par  $Rib$  ; chacune de ces arêtes

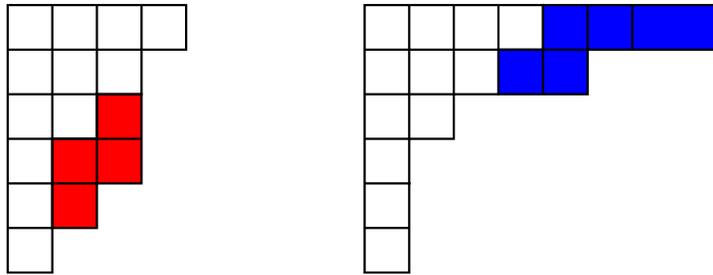


FIG. 6.2: Exemples de rubans.

porte de plus un signe qui est celui du ruban auquel elle correspond. Le *graphe des rubans*  $GR$  est organisé en *niveaux* donnés par les partitions d'une taille donnée, et on considèrera que les partitions plus grandes sont à un niveau plus élevé : ainsi ajouter un ruban correspond à monter d'un pas dans  $GR$ , et enlever un ruban à descendre d'un pas dans ce graphe.

La Figure 6.3 illustre les premiers niveaux de ce graphe  $GR$  ; les arêtes négatives sont représentées par des lignes en pointillé.

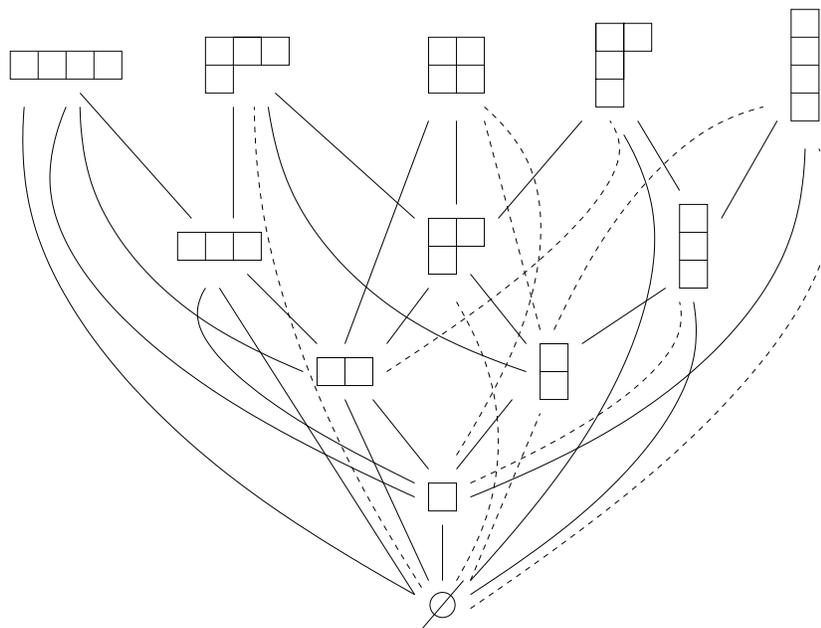


FIG. 6.3: Premiers niveaux du graphe des rubans

**Définition 6.2.** Un tableau de rubans de forme  $\lambda \in \mathbf{Y}$  et de longueur  $\ell$  est une numérotation des cases de  $\lambda$  par les nombres de 1 à  $\ell$  de sorte que :

- les entiers croissent au sens large dans chaque ligne et chaque colonne, et
- pour tout entier  $i \in \llbracket \ell \rrbracket$ , les cases numérotées par  $i$  forment un ruban non vide  $r^{(i)}$ , ajoutable aux cases numérotées par les entiers plus petits que  $i$ .

**Remarque:** Notons de suite une définition équivalente des tableaux de rubans qui sera fondamentale dans la suite : un tableau de rubans de forme  $\lambda$  et de longueur

$\ell$  est une chaîne de partitions  $\lambda^0 = \emptyset \subset \lambda^1 \subset \dots \subset \lambda^{k-1} \subset \lambda^k = \lambda$  telle que deux partitions successives forment un ruban non vide  $\lambda^{i+1}/\lambda^i$ . En d'autres termes, il s'agit d'un chemin de longueur  $\ell$  dans le graphe  $GR$ , qui va en croissant de  $\emptyset$  à  $\lambda$ .

L'ensemble des tableaux de forme  $\lambda$  et de contenu  $\ell$  est dénoté  $RT_{\lambda,\ell}$ . Le *signe*  $\varepsilon(P)$  d'un tableau  $P$  est le produit des signes des rubans  $r^{(i)}$  qui le composent. Le *contenu*  $c(P)$  est la composition de  $|\lambda|$  en  $\ell$  parts formée par la suite des tailles  $|r^{(i)}|$ , et on note  $RT_{\lambda,c}$  l'ensemble des tableaux de forme  $\lambda$  et de contenu  $c$  où  $c$  est une composition donnée.

La Figure 6.4 représente un tableau de forme  $(8, 6, 6, 2, 1)$ , de contenu  $(1, 6, 6, 3, 7)$  et de signe  $(-1)^0(-1)^2(-1)^2(-1)^1(-1)^2 = -1$ .

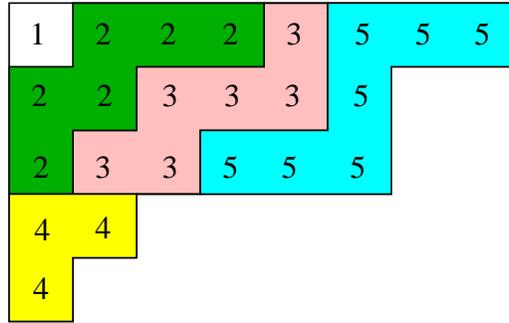


FIG. 6.4: Tableau de rubans.

## 6.2 Bijections et ensembles signés

On traitera dans ce chapitre d'ensembles pour lesquels chacun des éléments admet un signe *plus* ou *moins*. On va définir pour ces ensembles des notions et des outils spécifiques en vue d'une étude combinatoire.

**Définition 6.3.** *Un ensemble signé est un ensemble  $A$  muni d'une décomposition  $A = A^+ \sqcup A^-$  où le symbole  $\sqcup$  signifie que  $A^+$  et  $A^-$  ont une intersection vide.*

De façon équivalente, on peut définir  $A^+$  et  $A^-$  par une fonction  $\delta : A \rightarrow \{1, -1\}$ , avec la correspondance évidente  $A^+ = \delta^{-1}(\{1\})$  et  $A^- = \delta^{-1}(\{-1\})$ . Les éléments de  $A^+$  sont naturellement dits *positifs*, et ceux de  $A^-$  *négatifs*.

Une fonction  $f : A \rightarrow B$  entre 2 ensembles signés *préserve le signe* (resp. *échange les signes*) lorsque pour tout  $a \in A$ , les signes de  $a$  et  $f(a)$  sont les mêmes (resp. sont opposés). Pour les fonctions  $f : A \rightarrow A$ , on note  $Fix(f)$  l'ensemble des points fixes de  $f$ , c'est-à-dire les éléments  $a$  tels que  $f(a) = a$ .

**Définition 6.4** (Bijection signée). *Une bijection signée entre deux ensembles signés  $A$  et  $B$  est la donnée d'un triplet de fonctions  $(i_A, i_B, \phi)$  telles que  $i_A$  (resp.  $i_B$ ) est une involution de  $A$  (resp.  $B$ ) qui échange le signe en dehors de ses points fixes, et  $\phi$  est une bijection qui préserve les signes entre  $Fix(i_A)$  et  $Fix(i_B)$ .*

Le *cardinal signé*  $|A|_{\pm}$  de l'ensemble signé  $A$  est par définition  $|A^+| - |A^-|$ .

Une bijection signée entre  $A$  et  $B$  entraîne que  $|A|_{\pm} = |B|_{\pm}$ ; en effet on a

$$|A|_{\pm} = |Fix(i_A)|_{\pm} = |Fix(i_B)|_{\pm} = |B|_{\pm}.$$

L'égalité centrale est due à la bijection signée  $\phi$ , les première et troisième étant la conséquence du fait que  $i_A$  et  $i_B$  échangent les signes, et donc les paires d'éléments  $\{a, i_A(a)\}$  tels que  $a \neq i_A(a)$  ont une contribution nulle au cardinal signé de  $A$ , et de même pour  $B$  et  $i_B$ .

Réciproquement, l'égalité  $|A|_{\pm} = |B|_{\pm}$  équivaut à  $|A^+| + |B^-| = |B^+| + |A^-|$ . Une bijection  $\psi$  démontrant cette égalité, c'est-à-dire une bijection  $\psi$  entre les ensembles (non signés)  $A^+ \sqcup B^-$  et  $B^+ \sqcup A^-$ , est clairement équivalente à une bijection signée entre  $A$  et  $B$ . Cela justifie que les bijections signées sont les bonnes généralisations des bijections classiques, au sens où elles donnent bel et bien une explication combinatoire à l'égalité de deux cardinaux signés.

### Principe de Garsia et Milne

Garsia et Milne ont donné la première preuve complètement bijective d'une identité de Rogers-Ramanujan [33, 34] ; il s'agissait de montrer que parmi les partitions  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  de  $n$ , il y en a autant vérifiant  $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$  pour tout  $i < k$ , que vérifiant  $\lambda_i \equiv 1$  ou  $4$  modulo  $5$  pour tout  $i \leq k$ . Pour cela ils ont défini un principe général, que nous allons formuler ici en termes d'ensembles signés.

Soit  $A, B$  deux ensembles finis signés. On se donne également  $i_A, i_B$  deux involutions sur  $A$  and  $B$  respectivement, et  $\phi$  une bijection entre  $A$  et  $B$  (au sens classique). On suppose que  $\phi$  préserve le signe, et que  $i_A$  et  $i_B$  échangent les signes en dehors de leurs ensembles respectifs de points fixes. Dans ces conditions on a  $|Fix(i_A)|_{\pm} = |Fix(i_B)|_{\pm}$ . Le principe de Garsia et Milne est la construction explicite d'une bijection signée  $(\psi, j_A, j_B)$  entre  $Fix(i_A)$  et  $Fix(i_B)$  :

Soit  $a \in A$ . On lui applique  $\phi : A \rightarrow B$ , puis ensuite  $j_B$ , alternativement, les fonctions  $\phi^{-1} \circ i_B : B \rightarrow A$  et  $\phi \circ i_A : A \rightarrow B$ , en s'arrêtant dès que l'élément  $x$  obtenu est :

- soit dans  $Fix(i_A)$ , auquel cas on pose  $j_A(a) := x$  ;
- soit dans  $Fix(i_B)$ , auquel cas on pose  $\psi(a) := x$  (et  $j_A(a) := a$ ).

Pour définir  $j_B$  (et  $\psi^{-1}$ ), on réalise la même chose en partant de  $b \in B$ . Ces procédures terminent bien et donnent la bijection signée désirée : pour une preuve, voir par exemple [37, p.76].

## 6.3 Permutations d'équerres et Involutions d'équerres

On appelle *équerre* un ruban de forme  $\lambda/\emptyset$  : de tels rubans sont en bijection évidente avec les partitions du type  $\lambda = (t, 1, 1, \dots, 1)$ . Notons également qu'une équerre est caractérisée par sa taille et sa hauteur, c'est-à-dire par deux entiers positifs  $k, h$  vérifiant  $0 \leq h \leq k - 1$ .

**Remarque:** On a défini dans le chapitre préliminaire la notion d'équerre d'une case dans une partition, mais cette notion ne sera pas utilisée dans ce chapitre : donc lorsqu'on parlera d'équerre, ce sera toujours au sens défini au dessus.

### 6.3.1 Permutations d'équerres

Soit  $\ell$  un entier positif. Une *permutation d'équerres* de longueur  $\ell$  est un couple  $(\sigma, H)$  où  $\sigma$  est une permutation de  $[\ell]$  et  $H$  est une suite  $H = (H_1, \dots, H_\ell)$  de

$\ell$  équerres non vides. La taille d'une permutation d'équerres est  $\sum_i |H_i|$ , et son contenu est la composition  $(|H_1|, \dots, |H_\ell|)$ .

On représentera les permutations d'équerres dans une grille carrée de  $\ell^2$  cases. Par définition, la case  $(i, j)$  est alors à l'intersection de la  $i$ ème colonne en partant de la gauche et de la  $j$ ème ligne en partant du bas. Le remplissage correspondant à la permutation d'équerres  $(\sigma, H)$  consiste à mettre dans la case  $(i, \sigma(i))$  l'équerre  $H_i$ . La Figure 6.5 est une permutation d'équerres de longueur 5, taille 23 et contenu  $(6, 4, 6, 2, 5)$ ; on donne sa représentation dans une grille, ainsi qu'une représentation linéaire où la valeur  $\sigma(i)$  numérote les cases de l'équerre  $H_i$ .

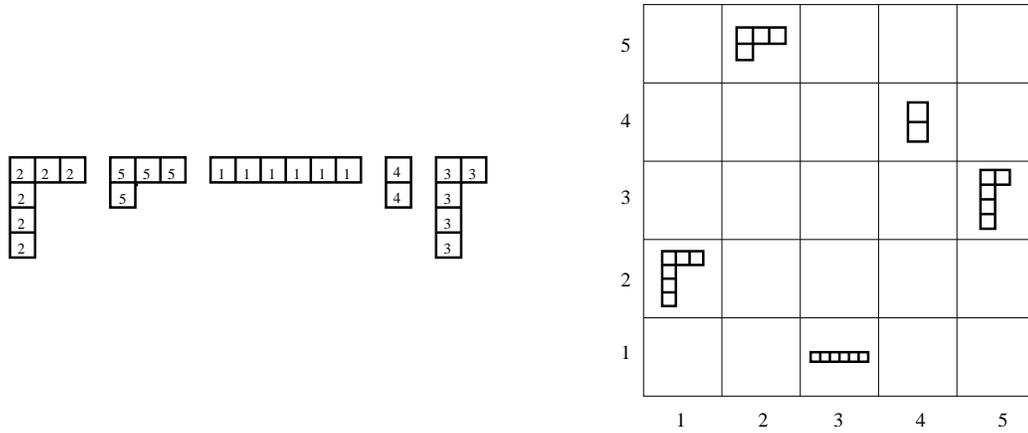


FIG. 6.5: Deux représentations d'une permutation d'équerres.

