

TD 2: CHAÎNE DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2024-2025

1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q .

- (a) Rappeler la définition de l'irréductibilité.
- (b) Donner un exemple où $(X_n)_{n \geq 0}$ n'est pas irréductible.
- (c) Donner un exemple où il existe $i \neq j$ tels que $Q_{i,j} = 0$ et la chaîne est irréductible.
- (d) Soit $N \geq 0$ fixé. Donner un exemple où il existe i, j tels que pour tout $k \leq N$, $(Q^k)_{i,j} = 0$ mais la chaîne est irréductible.

2. Maladie contagieuse

Une maladie s'attrape avec une probabilité 0,05. Quand on l'a attrapée on peut soit en guérir soit acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, par ailleurs, 1 personne sur 5 est naturellement immunisée.

- (a) Modéliser l'état d'un individu dans la période de temps $(n, n + 1)$ par une chaîne de Markov. Donner son graphe, sa loi initiale et sa matrice de transition.
- (b) Classifier les états.
- (c) Quelle est la probabilité qu'une personne attrape la maladie 2 fois de suite et s'en sorte sans séquelle mais non immunisée ?
- (d) Existe-t-il une probabilité invariante ? Est-elle unique ? Pourquoi ?

3. Jeu de soccer

Le soccer se joue à 2 équipes, composées chacune de 10 joueurs et 1 goal. Chaque équipe se partage sur le terrain en 3 zones : défense-centre-attaque (ex: une configuration 3 – 4 – 4 correspond à 3 défenseurs, 4 milieu et 4 attaquants). On supposera que tous les joueurs sont de niveau équivalent.

On regarde la position de la balle, qui ne peut être qu'à 5 endroits : but de gauche, défense gauche, milieu, défense droite ou but de droite. A chaque instant, la balle doit aller à droite ou à gauche, et les chances sont proportionnelles au nombre de joueurs dans la zone, selon la configuration des équipes. Lorsque la balle atteint un but, elle retourne au milieu à l'instant suivant, et un but est marqué.

- (a) Supposons que l'équipe A adopte la configuration 3 – 4 – 4 et l'équipe B la configuration 5 – 3 – 3
 - (i) Modéliser ce problème avec une chaîne de Markov homogène. Quelle est sa mesure initiale, sa matrice de transition ?
 - (ii) La chaîne est-elle irréductible? Calculer la mesure de probabilité invariante.
 - (iii) Sous la mesure de probabilité invariante, quelle est la probabilité moyenne de toucher le but A ? le but B ? Quelle est la meilleure stratégie ?
 - (iv) On considère que la balle change de zone 3 fois par minute, et que le jeu dure 60 minutes. Donner une approximation du score moyen.
- (b) Comparaison de stratégies

- (i) Comparer les stratégies $3 - 4 - 4$ et $4 - 4 - 3$.
- (ii) Comparer les stratégies $5 - 3 - 3$, $3 - 4 - 4$ et $4 - 3 - 4$.