On a alors la proposition suivante pour l'énumération des permutations d'équerres de taille et de longueur donnée :

**Proposition 6.5.** *Le nombre de suites d'équerres de longueur  $\ell$  et de taille totale  $n$  est égal à  $\binom{n+\ell-1}{2\ell-1}$ .*

*Preuve:* On peut associer à chaque suite d'équerres une partie de taille  $2\ell - 1$  de  $\llbracket n + \ell - 1 \rrbracket$ , comme expliqué sur la Figure 6.6 : sur celle-ci, on a  $n = 23$  et  $\ell = 5$ , et donc  $n + \ell - 1 = 27$  et  $2\ell - 1 = 9$ , et le sous ensemble de cardinal 9 de  $\llbracket 27 \rrbracket$  en bijection avec la suite d'équerres illustrée est ici  $\{4, 7, 9, 12, 13, 19, 21, 22, 26\}$ .

En termes mathématiques, si l'on se donne  $2\ell - 1$  entiers  $1 \leq i_1 < \dots < i_{2\ell-1} \leq n + \ell - 1$ , et qu'on pose par convention  $i_0 = 0$  et  $i_{2\ell} = n + \ell$ , on leur associe alors la suite d'équerres  $(H_1, \dots, H_\ell)$ , où  $H_i$  est l'équerre de taille  $i_{2i} - i_{2i-2} - 1$ , et de hauteur  $i_{2i-1} - i_{2i-2} - 1$ . Il s'agit clairement d'une bijection, ce qui démontre la proposition. □

### 6.3.2 Involutions d'équerres

Une *involution d'équerres* est une permutation d'équerres  $(\sigma, H)$  telle que  $\sigma$  est une involution, et telle que, pour toute transposition  $(i, j)$  de  $\sigma$ , les équerres  $H_i$  et  $H_j$  sont identiques. Le *signe* d'une involution d'équerres est le produit des signes des équerres  $H_i$  telles que  $i$  est point fixe de  $\sigma$ .

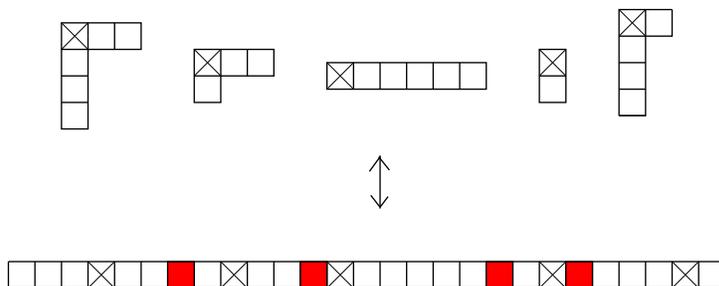


FIG. 6.6: Énumération des suites d'équerres.

**Remarque:** Une involution d'équerres *n'est pas* une permutation d'équerres telle que la permutation sous-jacente est une involution, car il existe une contrainte sur les équerres qui provient de l'involution.

Les involutions d'équerres correspondent dans les représentations sur la grille aux remplissages symétriques, dans le sens où les cases  $(i, j)$  et  $(j, i)$  sont remplies de manière identique.

On note  $\mathcal{HI}$  l'ensemble signé des involutions d'équerres,  $\mathcal{HI}(\mu)$  le sous ensemble des involutions de contenu  $\mu$ , et  $\mathcal{HI}_{spec}(\mu)$  les éléments de  $\mathcal{HI}(\mu)$  tels que toutes les équerres associées à des points fixes sont de taille impaire et de hauteur nulle (i.e. horizontales). Au vu de la définition du signe d'une involution d'équerres,  $\mathcal{HI}_{spec}(\mu)$  est un ensemble positif. La raison de l'introduction de ce dernier ensemble est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 6.6.** *Soit  $\mu$  une composition. Il existe une involution sur  $\mathcal{HI}(\mu) \setminus \mathcal{HI}_{spec}(\mu)$  qui échange les signes.*

*Preuve:* Soit  $I = (\sigma, H) \in \mathcal{HI}(\mu) \setminus \mathcal{HI}_{spec}(\mu)$  ; définissons  $i = \sigma(i)$  comme le plus petit entier contredisant la définition de  $\mathcal{HI}_{spec}(\mu)$ , et  $h$  la hauteur de l'équerre  $H_i$ . Si  $H_i$  est de taille paire, on définit  $H'_i$  l'équerre de même taille et de hauteur  $h + 1$  (resp.  $h - 1$ ) si  $h$  est pair (resp. impair). Si  $H_i$  est de taille impaire, et donc  $h \neq 0$  par définition de  $H_i$ , alors on définit  $H'_i$  l'équerre de même taille et de hauteur  $h + 1$  (resp.  $h - 1$ ) si  $h$  est impair (resp. pair).

Définissons  $H'$  comme la suite d'équerres égale à  $H$  sauf en position  $i$  où l'on remplace  $H'_i$  par  $H_i$ . Si on pose finalement  $f(I) = (H', \sigma)$ , alors on a l'involution désirée sur  $\mathcal{HI}(\mu) \setminus \mathcal{HI}_{spec}(\mu)$  : par définition de  $H'_i$ , il s'agit d'une équerre de signe opposé à celui de  $H_i$ , et  $f$  échange donc bien les signes.  $\square$

En corollaire, on a l'égalité suivante (qui montre notamment que  $|\mathcal{HI}(\mu)|_{\pm}$  est positif) :

**Corollaire 6.7.**  $|\mathcal{HI}(\mu)|_{\pm} = |\mathcal{HI}_{spec}(\mu)|.$

## 6.4 Résultats

Le premier résultat est une généralisation de la correspondance de Schensted.

**Théorème 6.8.** *Il existe une bijection signée  $(\emptyset, i, \phi)$  entre les permutations d'équerre de taille  $n$  et de longueur  $\ell$ , et les couples de tableaux de rubans de taille  $n$  et de longueur  $\ell$ .*

Cette bijection préserve les contenus au sens où : si  $i(P, Q) = (P_1, Q_1)$ , alors  $c(P) = c(P_1)$  and  $c(Q) = c(Q_1)$  ; et si  $\phi(\sigma, H) = (P, Q)$ , alors  $c(H) = c(Q)$  et  $c(\sigma(H)) = c(P)$ .

Si l'on se restreint au cas où les contenus sont des partitions, le théorème précédent est une reformulation du résultat de White [67]. L'idée ici est d'utiliser les idées de Fomin [26,27] dans la démonstration du résultat, ce qui éclaire et généralise la preuve de White, et se prête beaucoup plus facilement à des extensions.

Le théorème a les conséquences suivantes au niveau de l'énumération des tableaux de rubans :

**Corollaire 6.9.** Soit  $\mu, \nu$  deux compositions de  $n$  avec  $\ell$  parts.

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathbf{Y}_n \\ P \in RT_{\lambda, \mu}, Q \in RT_{\lambda, \nu}}} \varepsilon(P)\varepsilon(Q) = \delta_{\tilde{\mu}\nu} \cdot 1^{j_1}(j_1!)2^{j_2}(j_2!), \dots, \quad (6.4.1)$$

si  $\tilde{\mu} = [1^{j_1}, 2^{j_2} \dots]$ .

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathbf{Y}_n \\ P, Q \in RT_{\lambda, \ell}}} \varepsilon(P)\varepsilon(Q) = \binom{n + \ell - 1}{2\ell - 1} \cdot \ell! \quad (6.4.2)$$

On montrera comment ce dernier résultat peut également se déduire par des méthodes d'algèbres linéaires.

La correspondance de Schensted met en bijection involutions de  $\mathfrak{S}_n$  et tableaux standards de taille  $n$  (voir le Corollaire 2.5). On a une généralisation de ce résultat pour les tableaux de rubans :

**Théorème 6.10.** Il existe une bijection signée entre les tableaux de rubans de taille  $n$  et de longueur  $\ell$ , et les involutions d'équerres de taille  $n$  et de longueur  $\ell$  ; cette bijection préserve les contenus, au sens du Théorème 6.8.

La preuve des Théorèmes 6.8 et 6.10 est donnée dans la Section 6.6. Elle repose sur une extension des règles locales associées à la correspondance de Schensted, règles qui sont explicitées dans la section 6.5. Une approche algébrique aux résultats du Corollaire 6.9 est décrite dans la Section 6.7, et utilise les idées mises en place dans [26, 60]. Enfin la Section 6.8 est une incursion combinatoire dans la théorie des caractères du groupe symétrique, basée sur la règle de Murnaghan Nakayama [46, 48].

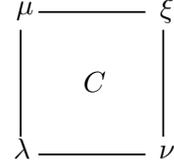
## 6.5 Règles locales

On a vu dans le chapitre préliminaire des *règles locales* qui induisaient la correspondance de Robinson-Schensted. Ici, on va étendre ces règles locales aux tableaux de rubans, le cas des tableaux de Young standards étant alors le cas particulier où les rubans non vides ont tous une taille de 1, et où les permutations d'équerres ne sont constituées que d'équerres de taille 1, c'est-à-dire de cases seules.

*Dans toute cette section  $\mu, \nu$  sont 2 partitions de taille respective  $m$  et  $n$ .*

Pour  $i$  entier positif ou nul, on définit  $\mathcal{U}_i(\mu, \nu)$  l'ensemble des partitions de taille  $\max(m, n) + i$  telles que  $\xi/\mu$  et  $\xi/\nu$  sont des rubans ;  $\mathcal{U}_i(\mu, \nu)$  est un ensemble signé par  $sgn(\xi) := \varepsilon(\xi/\mu) \cdot \varepsilon(\xi/\nu)$ . De manière similaire, on définit  $\mathcal{D}_i(\mu, \nu)$  l'ensemble des partitions  $\lambda$  de taille  $\min(m, n) - i$  telles que  $\lambda/\mu$  et  $\lambda/\nu$  sont des rubans ;  $\mathcal{D}_j(\mu, \nu)$  est un ensemble signé par  $sgn(\lambda) := \varepsilon(\mu/\lambda) \cdot \varepsilon(\nu/\lambda)$ . ( On remarque d'ores et déjà qu'en tant qu'ensembles signés,  $\mathcal{U}_i(\mu, \mu)$  et  $\mathcal{D}_i(\mu, \mu)$  sont constitués uniquement d'éléments positifs.)

On dessine un carré dont deux coins sont étiquetés par  $\mu$  et  $\nu$  comme illustré ci-contre. Le coin inférieur gauche sera étiqueté par des partitions  $\lambda$  éléments d'ensembles  $\mathcal{D}_i(\mu, \nu)$ . Dans le cas  $\lambda = \mu = \nu$ , la cellule  $C$  peut être marquée d'une équerre non vide, ou non marquée ; dans les autres cas, elle n'est jamais marquée.



Pour définir les règles locales, il est nécessaire d'utiliser quelques opérations sur les partitions et les rubans, déjà employées par d'autres auteurs ; ces définitions sont regroupées dans la Section 6.10.

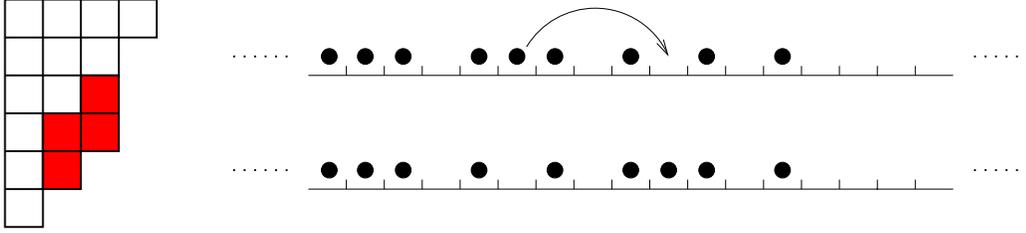
Maintenant, étant donnés  $((\lambda, C), \mu, \nu)$  inscrits sur un carré comme ci-dessus, ce qu'on entend par *appliquer une règle locale* est de trouver d'abord quelle règle précise s'applique suivant les cas énoncés ci-dessous, puis effacer  $\lambda$  et  $C$  du carré, et enfin inscrire le résultat de la règle en question sur un coin du carré : dans le coin supérieur droit pour les règles de D1 à D6, et dans le coin inférieur gauche pour la règle S.

**Règles directes :** dans les règles suivantes  $\lambda$  désigne un élément d'un ensemble  $\mathcal{D}_i(\mu, \nu)$ , et  $C$  est vide excepté (éventuellement) lorsque  $\lambda = \mu = \nu$ , auquel cas il peut s'agir d'une équerre quelconque. On note  $r, r'$  les rubans  $\mu/\lambda$  et  $\nu/\lambda$  ; ils peuvent être éventuellement vides.

- Si  $\lambda = \mu = \nu$  et que  $C$  est vide, alors  $\xi := \lambda$ . (D1)
- Si  $\lambda = \mu = \nu$  et que  $C$  est une équerre non vide  $eq$ , alors  $\xi := \lambda \cup first(\lambda, eq)$ . (D2)
- Si  $\lambda \neq \mu = \nu$ , alors  $\xi := \mu \cup next(\mu, \mu/\lambda)$ . (D3)
- Si  $\lambda = \mu \neq \nu$  (resp.  $\lambda = \nu \neq \mu$ ), alors  $\xi := \nu$  (resp.  $\xi := \mu$ ). (D4)
- Si  $\lambda \neq \mu \neq \nu$ , alors :
  - si  $r$  et  $r'$  n'ont ni la même tête ni la même queue, alors  $\xi := \lambda \cup bumpout(r, r')$ . (D5)
  - si  $r$  et  $r'$  ont la même tête mais des queues différentes, ou la même queue mais des têtes différentes, alors :
    - si  $slideout(\lambda, r, r')$  est défini, alors  $\xi := slideout(\lambda, r, r')$ . (D6)
    - sinon, on ne définit pas de partition  $\xi$ , et on pose  $\lambda := switchout(\lambda, r, r') \in \mathcal{D}_i(\mu, \nu)$ . (S)

**Règles inverses :** Dans les règles suivantes  $\xi$  est élément d'un ensemble  $\mathcal{U}_i(\mu, \nu)$ , et  $C$  est vide. On note  $r, r'$  les rubans  $\xi/\mu$  et  $\xi/\nu$ , qui peuvent être éventuellement vides. Le contenu  $C$  est implicitement laissé vide, sauf dans la règle (I2).

- Si  $\xi = \mu = \nu$ , alors  $\lambda := \xi$ . (I1)
- Si  $\xi \neq \mu = \nu$ , alors
  - Si  $prev(\xi, r) = \emptyset$ , on définit alors  $\lambda := \mu$  et  $C$  est l'équerre de taille  $|r|$  et

FIG. 6.7: Ajout d'un ruban sur  $\delta(\lambda)$ .

- de hauteur  $\text{ht}(r)$ ; (I2)
- sinon  $\lambda := \mu \setminus \text{prev}(\xi, r)$ . (I3)
- Si  $\xi = \mu \neq \nu$  (resp.  $\xi = \nu \neq \mu$ ), alors  $\lambda := \nu$  (resp.  $\lambda := \mu$ ). (I4)
- Si  $\xi \neq \mu \neq \nu$ , alors :
  - si  $r$  et  $r'$  n'ont ni la même tête ni la même queue, alors  $\lambda := \xi \setminus \text{bumpin}(r, r')$ . (I5)
  - si  $r$  et  $r'$  ont la même tête mais des queues différentes, ou la même queue mais des têtes différentes, alors :
    - si  $\text{slidein}(\xi, r, r')$  est défini, alors  $\lambda := \text{slidein}(\xi, r, r')$ ; (I6)
    - sinon, on ne définit pas de partition  $\lambda$ , et on pose  $\xi := \text{switchin}(\xi, r, r') \in \mathcal{U}_i(\mu, \nu)$ . (T)

**Proposition 6.11.** *Les règles D1 à D6 sont les inverses respectives des règles I1 à I6, et S et T sont des involutions. De plus, D1-D6 et I1-I6 préservent les signes entre  $\mathcal{D}_i(\mu, \nu)$  et  $\mathcal{U}_i(\mu, \nu)$ , alors que S and T échangent les signes, respectivement dans  $\mathcal{D}_i(\mu, \nu)$  et dans  $\mathcal{U}_i(\mu, \nu)$ .*

*Preuve:* Ces propriétés sont déjà connues : pour les règles D3,D4 et I3,I4, cela est démontré par Shimozono et White [56]; pour les autres règles, la preuve se trouve dans White [67]. On va néanmoins donner la preuve pour la règle S utilisant l'encodage des partitions par des suites doublement infinies  $\delta(\lambda)$ ; (cf. le chapitre 2). C'est d'ailleurs par cet encodage qu'est faite la preuve dans [56], mais pas dans [67]. Notre preuve est plus simple que celle de White, et nous donne l'occasion d'exposer le lien étroit entre les rubans et cet encodage des partitions.

Soit  $\lambda$  une partition, et  $\delta(\lambda) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  la suite infinie qui lui est associée, voir 2.2.3. Alors les rubans ajoutables (respectivement enlevables) à  $\lambda$  sont en bijection avec les indices  $i < j$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $\delta_i(\lambda) = 1$  et  $\delta_j(\lambda) = 0$  (resp.  $\delta_i(\lambda) = 0$  et  $\delta_j(\lambda) = 1$ ) : les indices  $i$  et  $j$  sont en correspondance respective avec les queue et tête des rubans en question. La partition obtenue en ajoutant (resp. enlevant) le ruban correspond à la suite obtenue en échangeant 0 et 1 aux positions  $i$  et  $j$ .

Dans cette optique, il est assez utile de penser aux suites  $\delta(\lambda)$  comme à des configurations de particules sur une ligne discrète infinie : les particules correspondent aux 1, les 0 s'interprétant comme des emplacements vides. Ajouter un ruban correspond alors à déplacer une particule vers la droite dans un emplacement vide; enlever un ruban correspond à déplacer une particule vers la gauche dans un emplacement vide. La Figure 6.7 consiste en un ruban  $\lambda/\mu$  avec les codes de  $\lambda$  et  $\mu$  sur la droite; la flèche illustre l'ajout du ruban à  $\lambda$  pour obtenir  $\mu$ .

On a le résultat suivant qui montre comment déterminer taille et hauteur des rubans dans cette représentation :

**Lemme 6.12.** Soit  $\lambda$  une partition,  $\delta(\lambda)$  sa suite associée, et  $i < j$  les indices de  $\delta(\lambda)$  correspondant à un ruban  $r$  ajoutable ou enlevable à  $\lambda$ . Alors

1. la taille de  $r$  est  $|r| = j - i$ .
2. la hauteur  $h$  de  $r$  est donnée par le nombre de 1 de la suite  $\delta(\lambda)$  situés strictement entre les indices  $i$  et  $j$ , c'est-à-dire ainsi  $h = |\{k \in \mathbb{Z} \mid i < k < j \text{ et } \delta_k(\lambda) = 1\}|$ .

*Preuve :* Il faut simplement utiliser le fait que les 1 correspondent aux segments verticaux de la frontière, et les 0 aux segments horizontaux ;  $j - i$  est donc égal au nombre de cases occupées par  $r$  (une par diagonale entre la tête et la queue), et chaque 1 entre  $i$  et  $j$  correspond au passage d'une ligne à une autre dans le ruban.  $\square$

Revenons aux règles locales. La donnée de  $\lambda, \mu, \nu$  pour le cas des rubans non vides dans les règles directes se traduit par l'encodage en  $\delta(\lambda)$  et deux paires d'indices  $i_1 < j_1$  et  $i_2 < j_2$  correspondant respectivement aux rubans  $\mu/\lambda$  et  $\nu/\lambda$ , avec  $\delta_{i_1}(\lambda) = 1, \delta_{j_1}(\lambda) = 0$  et  $\delta_{i_2}(\lambda) = 1, \delta_{j_2}(\lambda) = 0$ .

Il est facile de définir les opérations de la Section 6.10, et de là les règles locales, avec cette représentation ; nous allons le faire pour la règle  $S$ , et montrer que c'est une règle involutive qui échange les signes.

La règle  $S$  s'applique précisément lorsque l'un de ces deux cas est vérifié :

1.  $i_1 = i_2, j_1 \neq j_2$  et  $\delta_{j_1+j_2-i_1}(\lambda) = 1$ , ou
2.  $j_1 = j_2, i_1 \neq i_2$  et  $\delta_{i_1+i_2-j_1}(\lambda) = 0$

On note  $i$  la valeur commune de  $i_1$  et  $i_2$  dans le premier cas, et  $j$  la valeur commune de  $j_1$  et  $j_2$  dans le second cas. Alors l'application de la règle  $S$  consiste à définir  $\tilde{\lambda}$  comme la partition dont le code est obtenu à partir de celui de  $\lambda$  en échangeant 0 et 1 aux positions  $i, j_1, j_2$  et  $j_1 + j_2 - i$  dans le premier cas, ou aux positions  $i_1, i_2, j$  et  $i_1 + i_2 - j$  dans le second cas. Cela est illustré sur la Figure 6.8 : on est dans le cas 1. pour la partition du haut, et l'application de  $S$  donne la partition du bas. (Les 'x' représentent indifféremment des 1 ou des 0).

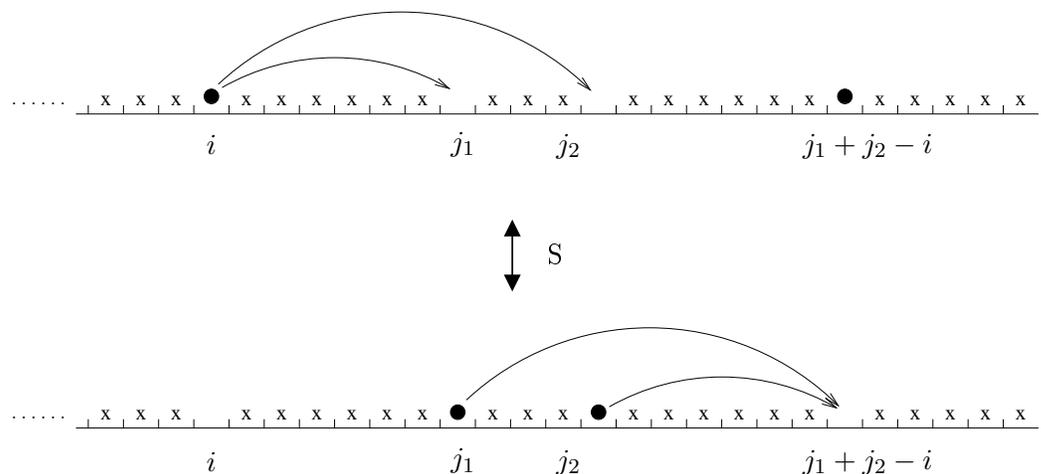


FIG. 6.8: La règle  $S$ .

On remarque que la partition  $\tilde{\lambda}$  est élément de  $\mathcal{D}_{j_1-i}(\mu, \nu)$ , comme l'était  $\lambda$  : sur la figure, on obtient bien la même partition –disons  $\mu-$  en déplaçant une particule

selon la longue flèche dans la première ou la seconde suite ; de même pour la flèche plus courte. On remarque aussi immédiatement que la règle est involutive : elle échange en fait les cas 1. et 2. définis plus haut, comme on le voit sur la Figure 6.8.

Montrons finalement que S échange les signes (on visualisera cela plus facilement en regardant la figure). Notons  $a$  (respectivement  $b, c$ ) le nombre de 1 dans  $\lambda$  strictement entre les indices  $i$  et  $j_1$  (resp.  $j_1$  et  $j_2$ , resp.  $j_2$  et  $j_1 + j_2 - i$ ) ; ces nombres sont les mêmes dans  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$ . En tant qu'éléments de l'ensemble signé  $\mathcal{D}_{j_1-i}(\mu, \nu)$ ,  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$  ont pour signes respectifs  $(-1)^x$  et  $(-1)^y$ , avec  $x = 2a + b$  et  $y = b + 2c + 1$ , ce qui donne bien des signes opposés car  $x$  et  $y$  sont de parités différentes. □

Pour finir, résumons les règles locales en termes de bijections signées, car cela nous sera utile lors de l'approche algébrique de la Section 6.7

**Théorème 6.13.** *Soient  $\mu, \nu$  deux partitions et  $i$  un entier strictement positif.*

- (a) *Il existe une bijection  $\phi_1$  entre  $\mathcal{U}_i(\mu, \mu)$  et  $\mathcal{D}_i(\mu, \mu) \sqcup \llbracket 0, i - 1 \rrbracket$ .*
- (b) *Si  $\mu \neq \nu$ , il existe une bijection signée  $(i_D, i_U, \phi_2)$  entre  $\mathcal{D}_i(\mu, \nu)$  et  $\mathcal{U}_i(\mu, \nu)$ .*

*Preuve:* Le point (a) est donné par l'application des règles D2 et D3 ; pour le point B, les involutions  $i_D$  et  $i_U$  sont données par les règles S et T respectivement, la bijection  $\phi_2$  étant constituée par l'union des règles D4, D5 et D6. □

Le Théorème 6.13 s'interprète comme l'existence d'une structure locale sur le graphe  $GR$  : étant donné  $\mu$  et  $\nu$  de taille  $m$  et  $n$ , il donne un lien entre les sommets adjacents à  $\mu$  et  $\nu$  situés au niveau  $\min(m, n) - i$  et au niveau  $\max(m, n) - i$ .

Les deux chapitres suivants exploitent cette structure locale pour en tirer des résultats globaux sur les tableaux de rubans : dans le chapitre 6.6, on en déduira une correspondance bijective globale démontrant les Théorèmes 6.8 et 6.10, alors que le chapitre 6.7 nous donnera une preuve de l'aspect uniquement énumératif de ces résultats, à l'aide d'endomorphismes linéaires vérifiant des relations reflétant précisément le Théorème 6.13.

## 6.6 Approche bijective

On a vu dans le chapitre de préliminaires comment passer de règles locales à une bijection globale dans le cas de la correspondance de Schensted. On va ici faire de même avec les règles locales que l'on vient de définir ; cela sera plus délicat, notamment à cause des règles S et T qui nous obligent en quelque sorte à rebrousser chemin dans la correspondance globale. De fait, la correspondance globale ne constituera pas simplement une application de règles directes pour aller des permutations aux tableaux, mais nécessitera des mouvements de *va-et-vient* dans la grille pour aboutir à la bijection signée du Théorème 6.8.

### 6.6.1 Bijection pour les permutations d'équerres

On fixe donc un entier positif  $\ell$ , et la grille  $G := G_\ell$  de taille  $\ell \times \ell$ , constituée de  $\ell^2$  carrés. Le carré  $(i, j)$  est celui qui se trouve sur la  $i$ ème colonne en partant de la gauche et la  $j$ ème rangée en partant du bas. On va maintenant vouloir appliquer

les règles locales de la Section 6.5 dans les carrés de la grille. Pour cela, ordonnons ces carrés (partiellement) par  $(i, j) \preceq (i', j')$  si et seulement si  $i \leq i'$  et  $j \leq j'$ .

On fixe dorénavant un ordre total noté  $\mathcal{O}$  étendant cet ordre partiel. Tout carré  $sq \neq (1, 1)$  a ainsi un prédécesseur noté  $pred(sq)$ ; et tout carré  $sq \neq (\ell, \ell)$  a un successeur  $succ(sq)$ . On définit une notation globale  $next(sq, dir)$  qui désigne  $succ(sq)$  lorsque  $dir = 1$ , et  $pred(sq)$  lorsque  $dir = -1$ ;  $next$  renvoie "non défini" dans les cas où  $pred$  et  $succ$  ne sont pas définis.

Étant donnés  $dir \in \{+1, -1\}$  et un carré  $sq$  de  $G$  :

- si  $dir = 1$ , et  $\mu, \nu, \lambda, C$  étiquettent  $sq$  comme dans la définition des règles locales, alors on applique la règle directe correspondante ;
- si  $dir = -1$ , et  $\mu, \nu, \xi$  étiquettent  $sq$  comme dans la définition des règles locales, alors on applique la règle inverse correspondante.

Appelons cette procédure `Apply_local_rule`; on écrira `loc := Apply_local_rule(dir, sq)` où `loc` est la règle locale qui a été appliquée.

On représente maintenant une permutation déquerres dans la grille  $G_\ell$  comme déjà fait, et on étiquette de plus les sommets de  $G_\ell$  des côtés inférieur et gauche par la partition vide. On peut maintenant décrire la bijection  $\phi$  du Théorème 6.8, ce que l'on fait de manière algorithmique :

**Algorithme  $\phi$  :**

Entrée : une permutation d'équerres  $(H, \sigma)$ .

Sortie : Couple  $(P, Q)$  de tableaux de rubans de même forme.

**début**

$sq := (1, 1)$ ;  $dir := 1$ ;

**répétez**

`loc := Apply_local_rule(dir, sq)` ;

**si** `(loc ∈ {S, T})` **alors**  $dir := -dir$  ; **fin si** ;

$sq := next(sq, dir)$  ;

**jusqu'à** ( $sq$  non défini) ;

**fin**

On montrera bientôt que l'on sort de l'algorithme parce que  $succ(\ell, \ell)$  n'est pas défini, auquel cas les sommets des côtés droit et supérieur de  $G_\ell$  sont étiquetés par des partitions qui forment deux tableaux de rubans de même forme (de même qu'on obtient des tableaux de Young standrad dans la correspondance de Schensted).

On va expliciter cet algorithme sur un exemple donné sur la Figure 6.6.1. On choisit comme ordre total sur les cases  $(i, j) < (i', j')$  si  $j < j'$ , ou si  $j = j'$  et  $i < i'$ . Un carré est donc *plus grand* qu'un autre s'il est dans une colonne strictement à sa droite, ou dans la même colonne mais au-dessus.

On débute avec une permutation d'équerres dessinée sur la grille  $G_3$  (A). On applique ensuite des règles locales directes pour atteindre la configuration B : les règles appliquées sont successivement D2, D4, D4, D4, D1, D2, D4 et D2. On doit alors appliquer la règle S, et la direction change (configuration C). Il faut bien remarquer que l'on a effacé tous les contenus des carrés visités ainsi que leur coin inférieur gauche ; on ne l'a pas fait lors de l'application des règles  $Di$  pour faire un dessin unique au lieu d'un pour chaque application de règle.

De là, on applique les règles inverses I5, I2 et I5 successivement pour se retrouver dans la configuration D. La règle T s'applique, et on change de direction. On atteint finalement la configuration F en appliquant les règles D3, D2, D3 et D6. On lit au final les tableaux  $P$  et  $Q$  respectivement sur les bords droit et supérieur du tableau.

*Preuve:* On veut prouver le Théorème 6.8, et montrer notamment que la construction  $\phi$  définie algorithmiquement plus haut vérifie bien l'ensemble des propriétés énoncées dans le théorème. On va voir en fait que cet algorithme est une conséquence du principe de Garsia et Milne : on va donc chercher à construire des ensembles signés  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  et des fonctions adéquates. Pour cela, un certain nombre de concepts doivent être définis.

On appelle *frontière* de la grille  $G_\ell$  un chemin du coin supérieur gauche de  $G_\ell$  au coin inférieur droit composé de pas sud et est ; il s'agit donc de  $\ell$  arêtes horizontales et  $\ell$  arêtes verticales. On appelle intérieur d'une frontière  $F$  les cases de  $G_\ell$  au sud ouest de  $F$ , et extérieur celles situées au nord est.

Un *bon étiquetage* de  $F$  est l'étiquetage de chacun des sommets de la frontière par une partition, de sorte que :

- les sommets extrêmes de la frontière, i.e. les coins en haut à gauche et en bas à droite de la grille, sont étiquetés par la partition vide.
- pour chaque arête horizontale de la frontière, dont le sommet gauche est étiqueté  $\lambda$  et celui de droite  $\mu$ ,  $\mu/\lambda$  est un ruban.
- pour chaque arête verticale de la frontière, dont le sommet du bas est étiqueté  $\lambda$  et celui du haut  $\mu$ ,  $\mu/\lambda$  est un ruban.

Donnons-nous une frontière  $F$  avec un bon étiquetage *label* : notons que *label* induit un étiquetage des arêtes de  $F$  par des rubans. Supposons de plus que certaines cases de la grille sont "coloriées" par des équerres non vides. Un tel coloriage *col* est dit *compatible* avec  $F, label$  si :

- les cases à l'intérieur de  $F$  sont vides.
- pour chaque arête horizontale  $h$  de  $F$  étiquetée par un ruban  $r$ , il y a exactement une case coloriée dans la colonne de  $h$  lorsque  $r$  est vide, et aucune si  $r$  n'est pas vide.
- pour chaque arête verticale  $h$  de  $F$  étiquetée par un ruban  $r$ , il y a exactement une case coloriée dans la ligne de  $h$  lorsque  $r$  est vide, et aucune si  $r$  n'est pas vide.

On rappelle qu'on a également fixé un ordre total  $\mathcal{O}$  sur les cases de  $G_\ell$ . On appelle  $F$  une  $\mathcal{O}$ -frontière lorsque les cases de  $G_\ell$  à l'intérieur de  $F$  sont plus petites que les cases à l'extérieur. En général, une  $\mathcal{O}$ -frontière définit deux cases de la grille,  $sq_{<}(F)$  qui est la plus grande case (pour  $\mathcal{O}$ ) qui se trouve à l'intérieur de la frontière, et  $sq_{>}(F)$  qui est la plus petite case qui se trouve à l'extérieur de la frontière ;  $sq_{<}(F)$  n'est pas défini si la frontière suit les bords gauche et bas de la grille, alors que  $sq_{>}(F)$  n'est pas défini si la frontière suit les bords haut et droit.

**Définition 6.14.** *Une configuration est un triplet  $(F, label, col)$  constitué d'une  $\mathcal{O}$ -frontière  $F$ , bien étiquetée par *label*, et d'un coloriage *col* des cases de  $G_\ell$  de la grille compatible avec *label*.*

En appliquant une règle locale directe dans  $sq_{>}(F)$ , ou une règle locale inverse dans  $sq_{<}(F)$ , on passe ainsi d'une configuration à une autre : une inspection minu-

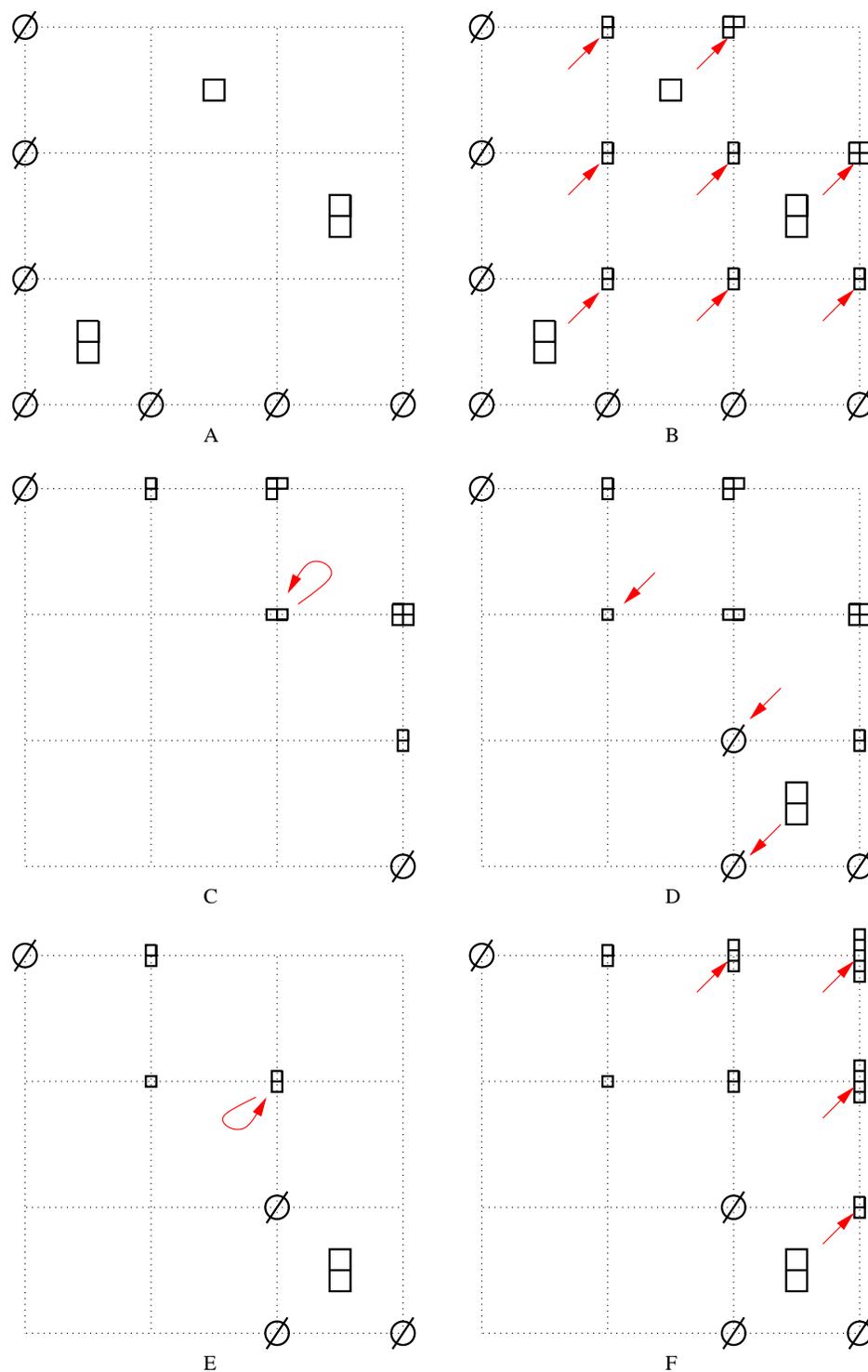


FIG. 6.9: La bijection principale.

tiouse de chacune des règles montre de fait que la compatibilité est à chaque fois respectée par l'application d'une règle.

Soit  $(F, label, col)$  une configuration de  $G_\ell$ . On peut pour tout  $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$  associer

à la colonne  $i$  un entier  $c_i > 0$  comme suit : si la colonne contient une équerre, alors  $c_i$  est égal à la taille de cette équerre ; sinon,  $c_i$  est égal à la taille du ruban qui étiquette l'arête horizontale de  $F$  apparaissant dans la colonne  $i$ . Par compatibilité de  $label$  et  $col$ , exactement un de ces cas a lieu. On associe de même un entier  $c'_i$  à la ligne  $i$ , et on dira que la configuration a comme contenu  $(c, c')$ , où  $c$  et  $c'$  sont les deux compositions  $(c_i)_i$  et  $(c'_i)_i$ . En appliquant une règle locale dans  $sq_>(F)$  ou  $sq_<(F)$ , on note alors que le contenu est préservé dans les configurations considérées.

On définit le *signe* d'une configuration  $(F, label, col)$  comme le produit des signes des  $2\ell$  rubans induits par l'étiquetage  $label$  sur les arêtes de  $F$  ; on rappelle que le signe du ruban vide est  $+1$ . Les étapes C et E de la Figure 6.6.1 montrent deux configurations : C et E ont toutes deux pour contenu  $((2, 1, 2), (2, 2, 1))$ , C est de signe négatif, et E est de signe positif.

Une permutation d'équerres  $(\sigma, H)$  est une configuration positive : la frontière consiste en les bords inférieur et gauche de  $G_\ell$ , dont les sommets sont tous étiquetés par  $\emptyset$ , et le coloriage est donné par la représentation de  $(\sigma, H)$  dans la grille. Le contenu  $(c, c')$  est donné par  $c = c(H)$  et  $c' = c(\sigma^{-1}(H))$ . Un couple  $(P, Q)$  de tableaux de rubans de longueur  $\ell$  et de même forme est une configuration : la frontière consiste en les bords supérieur et droit de  $G_\ell$ , dont les sommets sont étiquetés par  $P$  et  $Q$  comme auparavant, et les cases de la grille sont vides. Le signe de la configuration est le produit des signes de  $P$  et  $Q$ , et le contenu  $(c, c')$  est donné par  $c = c(Q)$  et  $c' = c(Q)$ . On identifiera dorénavant permutations d'équerres et paires de tableaux à ces configurations.

Une configuration  $(F, label, col)$  est dite *de type A* si la règle  $T$  s'applique dans le carré  $sq_<(F)$ , ou si c'est une permutation, c'est-à-dire quand  $sq_<(F)$  n'est pas défini ; elle est dite *de type B* si la règle  $S$  s'applique dans le carré  $sq_<(F)$ , ou si c'est un couple de tableaux de rubans, c'est-à-dire quand  $sq_>(F)$  n'est pas défini. On fixe deux compositions  $c_1$  et  $c_2$  de longueur  $\ell$  et de taille  $n$ . Notons  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\mathcal{B}$ ) les configurations de type A et de contenu  $(c_1, c_2)$  ; les configurations C et E de la Figure 6.6.1 sont de types  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  respectivement, pour le contenu  $((2, 1, 2), (2, 2, 1))$ .

On a une involution sur  $\mathcal{A}$  définie en appliquant la règle T dans le carré  $sq_<(F)$  lorsqu'il existe, et laissant fixes les permutations d'équerres ; de même on a une involution sur  $\mathcal{B}$  en appliquant la règle S dans le carré  $sq_>(F)$  lorsqu'il existe, et qui laisse fixes les couples de tableaux de rubans. On remarque que ces deux involutions échangent les signes par la proposition 6.23. On définit également une bijection  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  en appliquant les règles directes en partant de la case  $sq_>(F)$ , jusqu'à tomber dans une configuration de type  $\mathcal{B}$ . Comme on n'applique dans ce cas que des règles de type Di, le signe est préservé, toujours par la proposition 6.11.

Ce dernier paragraphe a fourni les fonctions nécessaires à l'application du principe de Garsia et Milne : la bijection signée obtenue entre permutations d'équerres et couples de tableaux de rubans vérifie alors exactement les propriétés du Théorème 6.8, ce qui achève la preuve.  $\square$

Montrons maintenant les égalités du Corollaire 6.11. Pour la première, la bijection signée du théorème implique que le terme de gauche est égal au nombre de permutations d'équerres de type  $(c, c')$  ; ce nombre est forcément nul si on ne peut pas passer de  $c$  à  $c'$  en changeant l'ordre des parts, car les équerres permettant le calcul des contenus sont les mêmes pour  $c$  et  $c'$ . Si  $\tilde{c} = \tilde{c}'$ , alors on est ramené pour

une part  $i$  apparaissant  $j_i$  fois, à calculer le nombre de permutations de longueur  $j_i$  composée d'équerres de taille  $i$ ; ce nombre est clairement  $i^{j_i} j_i!$ , et on obtient bien le terme de droite de la première égalité en multipliant ces nombre pour tous les  $i$ .

La seconde égalité est la conséquence immédiate du Théorème 6.8 et de la Proposition 6.5

### 6.6.2 Bijection pour les involutions d'équerres

La correspondance de Schensted, telle qu'exposée en 2.3.2, se restreignait immédiatement en une bijection entre involutions et tableaux standards; on va aboutir à quelque chose de similaire ici, entre involutions d'équerre et tableaux de rubans. Cependant, plusieurs précautions sont nécessaires pour faire une restriction correcte dans le cadre de la bijection signée du Théorème 6.8.

La bijection donnée dans le paragraphe précédent dépend de l'ordre total des cases de la grille. Or si l'on veut faire quelque chose de symétrique, on voudrait faire en sorte que l'ordre sur les cases soit en quelque sorte symétrique. Il est clair que ce n'est pas possible, sauf à *appliquer les règles de manière simultanée dans une case et sa symétrique*: il apparaît un obstacle si l'on veut faire cela dans le cas des permutations d'équerres générales, car on peut très bien avoir une règle S dans l'une des cases et une règle de type Di dans la case symétrique, si bien qu'on perd la structure symétrique de la frontière.

Cela montre qu'on ne peut faire une restriction pure et simple de la correspondance précédente. On considère maintenant un ordre total  $\mathcal{HO}$  sur  $HG_\ell$ , la demi-grille constituée des carrés  $(i, j)$  de  $G_\ell$  avec  $i \geq j$ . On suppose que cet ordre étend l'ordre  $\preceq$ , défini par  $(i, j) \preceq (i', j')$  si  $i \leq i'$  et  $j \leq j'$  comme on l'a vu. On a alors un ordre *partiel* sur les cases de  $G_\ell$ , avec  $(i, j)$  plus petit que  $(i', j')$  si et seulement si  $(\min(i, j), \max(i, j))$  est plus petit que  $(\min(i', j'), \max(i', j'))$  pour  $\mathcal{HO}$ ; on note encore  $\mathcal{HO}$  cet ordre partiel.

On considère maintenant les configurations telles que données dans la définition 6.14, à ceci près que la frontière est une  $\mathcal{HO}$ -frontière, définie de manière naturelle comme une frontière telle que les cases à l'intérieur sont strictement inférieurs pour  $\mathcal{HO}$  aux cases à l'extérieur. Une configuration  $(F, label, col)$  est dite *symétrique* si  $F, label$  et  $col$  sont symétriques par rapport à  $i = j$ . Enfin, on appelle *demi-configuration* la restriction à  $HG_\ell$  d'une configuration symétrique: notons que la frontière  $f$  est alors un chemin du coin supérieur gauche de  $HG_\ell$  à un sommet de la diagonale  $i = j$ . La Figure 6.10 illustre une demie configuration.

Pour une demi-configuration, *appliquer une règle locale* dans la case  $sq = (i, j)$  signifiera appliquer cette même règle dans la configuration symétrique correspondante dans les cases  $(i, j)$  et  $(j, i)$ , et restreindre le résultat obtenu à  $HG_\ell$  (on remarquera qu'on obtient le même résultat dans  $(i, j)$  et  $(j, i)$  parce que toutes les règles locales sont les mêmes pour  $\mu, \nu$  et  $\nu, \mu$ ).

On représentera les tableaux de rubans par des chaînes de partitions sur les sommets du bord supérieur, et les involutions d'équerres par les équerres de leur représentation dans  $G_\ell$  qui se trouvent dans  $HG_\ell$ . Le *contenu*  $c$  d'une configuration symétrique est du type  $(c, c)$ ; on appellera  $c$  le contenu de la demi-configuration associée. Le *signe* d'une demi-configuration  $(f, label, col)$  est le produit des signes des rubans étiquetant  $f$ , multiplié par le produit des signes des équerres apparaissant

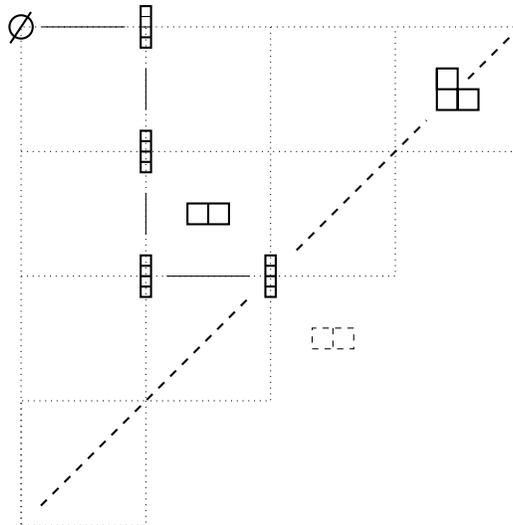


FIG. 6.10: Une demie configuration.

dans les cases  $(i, i)$ . Ainsi on a bien le signe sur  $\mathcal{HT}$  voulu, et le signe des tableaux de rubans, ce qui nous place dans le cadre du Théorème 6.10.

Notons  $\mathcal{HA}$  et  $\mathcal{HB}$  les pendants des ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de la preuve du Théorème 6.8 ; plus précisément, on note  $\mathcal{HA}$  et  $\mathcal{HB}$  les restrictions à  $HG_\ell$  des configurations symétriques de type  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  respectivement (avec l'ordre partiel  $\mathcal{HO}$ ). On définit les involutions sur  $\mathcal{HA}$  et  $\mathcal{HB}$  en appliquant les règles T et S correspondantes ; et on définit la bijection entre  $\mathcal{HA}$  et  $\mathcal{HB}$  en appliquant les règles D1-D6 à une configuration de  $\mathcal{HA}$  jusqu'à arriver à une configuration de  $\mathcal{HB}$ .

Il nous reste une chose à montrer pour appliquer le principe de Garsia et Milne, à savoir les propriétés de préservation et d'échange de signes. Il y a là quelque chose de nouveau par rapport à la preuve du Théorème 6.8, car les signes sont définis de manière différente ici. On devra en effet prendre en compte les signes des équerres des cases diagonales  $(i, i)$ , et le fait que lors de l'application d'une règle dans l'une de ces cases, une seule arête de la frontière est modifiée au lieu de deux, et donc la proposition 6.11 n'est pas applicable. On remarque qu'au niveau des cases de la diagonale, seules les règles D1, D2, D3 et I1, I2, I3 peuvent être appliquées, seules règles pour lesquelles  $\mu = \nu$ .

Pour les involutions sur  $\mathcal{HA}$  et  $\mathcal{HB}$ , il n'y a donc pas de problème, les règles S et T ne pouvant être appliquées sur la diagonale : ces involutions échangent donc bien les signes. Il reste le cas de la bijection de  $\mathcal{HA}$  vers  $\mathcal{HB}$  : on est ici amené à montrer que l'application d'une règle D1, D2 ou D3 dans une case  $i = j$  préserve le signe. Pour la règle D1, c'est trivial. Pour les règles D2 et D3, il faut regarder la définition de *prev* et *first* (Section 6.10) :  $first(\lambda, eq)$  est un ruban de même hauteur que  $eq$ , et  $next(\mu, \mu/\lambda)$  est un ruban de même hauteur que  $\mu/\lambda$ . Dans chacun de ces cas, cette propriété assure que le signe est bien préservé dans une demie configuration lorsqu'on applique une règle D2 ou D3 sur une case diagonale.

Au final, on a bien les hypothèses d'application du principe de Garsia et Milne, ce qui nous permet de construire la bijection signée entre involutions d'équerres et tableaux de rubans du Théorème 6.10.

□

On va pour finir reformuler en termes d'ensembles signés la conséquence de *prev, next*. Définissons  $\mathcal{U}_i(\mu)$  comme l'ensemble signé égal à  $\mathcal{U}_i(\mu, \mu)$  comme ensemble, mais avec pour signe  $\varepsilon(\lambda/\mu)$  si  $\lambda \in \mathcal{U}_i(\mu)$  ; de même,  $\mathcal{D}_i(\mu)$  est l'ensemble  $\mathcal{D}_i(\mu, \mu)$  avec le signe  $\varepsilon(\mu/\lambda)$ .

**Proposition 6.15** (Shimozono et White [56]). *Si  $\llbracket 0, i-1 \rrbracket$  est signé par  $\text{sgn}(h) = (-1)^h$ , il existe une bijection préservant le signe entre  $\mathcal{U}_i(\mu)$  et  $\mathcal{D}_i(\mu) \sqcup \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ .*

### 6.6.3 Lien avec les travaux antérieurs

Comme déjà annoncé, le Théorème 6.8 a été en partie démontré par White [67] (dans son article, White évoque à la fin de son article la possibilité de l'extension de son résultat pour atteindre la forme donnée ici, mais sans rien prouver). Dans l'article [63], les auteurs remarquent alors que si l'on se restreint à des rubans tous de même taille dans les tableaux, les règles S et T ne sont jamais appliquées, et donc on a une bijection entre les tableaux et permutations correspondants.

En fait, les règles D2 et D3 ne sont pas celles appliquées dans ces deux articles, mais d'autres règles *qui ne préservent pas le signe au sens de la Proposition 6.15*. Le Théorème 6.10 *n'est donc pas* une conséquence de celui de White ; il s'agit en fait d'une extension de la correspondance de Shimozono et White [56] (pour des rubans de taille fixée), dans lequel les auteurs introduisent les opérations *prev, next, first* qui forment les règles *D2, D3* et *I2, I3*.

## 6.7 Approche algébrique

La section précédente a donné des bijections généralisant la correspondance de Robinson Schensted. Nous allons ici donner une approche algébrique des résultats majeurs, dans l'esprit de Stanley [60] et Fomin [26].

### 6.7.1 Opérateurs linéaires

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique zéro. On considère  $\mathbb{K}\mathbf{Y} = \bigoplus_n \mathbb{K}\mathbf{Y}_n$ , l'espace vectoriel gradué des combinaisons linéaires formelles de partitions avec coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Pour  $i$  un entier positif on définit deux opérateurs linéaires  $U_i$  and  $D_i$  par leur action sur les éléments de la base  $\mathbf{Y}$  :

**Définition 6.16.**

$$U_i \lambda = \sum_{r=\mu/\lambda \in \text{Rib}_i} \varepsilon(r) \mu \quad ; \quad D_i \lambda = \sum_{r=\lambda/\mu \in \text{Rib}_i} \varepsilon(r) \mu.$$

$U_i$  et  $D_i$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{K}\mathbf{Y}$ , qui envoient le sous-espace  $\mathbb{K}\mathbf{Y}_n$  dans  $\mathbb{K}\mathbf{Y}_{n+i}$  et  $\mathbb{K}\mathbf{Y}_{n-i}$  respectivement. Ces deux opérateurs ont été définis par Stanley [60] quoique pour des objectifs différents.

Pour  $\lambda, \mu$  deux partitions, on pose  $\langle \lambda, \mu \rangle = 1$  si  $\lambda = \mu$  et 0 sinon. On étend en suite  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathbb{K}\mathbf{Y} \times \mathbb{K}\mathbf{Y}$  pour obtenir une forme bilinéaire. On remarque que  $U_i$  et  $D_i$  sont des endomorphismes duaux pour cette forme : on a en effet  $\langle U_i \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, D_i \mu \rangle$ , car chaque membre de l'égalité est égal à  $\varepsilon(r)$  si  $\lambda \subseteq \mu$  et  $r = \mu/\lambda$  est un ruban, et à 0 sinon.

La propriété fondamentale de ces endomorphismes est la suivante (on note  $AB = A \circ B$  la composition) :

**Proposition 6.17.**

$$\begin{aligned} D_i U_i &= U_i D_i + i \cdot \text{Id} \\ D_i U_j &= U_j D_i \quad \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

*Preuve:* Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux partitions. Il faut vérifier que

$$\begin{aligned} \langle D_i U_i \mu, \nu \rangle &= \langle U_i D_i + i \cdot \text{Id} \mu, \nu \rangle \\ \text{i.e. } \langle D_i U_i \mu, \nu \rangle &= \langle U_i D_i \mu, \nu \rangle + i \cdot \delta_{\mu, \nu} \\ \text{i.e. } \langle U_i \mu, U_i \nu \rangle &= \langle D_i \mu, D_i \nu \rangle + i \cdot \delta_{\mu, \nu} \end{aligned}$$

La deuxième égalité de la proposition équivaut à

$$\langle D_i U_j(\mu), \nu \rangle = \langle U_j D_i(\mu), \nu \rangle .$$

Prises ensembles, ces deux dernières égalités sont alors équivalentes à  $|\mathcal{U}_i(\mu, \mu)| = |\mathcal{D}_i(\mu, \mu)| + i$  et  $|\mathcal{U}_i(\mu, \nu)|_{\pm} = |\mathcal{D}_i(\mu, \nu)|_{\pm}$  pour  $\mu \neq \nu$ . Or c'est exactement le contenu du Théorème 6.13, ce qui termine la preuve.  $\square$

La première de ces deux relations est typique des *i-differential posets* (les ensembles ordonnés *i*-différentiels), définis par cf. Stanley [60, 61], et qui sont à la base du travail de Fomin [26] (notons cependant que nos opérateurs font intervenir des signes, ce qui n'est pas le cas dans les travaux cités.).

On choisit maintenant  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}((q))$ , le corps des séries de Laurent formelles en  $q$ . En fait on pourrait se restreindre aux séries formelles en  $q$   $\mathbb{Q}[[q]]$ , mais on a décidé ici de travailler avec des espaces vectoriels. De fait, on pourrait reprendre toute la théorie développée ici avec des modules libres sur un anneau commutatif de caractéristique nulle sans aucun changement.

On considère de plus  $\mathbf{Y}^{\mathbb{K}} = \prod_n \mathbb{K} \mathbf{Y}_n$ , l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbf{Y}$  dans  $\mathbb{K}$ . On écrira de telles fonctions comme des combinaisons linéaires *infinies* de partitions, avec coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Il est alors possible d'étendre la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathbb{K} \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}^{\mathbb{K}}$  sans encombre ; de même les opérateurs  $D_i$  et  $U_i$  pour tout  $i$  s'étendent également en des endomorphismes de  $\mathbf{Y}^{\mathbb{K}}$ .

Avec ces conventions, on définit maintenant  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  :

**Définition 6.18.**

$$\mathbf{U} = \sum_i q^i U_i \quad ; \quad \mathbf{D} = \sum_j q^j D_j$$

$\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  sont alors eux-mêmes bien des endomorphismes de  $\mathbf{Y}^{\mathbb{K}}$ .  $\mathbf{U}(\lambda)$  (respectivement  $\mathbf{D}(\lambda)$ ) est donc par définition la somme des partitions que l'on peut obtenir en ajoutant (resp. en enlevant) un ruban à  $\lambda$ , avec comme coefficient  $\varepsilon q^k$  si le ruban a taille  $k$  et signe  $\varepsilon$  (on notera que  $\mathbf{U}$  n'est pas un endomorphisme de  $\mathbb{K} \mathbf{Y}$ , ce qui nous a obligé à agrandir l'espace ambiant) . On a alors immédiatement le résultat suivant qui relie les opérateurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  à l'énumération des tableaux de rubans  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  :

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathbf{Y}_n \\ P, Q \in RT_{\lambda, \ell}}} \varepsilon(P)\varepsilon(Q) = [q^{2n}] \langle \emptyset, \mathbf{D}^\ell \mathbf{U}^\ell \emptyset \rangle \quad (6.7.1)$$

D'un autre côté, la Proposition 6.17 peut être reformulée en une seule équation portant sur  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{D} + \frac{q^2}{(1-q^2)^2} \text{Id} \quad (6.7.2)$$

*Preuve:* Il s'agit juste de développer le produit de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  et d'appliquer les relations de la Proposition 6.17. Le coefficient de  $\text{Id}$  qui apparaîtrait alors est  $\sum_{i \geq 1} i q^{2i}$ , qui est bien égal à la fraction rationnelle donnée.  $\square$

On utilisera également le résultat suivant de Stanley :

**Théorème 6.19** (Stanley [60]). *Si deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  vérifient  $DU = UD + rI$ , alors on a pour tout  $\ell$  positif*

$$D^\ell U^\ell = (UD + rI)(UD + 2rI) \cdots (UD + \ell rI) \quad (6.7.3)$$

*En conséquence, s'il existe un élément  $\widehat{O}$  de  $E$  such tel que  $D\widehat{O} = 0$ , alors on a  $\langle \widehat{O}, D^\ell U^\ell \widehat{O} \rangle = r^\ell \ell!$*

*Preuve:* On montre d'abord que

$$DU^\ell = U^\ell D + \ell r U^{\ell-1},$$

ce qui se fait par une récurrence immédiate. Ensuite on calcule

$$D^{\ell+1} U^{\ell+1} = D^\ell (DU^{\ell+1}) = D^\ell (U^{\ell+1} D + (\ell+1)r U^\ell) = D^\ell U^\ell (UD + r(\ell+1)I)$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

Or on a une relation du type du Théorème 6.19 pour  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$ , avec  $\widehat{O} = \emptyset$  et  $r = q^2/(1-q^2)^2$  : c'est l'équation (6.7.2). La deuxième identité du Corollaire 6.9 est alors la conséquence de l'équation (6.7.3), et du calcul suivant :

$$r^\ell \ell! = \ell! \cdot q^{2\ell} \cdot \frac{1}{(1-q^2)^{2\ell}} = \sum_{n \geq 2\ell} \left[ \binom{n+\ell-1}{2\ell-1} \cdot \ell! \right] q^{2n}.$$

Il reste à prouver l'autre égalité du Corollaire 6.9. On remarque que  $U_{\mu_\ell} \cdots U_{\mu_1} \emptyset$  est la combinaison linéaire des tableaux de contenu  $\mu$ , avec leurs signes respectifs comme coefficients. On en déduit que le terme de gauche dans le Corollaire 6.9 vaut  $\langle U_{\nu_\ell} \cdots U_{\nu_1} \emptyset, U_{\mu_\ell} \cdots U_{\mu_1} \emptyset \rangle$ , ce qui par dualité est égal à  $\langle \emptyset, D_{\nu_1} \cdots D_{\nu_\ell} U_{\mu_\ell} \cdots U_{\mu_1} \emptyset \rangle$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 6.20.** *Soient  $\mu, \nu$  deux compositions de  $\ell$  parts. Alors*

$$\langle \emptyset, D_{\nu_1} \cdots D_{\nu_\ell} U_{\mu_\ell} \cdots U_{\mu_1} \emptyset \rangle = \nu_\ell \times \sum_{\rho} \langle \emptyset, D_{\nu_1} \cdots D_{\nu_{\ell-1}} U_{\rho} \emptyset \rangle,$$

où  $\rho$  parcourt le multi ensemble des compositions de longueur  $\ell-1$  obtenues en supprimant une part de  $\mu$  de taille  $\nu_\ell$ .

**Preuve du Lemme :** La preuve consiste une nouvelle fois à appliquer les relations de la Proposition 6.17. On les applique ici avec  $D_{\nu_\ell}$  et avec les différents  $U_{\mu_i}$ , pour  $i$  valant successivement  $\mu_\ell, \dots, \mu_1$ , avec l'idée de déplacer le terme  $D_{\nu_\ell}$  "tout à droite". Deux cas peuvent se produire : si  $\mu_i \neq \nu_\ell$ , l'application de la seconde relation de 6.17 ne fait qu'échanger  $D_{\nu_\ell}$  et  $U_{\mu_i}$ , alors que pour les  $i$  tels que  $\mu_i = \nu_\ell$ , un terme  $\nu_\ell < \emptyset, D_{\nu_1} \cdots D_{\nu_{\ell-1}} U_\rho \emptyset >$  s'ajoute, où  $\rho$  est la composition obtenue en supprimant la part  $\mu_i$  dans  $\mu$ . Pour conclure, on remarque que lorsque  $D_{\nu_\ell}$  est passé à droite des  $U_{\mu_i}$ , le produit scalaire est nul car  $D_{\nu_\ell} \emptyset = 0$ .  $\square$

La preuve de la première partie du Corollaire se fait ensuite par induction sur  $\ell$  à partir du Lemme.

## 6.8 Colonne de la table des caractères de $\mathfrak{S}_n$

Le lien entre involutions d'équerre et tableaux de rubans est adapté à l'étude des sommes par colonne de la table des caractères de  $\mathfrak{S}_n$  (un rappel bref sur les représentations du groupe symétrique est fait dans le chapitre de préliminaires ; pour plus d'information, on se référera aux ouvrages [32, 53] qui ont une approche combinatoire). En effet, on a la règle de Murnaghan-Nakayama [46, 48] :

**Théorème 6.21.** *Soient  $\mu, \nu$  deux partitions de même taille. Alors*

$$\chi_\mu^\lambda = |RT_{\lambda, \mu}|_\pm$$

Cette règle donne une interprétation combinatoire au caractère  $\chi_\mu^\lambda$ , et montre en particulier qu'il s'agit d'un entier relatif.

### 6.8.1 Une formule pour $\sum_\lambda \chi_\mu^\lambda$

Soient  $\lambda, \mu$  des partitions de  $n$ , et  $\chi_\mu^\lambda$  le caractère  $\chi^\lambda$  évalué sur une permutation de type de cycles  $\mu$ . Alors  $\sum_\lambda \chi_\mu^\lambda$  est égal par la règle de Murnaghan-Nakayama à la somme signée des tableaux de rubans de contenu  $\mu$ . Par le Théorème 6.10, cette dernière quantité est elle-même égale aux involutions d'équerres de contenu  $\mu$ .

Définissons  $C(\mu) = \sum_\lambda \chi_\mu^\lambda$ , la somme des entrées de la colonne  $\mu$  de la table des caractères de  $\mathfrak{S}_n$ . On résume donc le résultat précédent par  $C(\mu) = |RT_\mu|_\pm = |\mathcal{HI}|_\pm$ . En utilisant finalement le Corollaire 6.7, on obtient l'égalité

$$C(\mu) = |\mathcal{HI}_{\text{spec}}(\mu)| \tag{6.8.1}$$

Cette équation montre notamment que  $C(\mu)$  est un entier *positif*; le théorème suivant nous dit exactement la valeur de cet entier.

**Théorème 6.22.** *Soit  $\mu = [1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots]$  une partition. Alors  $C(\mu) = \prod_{i>0} c_{i, m_i}$  où*

$$c_{i, m_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair et } m_i \text{ est impair;} \\ m_i!! \cdot i^{(m_i/2)} & \text{si } i \text{ est pair et } m_i \text{ est pair;} \\ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \binom{m_i}{m_i-2k} \cdot (2k)!! \cdot i^k & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

On va donner deux preuves, l'une bijective et l'autre algébrique.

**Première preuve :** On utilise la relation 6.8.1 ; le calcul de  $|\mathcal{HT}_{spec}(\mu)|$  se réduit au cas  $\mu = [i^{m_i}]$  où les parts ont toute même taille ; pour le cas général, il faut multiplier les contributions de chacune des parts.

Un élément de  $\mathcal{HT}_{spec}([i^{m_i}])$  est une involution sur  $[[1, m_i]]$  avec un choix d'une équerre parmi  $a_i$  possibles pour chaque cycle de longueur 2, et pas de points fixes si  $m_i$  est pair : on obtient donc bien le coefficient  $c_{i,m_i}$ .  $\square$

**Seconde preuve :** Donnons maintenant une preuve ne nécessitant pas le Théorème 6.10, et donc pas non plus l'égalité 6.8.1. Pour cela donnons d'abord une conséquence algébrique de la Proposition 6.15 au niveau des opérateurs  $D_i$  and  $U_i$  (considérés ici comme endomorphismes de  $\mathbf{Y}^{\mathbb{K}}$  ) ; on note  $\mathbf{Y}$  le vecteur  $\sum_{\lambda \in \mathbf{Y}} \lambda \in \mathbf{Y}^{\mathbb{K}}$ , et l'entier  $o_i$  vaut 1 lorsque  $i$  est impair et 0 sinon.

**Proposition 6.23.**  $D_i \mathbf{Y} = U_i \mathbf{Y} + o_i \cdot \mathbf{Y}$

En prenant le produit scalaire de chacun des membre avec  $\lambda$ , et en se souvenant que  $U_i$  et  $D_i$  sont en dualité, le résultat demandé est équivalent à

$$\sum_{\mu \in \mathcal{U}(\mu)} \varepsilon(\mu/\lambda) = \sum_{\mu \in \mathcal{D}(\mu)} \varepsilon(\lambda/\mu) + o_i,$$

ce qui est une conséquence immédiate de 6.15.  $\square$

On sait que  $C(\mu)$  est égal par la règle de Murnaghan-Nakayama à  $\langle D_\mu \mathbf{Y}, \widehat{\emptyset} \rangle$ . On va utiliser les résultats des propositions 6.23 et 6.17 pour calculer ce produit scalaire.

**Lemme 6.24.** *On a les formules suivantes :*

1. Pour  $m \geq 2$  et  $i > 0$ ,  

$$D_i^m \mathbf{Y} = o_i \cdot D_i^{m-1} \mathbf{Y} + (m-1)i \cdot D_i^{m-2} \mathbf{Y} + U_i D_i^{m-1} \mathbf{Y}.$$
2. Pour  $m \geq 1$  et  $i > 0$ ,  $D_i^m \mathbf{Y} = c_{i,m} \mathbf{Y} + U_i A_{i,m} \mathbf{Y}$ , où  $c_{i,m}$  est défini dans le Théorème 6.22, et  $A_{i,m}$  est un endomorphisme de  $\mathbf{Y}^{\mathbb{K}}$ .
3. Pour  $m \geq 1$ ,  $\langle D_\mu D_i^m \mathbf{Y}, \emptyset \rangle = c_{i,m} \langle D_\mu \mathbf{Y}, \emptyset \rangle$  si toutes les parts de  $\mu$  sont plus grandes que  $k$ .

*Preuve du lemme :* On a  $D_i^m \mathbf{Y} = o_i \cdot D_i^{m-1} \mathbf{Y} + D_i^{m-1} U_i \mathbf{Y}$  grâce à la Proposition 6.23. En utilisant la relation  $D_i U_i = U_i D_i + i \cdot I$  à  $m-1$  reprises dans le terme  $D_i^{m-1} U_i \mathbf{Y}$ , on obtient bien le 1. Pour le 2., il vient par induction immédiate sur la formule du 1. que l'on peut écrire pour tout  $m \geq 2$  que  $D_i^m \mathbf{Y} = b_{i,m} \mathbf{Y} + U_i B \mathbf{Y}$  pour un certain endomorphisme  $B$  et un entier  $b_{i,m}$  nécessairement égal à  $\langle D_i^m \mathbf{Y}, \emptyset \rangle$ . En injectant dans 1. et en prenant le coefficient de  $\emptyset$  dans chaque membre, il vient  $b_{i,m} = o_i b_{i,m-1} + (m-1) i b_{i,m-2}$ . Les  $c_{i,m}$  vérifient la même récurrence : ils énumèrent en effet  $\mathcal{HT}_{spec}([i^{m_i}])$  comme on l'a vu dans la première preuve du Théorème 6.22. Comme de plus  $b_{i,0} = c_{i,0} = 1$  et  $b_{i,1} = c_{i,1} = o_i$ , il vient  $b_{i,m} = c_{i,m}$  pour tous  $i, m$  et le 2. est montré. Enfin, grâce au 2., le membre de gauche de 3. est égal à

$$c_{i,m} \langle D_\mu \mathbf{Y}, \emptyset \rangle + \langle D_\mu U_i A_{i,m} \mathbf{Y}, \emptyset \rangle,$$

Or  $D_\mu$  commute avec  $U_i$  par la Proposition 6.17, et le second terme est alors nul car l'image de  $U_i$  est d'intersection nulle avec  $\mathbb{K}\emptyset$ .

□

La fin de la preuve du Théorème 6.22 est immédiate par induction sur  $|\mu|$ , en utilisant le 3. du lemme précédent.

### 6.8.2 Autres énumérations de $C(\mu)$

La formule du Théorème 6.22 n'est pas nouvelle, mais constituée à ma connaissance la première preuve complètement bijective (signée) de ce résultat se basant sur la règle de Murnaghan Nakayama.

Ainsi, le calcul de  $C(\mu)$  est fait dans le livre de Macdonald [44, p.122 ex.11], p.122 ex.11, et réalisé par des techniques de *fonctions symétriques*. Il y est établi que  $C(\mu)$  est égal au produit  $\prod_{i \geq 1} a_i^{(m_i)}$ , où  $a_i^{(m)}$  est le coefficient de  $t^m / (m!)$  dans  $\exp(t + \frac{1}{2}it^2)$  (*resp.*  $\exp(\frac{1}{2}it^2)$ ) si  $i$  est impair (*resp.* pair). En développant ces séries, on retrouve bien le Théorème 6.22.

Une autre preuve se trouve dans l'Exercice 7.69 de [62] ; la preuve est basée sur un résultat de théorie des caractères, dont la spécialisation au groupe symétrique s'énonce ainsi :

**Théorème 6.25** ([36, 62]). *Soit  $\sigma$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de type de cycles  $\mu$ . Alors  $C(\mu)$  est égal au nombre de racines carrées de  $\sigma$ , i.e. le nombre de permutations  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  vérifiant  $\tau^2 = \sigma$ .*

Notons qu'il est en fait possible de donner une preuve de ce théorème en mettant en bijection nos involutions d'équerres avec ces racines carrées.

On peut enfin utiliser la formule du Théorème 6.22 pour répondre à la question suivante : pour  $k$  un entier fixé, quelles sont les partitions  $\mu$  pour lesquelles  $C(\mu)$  vaut  $k$  ? Notons  $\mathcal{OD}$  l'ensemble des partitions avec des parts impaires et distinctes. Pour les premiers entiers, il vient :

- $C(\mu) = 0$  si et seulement si  $\mu$  a au moins une part paire avec une multiplicité impaire.
- $C(\mu) = 1$  si et seulement si  $\mu \in \mathcal{OD}$ .
- $C(\mu) = 2$  si et seulement si 1 a multiplicité 2 et  $\mu - 1^2 \in \mathcal{OD}$ , ou 2 a multiplicité 2 et  $\mu - 2^2 \in \mathcal{OD}$
- $C(\mu) = 3$  n'a pas de solution.

**Remarque:** Le nombre de solutions à  $C(\mu) = 0$  avec  $\mu \vdash n$ , c'est-à-dire le nombre de partitions de taille  $n$  qui ont au moins une part paire avec une multiplicité impaire, est la suite A085642 de l'Encyclopédie des suites entières de Sloane [58]. L'article [5] prouve d'ailleurs qu'une autre classe de partitions est en bijection avec  $\mathcal{OD}$ , à savoir les partitions avec au moins une part congrue à 2 modulo 4.

## 6.9 Extensions

Comme on l'a annoncé, les résultats donnés ici peuvent être aisément étendus.

On a considéré des paires de tableaux de rubans, qui sont des chemins montants puis descendants dans le graphe  $GR$  ; mais bien d'autres types de chemins peuvent être étudiés ici. Donnons un exemple : on peut considérer des chemins de longueur

$2\ell$ , de  $\emptyset$  à  $\emptyset$ , et de taille  $2n$ , au sens où la somme des tailles des  $2\ell$  rubans (c'est-à-dire des arêtes) est égale à  $2n$ . Ce sont donc des chemins *oscillants*, qui montent ou descendent librement dans le graphe  $GR$ . Si l'on note  $Osc_{n,\ell}$  cet ensemble *signé* de chemins, on peut alors montrer l'égalité :

$$|Osc_{n,\ell}|_{\pm} = (2\ell)!! \binom{n+\ell-1}{\ell-1}$$

Il est également possible de donner une version bijective signée de cela, en s'inspirant des tableaux oscillants classiques, correspondant au cas  $n = \ell$ , pour lesquels une approche par les diagrammes de croissance existe déjà (cf. Roby [52]).

De fait, comme annoncé dans l'introduction à ce chapitre, on a étendu le cadre de Fomin [26, 27]; expliquons rapidement comment. Considérons un graphe  $G = (V, E)$  avec une fonction signe  $\varepsilon : E \rightarrow \{+1, -1\}$ . On suppose que  $V$  est l'union disjointe d'ensembles finis  $V_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  où  $V_0$  est un singleton  $\{O\}$ . On dira que  $G$  est un graphe à *niveaux* (avec zéro).

Fixons  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique zéro. On introduit alors des opérateurs  $U_i, D_j$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{K}V$ , définis pour  $v \in V_k$  par  $U_i(v) = \sum_e \varepsilon(e)v'$  où  $e$  parcourt les arêtes de  $v$  vers les sommets  $v' \in V_{k+i}$ , et de manière similaire  $D_j$  qui envoie  $\mathbb{K}V_k$  sur  $\mathbb{K}V_{k-i}$ .

On dit que  $G$ , graphe à niveaux, est *autodual* s'il existe des entiers  $\alpha_i$  tels que :

$$\begin{aligned} D_i U_i &= U_i D_i + \alpha_i \cdot \text{Id} \\ D_i U_j &= U_j D_i \quad \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

Notons qu'on n'a défini que le cas autodual, le cadre de graphes différents en dualité n'est pas plus difficile (voir [26]). Ce qu'il y a de plus par rapport au cadre de Fomin sur les graphes gradués en dualité, c'est le caractère signé des arêtes, et le fait qu'on peut sauter plusieurs niveaux.

Il est alors possible d'utiliser les techniques algébriques de ce chapitre pour étudier les propriétés énumératives des graphes autoduaux généraux. Les relations locales correspondent à une certaine égalité de cardinaux signés sur le graphe, comme dans le cas de  $GR$ . Si on fixe des bijections signées qui prouvent combinatoirement ces relations, on a alors des règles locales nous permettant également d'avoir des correspondances bijectives globales pour des chemins sur ces graphes.

Notons que cela concerne des généralisations du Théorème 6.8 et de son corollaire : pour étendre le Théorème 6.10, on a besoin de propriétés additionnelles sur le graphe, analogues à la proposition 6.23 pour  $GR$ .

## 6.10 Opérations sur les rubans

On introduit ici les opérations sur les rubans nécessaires à la définition des règles locales de la Section 6.5.

- Soient  $r$  et  $r'$  deux rubans non vides ajoutables à une forme  $\lambda$ , tels que  $r$  et  $r'$  n'ont ni la même tête ni la même queue. Alors  $bumpout(r, r')$  est l'ensemble  $(r \setminus r') \cup (r' \setminus r) \cup (r' \cap r)_{\searrow}$  où  $A_{\searrow}$  est le translaté de  $A$  par le vecteur  $(1, -1)$ . L'opération  $bumpin(r, r')$  est défini similairement pour des rubans enlevables, en translatant l'ensemble des cellules communes entre  $r$  et  $r'$  par le vecteur

$(-1, 1)$ . Notons que ces définitions diffèrent légèrement de celles que l'on trouve habituellement. La Figure 6.11 illustre ces opérations, selon que  $r$  et  $r'$  sont disjoints, se chevauchent, ou sont inclus l'un dans l'autre.

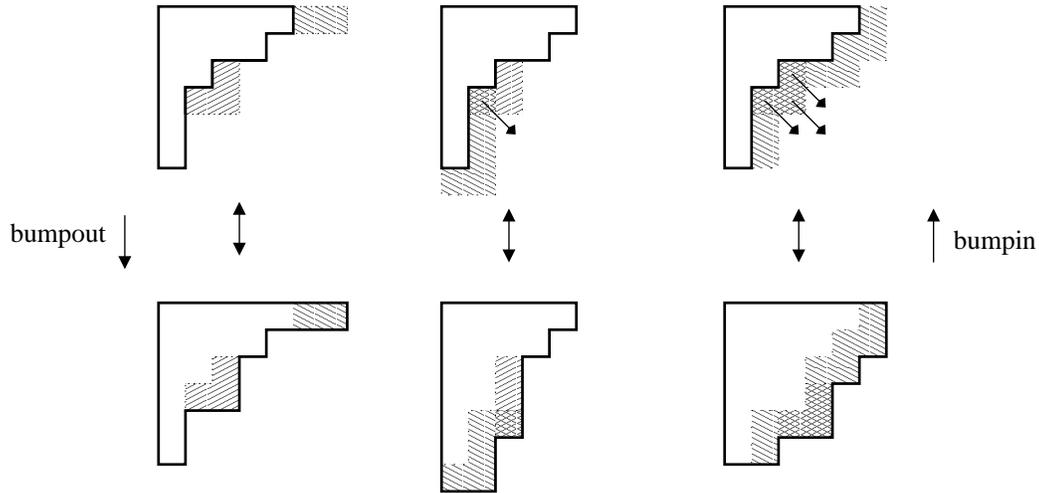
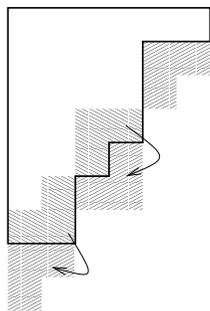


FIG. 6.11: Opérations *bumpin* et *bumpout*.

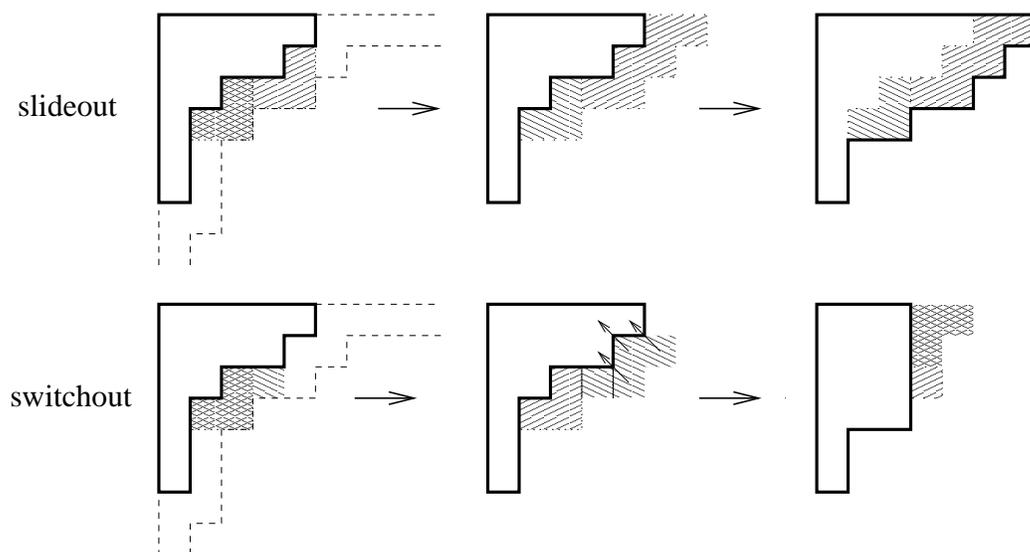
- Soit  $\lambda$  une partition,  $k$  un entier positif, et  $h$  un entier positif. Un résultat de Shimozono et White [56] affirme alors que les rubans de taille  $k$  et de hauteur  $h$  ajoutables et enlevables à  $\lambda$  sont listés par  $r_0 < r'_1 < r_1 < \dots < r'_t < r_t$  où :
  - $rib_1 < rib_2$  si la tête de  $rib_1$  est au nord-est de celle de  $rib_2$  ;
  - $(r_i)_{i=0..t}$  sont les rubans de taille  $k$  et de hauteur  $h$  ajoutables à  $\lambda$  et  $(r'_i)_{i=1..t}$  sont les rubans de taille  $k$  et de hauteur  $h$  enlevables à  $\lambda$ .
 Ce résultat permet de définir certaines opérations :
  - $h$  étant une équerre,  $first(\lambda, eq)$  est le ruban  $r_0$  défini ci-dessus, avec  $k = |r_0| := |eq|$  et  $h = ht(r_0) := ht(eq)$  ;
  - Si  $r'$  est un ruban enlevable à  $\lambda$ ,  $r' = r'_i$  pour un certain  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , alors  $next(\lambda, r') := r_i$ .
  - Réciproquement on définit  $prev(\lambda, r_i) = r'_i$  pour  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , et  $prev(\lambda, r_0) = \emptyset$ .

Sur la Figure 6.12, on illustre le résultat de Shimozono et White avec la partition  $\lambda = (6, 4, 4, 4, 3, 2, 2)$  et des rubans de hauteur 1 et de taille 3. Les flèches représentent *next*.

- Soit  $\lambda$  une partition, et  $r, r'$  deux rubans ajoutables à  $\lambda$  avec des queues égales mais des têtes différentes, et l'on supposera sans perte de généralité que  $|r| > |r'|$ . La *bande externe* de  $\lambda$  consiste en les cellules immédiatement à la droite ou en dessous de  $\lambda$ , plus les cellules sous la première colonne, et les cellules à droite de la première ligne ; cette bande est délimitée par des pointillés sur la Figure 6.13. On considère alors l'ensemble  $\tau$  des  $|r'|$  cellules contiguës de la bande externe positionnées au nord ouest de  $r$  et adjacentes à ce dernier par un côté. Alors :
  - si  $\tau \cup r$  forme un ruban ajoutable à  $\lambda$ , on définit  $slideout(\lambda, r, r') = \lambda \cup r \cup \tau$ .
  - dans le cas contraire, on définit  $switchout(\lambda, r, r') = (\lambda \cup r') \setminus \tau_{\swarrow}$ , où  $A_{\swarrow}$  est le translaté de  $A$  par le vecteur  $(-1, 1)$ .

FIG. 6.12: Opérations *first*, *next*, *prev*.

Si  $r$  et  $r'$  ont la même tête mais des queues distinctes, on procède de la même façon sur les transposés de  $\lambda, r, r'$ , et on transpose de nouveau à la fin. Les opérations *switchin* and *slidein* sont définies de la même façon sur les rubans enlevables à  $\lambda$  (voir White [67] pour des précisions supplémentaires.).

FIG. 6.13: Opérations *switchout* et *slideout*.



# Chapitre 7

## Conclusion

Tous les travaux que nous avons réalisés dans cette thèse peuvent donner lieu à des prolongements. Nous allons détailler quelques pistes possibles.

### Chemins sur le plan incisé

Dans le travail exposé ici, nous nous sommes intéressés aux chemins sur le plan incisé avec le point d'arrivée fixé  $(p(\mathfrak{S}), 0)$  : c'est d'une certaine façon le plus naturel possible, au sens où il est dans le prolongement de la droite interdite  $\mathcal{H}$ , et en est aussi proche que possible. Nous avons donné une bijection générale *expliquant* de manière satisfaisante les formules obtenues.

Il se trouve que pour certains ensembles  $\mathfrak{S}$ , il existe d'autres points d'arrivée pour lesquels l'énumération donne lieu à des formules closes très simples. Aucune preuve bijective de ces résultats d'énumération n'est cependant connue, bien que certains d'entre eux puissent être prouvés par des techniques de séries génératrices (cf. [6, 8, 71]). Par exemple, un de ces résultats simples, démontré dans [8] mais qui a résisté jusqu'alors à une approche bijective, est que les chemins du plan incisé de longueur  $2n + 1$  avec pas dans  $\{(1, \pm 1), (\pm 1, 1)\}$ , et *terminant en*  $(0, 1)$ , sont comptés par les nombres

$$\frac{4^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Des preuves bijectives de formules aussi simples seraient évidemment souhaitables. De plus, on constate que, au niveau des formules (démontrées ou conjecturées), des relations étonnantes se font jour entre des chemins avec des points d'arrivée et des ensembles de pas  $\mathfrak{S}$  *différents*. Il semble raisonnable d'espérer qu'une étude plus poussée de la structure des chemins sur le plan incisé mène à une preuve bijective de ces relations.

### Configurations de Fully Packed Loops

Nous avons démontré une conjecture de Zuber [74] concernant l'énumération d'une certaine classe de configurations FPL. De nombreuses conjectures restent néanmoins ouvertes concernant ces configurations. La plus intéressante est sans nul doute la conjecture de Razumov Stroganov, décrite dans l'introduction du chapitre 4. Pour montrer une telle conjecture de manière combinatoire, il faut trouver une bijection entre les objets comptés par chaque terme de l'identité  $2nA_n(\pi) = \sum_{i, \pi': h_i(\pi') = \pi} A_n(\pi')$ . Notons que certains cas particuliers non triviaux ont été prouvés, mais par des méthodes non bijectives [21, 73].

De nombreuses autres conjectures sont répertoriées dans [74]. La plus intrigante est peut être la suivante : il est conjecturé que le nombre de configurations FPL de taille  $n$  avec comme couplage associé  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}$ , est égal au nombre de configurations FPL de taille  $n-1$  sans contrainte de couplage, c'est-à-dire au nombre  $A_{n-1}$  de matrices à signes alternants.

Dans cette optique, les travaux de la dernière partie du chapitre 4 suggèrent qu'on pourrait attaquer ces problèmes d'énumération en regardant des tranches diagonales des configurations FPL ; et, pourquoi pas, tenter par ce biais de trouver une preuve bijective de l'énumération des matrices à signes alternants, ce qui constitue un des défis majeurs de la combinatoire bijective.

### Tableaux de permutations

Nous avons trouvé une bijection entre les permutations et les tableaux de permutations, bijection possédant de nombreuses propriétés ; de plus, la décomposition récursive utilisée pour la définir nous a permis d'encoder succinctement les tableaux, de façon à en déduire des résultats énumératifs sur les permutations.

Comme on l'a vu dans le chapitre 5, des paramètres simples sur les tableaux donnent lieu du point de vue énumératif aux nombres de Catalan, de Narayana, aux "ballot numbers", aux nombres de Bell ... Il apparaît que les tableaux de rubans sont en fait *la* bonne représentation des permutations lorsque l'ensemble des montées est fixé à l'avance. C'est un sujet extrêmement récent néanmoins : de nombreuses pistes restent encore à explorer, mais il est difficile de voir lesquelles seront les plus fructueuses. Détaillons quelques exemples :

On a vu que les tableaux L-Bell ou R-Bell de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations sans 32-1, en conservant la forme. Or on sait que les permutations sont en bijection avec les tableaux de permutations de même forme. Un problème naturel est donc trouver une statistique sur les tableaux qui possède la même distribution que le nombre d'occurrences du motif 32-1 sur les permutations, en trouvant une bijection adéquate qui préserve la forme.

Il paraît aussi souhaitable de trouver une description non récursive de la bijection principale du Théorème 5.4 (en espérant qu'une telle description existe !). Cela permettrait sans doute de faire apparaître d'autres propriétés de cette bijection, et de faire le lien avec les autres bijections existantes [10, 64].

On peut se demander sur quelles descentes sont envoyés les **1** de la première ligne par la bijection principale. Pourquoi ? Parce qu'on sait, d'après une involution définie dans [18], que la statistique "nombre de **1** dans la première ligne" a la même distribution que le nombre de lignes non restreintes moins un. Ainsi, la bijection nous donnerait automatiquement une statistique sur les permutations équidistribuée avec les RL-minima (dite *distribution eulérienne*).

### Tableaux de Rubans

Nous avons utilisé et généralisé des idées de Sergey Fomin pour donner un nouvel éclairage sur l'énumération signée des tableaux de rubans.

On peut essayer de généraliser certaines propriétés de la correspondance de Schensted aux tableaux de rubans : par exemple, y a-t-il un lien entre une permutation d'équerres et la longueur de la première ligne de la forme des tableaux de rubans associés ? On sait que, dans le cas de la correspondance de Schensted, cette longueur correspond à celle de la plus longue sous-suite croissante de la permutation

On peut également chercher des formules d'énumération des chemins dans le graphe  $GR$ . Pour cela, une partie de la riche étude de Fomin dans [26] peut certainement être transportée dans notre contexte. On peut se demander, parmi les formules d'énumération de chemins obtenues, lesquelles sont fondamentalement nouvelles, et leur interprétation éventuelle dans d'autres domaines mathématiques comme la théorie des représentations.

Enfin, un problème fondamental me semble être de trouver des exemples (ni triviaux ni trop artificiels) de *graphes à niveaux en dualité* décrits dans la section 6.9, autres que le graphe  $GR$ . Cela donnerait un peu plus de corps à la généralisation du travail de Fomin exposée à la fin du chapitre 6 ; on pourrait utiliser la théorie générale esquissée, pour obtenir automatiquement un grand nombre de résultats énumératifs et bijectifs nouveaux.



# Bibliographie

- [1] Eric Babson et Einar Steingrímsson. Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics. *Sém. Lothar. Combin.*, 44 :Art. B44b, 18 pp. (electronic), 2000.
- [2] Elena Barucci, Elisa Pergola, Renzo Pinzani, et Simone Rinaldi. A bijection for some paths on the slit plane. *Adv. in Appl. Math.*, 26(2) :89–96, 2001.
- [3] M. T. Batchelor, H. W. J. Blöte, B. Nienhuis, et C. M. Yung. Critical behaviour of the fully packed loop model on the square lattice. *J. Phys. A*, 29 :399–404, 96.
- [4] F. Bergeron, G. Labelle, et P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota.
- [5] Christine Bessenrodt et Jørn Olsson. On the sequence A085642. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, 2004.
- [6] Mireille Bousquet-Mélou. Walks on the slit plane : other approaches. *Adv. in Appl. Math.*, 27(2-3) :243–288, 2001. Special issue in honor of Dominique Foata’s 65th birthday (Philadelphia, PA, 2000).
- [7] Mireille Bousquet-Mélou. Algebraic generating functions in enumerative combinatorics and context-free languages. In *STACS 2005*, volume 3404 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 18–35. Springer, Berlin, 2005.
- [8] Mireille Bousquet-Mélou et Gilles Schaeffer. Walks on the slit plane. *Probab. Theory Related Fields*, 124(3) :305–344, 2002.
- [9] David M. Bressoud. *Proofs and confirmations*. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999. The story of the alternating sign matrix conjecture.
- [10] Alexander Burstein. On some properties of permutation tableaux. In *Permutation Patterns 2006, Reykjavik*, 2006.
- [11] F. Caselli, C. Krattenthaler, B. Lass, et P. Nadeau. On the number of fully packed loop configurations with a fixed associated matching. *Electron. J. Combin.*, 11(2) :Research Paper 16, 43 pp. (electronic), 2004/06.
- [12] Fabrizio Caselli et Christian Krattenthaler. Proof of two conjectures of Zuber on fully packed loop configurations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 108(1) :123–146, 2004.
- [13] Cedric Chauve et Serge Dulucq. A geometric version of the Robinson-Schensted correspondence for skew oscillating tableaux. *Discrete Math.*, 246(1-3) :67–81, 2002.

- 
- [14] Anders Claesson. Generalized pattern avoidance. *European J. Combin.*, 22(7) :961–971, 2001.
- [15] Anders Claesson et Toufik Mansour. Counting occurrences of a pattern of type  $(1, 2)$  or  $(2, 1)$  in permutations. *Adv. in Appl. Math.*, 29(2) :293–310, 2002.
- [16] Louis Comtet. *Advanced combinatorics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, enlarged edition, 1974. The art of finite and infinite expansions.
- [17] Sylvie Corteel. A simple bijection between permutation tableaux and permutations. arXiv :math.CO/0609700.
- [18] Sylvie Corteel et Lauren K. Williams. A Markov chain on permutations which projects to the PASEP. arXiv :math.CO/0609188.
- [19] Sylvie Corteel et Lauren K. Williams. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process. *Adv. in Appl. Math.*, to appear.
- [20] Jan de Gier. Loops, matchings and alternating-sign matrices. *Discrete Math.*, 298(1-3) :365–388, 2005.
- [21] P. Di Francesco et P. Zinn-Justin. Around the Razumov-Stroganov conjecture : proof of a multi-parameter sum rule. *Electron. J. Combin.*, 12 :Research Paper 6, 27 pp. (electronic), 2005.
- [22] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, et J.-B. Zuber. A bijection between classes of fully packed loops and plane partitions. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 64, 11 pp. (electronic), 2004.
- [23] Serge Dulucq et Bruce E. Sagan. The Robinson-Schensted correspondence for skew-oscillating tableaux. In *Proceedings of the 4th conference on Formal power series and algebraic combinatorics*, pages 129–142, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1995. Elsevier Science Publishers B. V.
- [24] P. Flajolet et R. Sedgewick. Analytic combinatorics. Book in preparation. available electronically from P. Flajolet’s homepage.
- [25] S. V. Fomin. The generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 155(Differentsialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh. VIII) :156–175, 195, 1986.
- [26] Sergey Fomin. Duality of graded graphs. *J. Algebraic Combin.*, 3(4) :357–404, 1994.
- [27] Sergey Fomin. Schensted algorithms for dual graded graphs. *J. Algebraic Combin.*, 4(1) :5–45, 1995.
- [28] Sergey Fomin. Schur operators and Knuth correspondences. *J. Combin. Theory Ser. A*, 72(2) :277–292, 1995.
- [29] Sergey Fomin et Dennis Stanton. Rim hook lattices. *Algebra i Analiz*, 9(5) :140–150, 1997.
- [30] J. S. Frame, G. de B. Robinson, et R. M. Thrall. The hook graphs of the symmetric groups. *Canadian J. Math.*, 6 :316–324, 1954.
- [31] Jean Françon et Gérard Viennot. Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d’Euler et nombres de Genocchi. *Discrete Math.*, 28(1) :21–35, 1979.
- [32] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.

- [33] Adriano Garsia et Stephen Milne. Method for constructing bijections for classical partition identities. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 78(4, part 1) :2026–2028, 1981.
- [34] Adriano Garsia et Stephen Milne. A Rogers-Ramanujan bijection. *J. Combin. Theory Ser. A*, 31(3) :289–339, 1981.
- [35] Ira Gessel et Gérard Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. in Math.*, 58(3) :300–321, 1985.
- [36] I. Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Dover Publications Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original [Academic Press, New York ; MR0460423 (57 #417)].
- [37] Adalbert Kerber. *Applied finite group actions*, volume 19 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [38] Donald E. Knuth. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, 34 :709–727, 1970.
- [39] Donald E. Knuth. *The art of computer programming*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, second edition, 1975. Volume 1 : Fundamental algorithms, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing.
- [40] Christian Krattenthaler. Permutations with restricted patterns and Dyck paths. *Adv. in Appl. Math.*, 27(2-3) :510–530, 2001. Special issue in honor of Dominique Foata’s 65th birthday (Philadelphia, PA, 2000).
- [41] Christian Krattenthaler. Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes. *Adv. in Appl. Math.*, 37(3) :404–431, 2006.
- [42] Greg Kuperberg. Another proof of the alternating-sign matrix conjecture. *Internat. Math. Res. Notices*, (3) :139–150, 1996.
- [43] Pierre Leroux. Reduced matrices and  $q$ -log-concavity properties of  $q$ -Stirling numbers. *J. Combin. Theory Ser. A*, 54(1) :64–84, 1990.
- [44] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, volume 12 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University, New Brunswick, NJ.
- [45] W. H. Mills, David P. Robbins, et Howard Rumsey, Jr. Alternating sign matrices and descending plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 34(3) :340–359, 1983.
- [46] F. D. Murnaghan. On the Representations of the Symmetric Group. *Amer. J. Math.*, 59(3) :437–488, 1937.
- [47] Philippe Nadeau. A general bijection for walks on the slit plane. In *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, 2006.
- [48] T. Nakayama. On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group. I. *Jap. J. Math.*, 18 :89–108, 1941.
- [49] Alexander Postnikov. Total positivity, Grassmannians, and networks. arXiv :math.CO/0609764v1.
- [50] A. V. Razumov et Yu. G. Stroganov. Combinatorial nature of the ground-state vector of the  $O(1)$  loop model. *Teoret. Mat. Fiz.*, 138(3) :395–400, 2004.

- [51] G. de B. Robinson. On the Representations of the Symmetric Group. *Amer. J. Math.*, 60(3) :745–760, 1938.
- [52] Tom Roby. The connection between the Robinson-Schensted correspondence for skew oscillating tableaux and graded graphs. *Discrete Math.*, 139(1-3) :481–485, 1995. Formal power series and algebraic combinatorics (Montreal, PQ, 1992).
- [53] Bruce E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [54] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, 13 :179–191, 1961.
- [55] M. P. Schützenberger. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scand.*, 12 :117–128, 1963.
- [56] Mark Shimozono et Dennis E. White. Color-to-spin ribbon Schensted algorithms. *Discrete Math.*, 246(1-3) :295–316, 2002. Formal power series and algebraic combinatorics (Barcelona, 1999).
- [57] Rodica Simion et Frank W. Schmidt. Restricted permutations. *European J. Combin.*, 6(4) :383–406, 1985.
- [58] Neil Sloane. On-line encyclopedia of integer sequences. Accessible from N. Sloane’s homepage.
- [59] Richard P. Stanley. Theory and application of plane partitions. I, II. *Studies in Appl. Math.*, 50 :167–188 ; *ibid.* 50 (1971), 259–279, 1971.
- [60] Richard P. Stanley. Differential posets. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(4) :919–961, 1988.
- [61] Richard P. Stanley. Variations on differential posets. In *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, volume 19 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 145–165. Springer, New York, 1990.
- [62] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.
- [63] Dennis W. Stanton et Dennis E. White. A Schensted algorithm for rim hook tableaux. *J. Combin. Theory Ser. A*, 40(2) :211–247, 1985.
- [64] Einar Steingrímsson et Lauren Williams. Permutation Tableaux and Permutation Patterns. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(2) :211–234, 2007.
- [65] Marc A. A. van Leeuwen. Edge sequences, ribbon tableaux, and an action of affine permutations. *European J. Combin.*, 20(2) :179–195, 1999.
- [66] Xavier Viennot. Catalan tableaux, permutation tableaux and the asymmetric exclusion process. Gascom’06, 2006.
- [67] Dennis E. White. A bijection proving orthogonality of the characters of  $S_n$ . *Adv. in Math.*, 50(2) :160–186, 1983.
- [68] Benjamin Wieland. A large dihedral symmetry of the set of alternating sign matrices. *Electron. J. Combin.*, 7(1) :Research Paper 37, 13 pp. (electronic), 2000.

- 
- [69] Lauren K. Williams. Enumeration of totally positive Grassmann cells. *Adv. Math.*, 190(2) :319–342, 2005.
- [70] Lauren K. Williams. A conjecture of Stanley on alternating permutations. arXiv :math.CO/0702808, 2007.
- [71] Guoce Xin. Proof of a conjecture on the slit plane problem. *Discrete Math.*, 282(1-3) :281–287, 2004.
- [72] Doron Zeilberger. Proof of the alternating sign matrix conjecture. *Electron. J. Combin.*, 3(2) :Research Paper 13, approx. 84 pp. (electronic), 1996. The Foata Festschrift.
- [73] P. Zinn-Justin. Proof of the Razumov-Stroganov conjecture for some infinite families of link patterns. *Electron. J. Combin.*, 13(1) :Research Paper 110, 15 pp. (electronic), 2006.
- [74] J.-B. Zuber. On the counting of fully packed loop configurations : some new conjectures. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 13, 15 pp. (electronic), 2004.