

TD 5: MARTINGALES

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2024-2025

1. Soit X_n et Y_n deux martingales de carré intégrable définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.
 - (a) Montrer que pour tout $m \leq n$, on a $\mathbb{E}[X_m Y_n | \mathcal{F}_m] = X_m Y_m$ p.s., et donc en particulier que $\mathbb{E}[X_m X_n | \mathcal{F}_m] = X_m X_m$ p.s.
 - (b) Montrer que pour tout $m < n \leq p < q$, on a $\text{Cov}(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.
 - (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[(X_n - X_0)^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$.
2. On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$,
 $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\{1\}, \dots, \{n\}, [n+1, +\infty[)$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n = (n+1)\mathbb{I}_{[n+1, +\infty[}$.
 - (a)
 - Montrer que pour la filtration $\mathcal{F}_n$, X_n est une martingale positive.
 - Vérifier que $X_n \rightarrow 0$ p.s.
 - X_n converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$?
 - (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la valeur de $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n(k)$? En déduire $\mathbb{E}[\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n]$.
3. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles, positives, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même espérance 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ et $X_n = Y_0 \dots Y_n$.
 - (a) Montrer que X_n est une $\mathcal{F}_n$ -martingale et que $\sqrt{X_n}$ est une $\mathcal{F}_n$ -surmartingale.
 - (b) Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\sqrt{Y_k}]$ converge dans $\mathbb{R}_+$, on note l sa limite.
 - (c) On suppose que $l = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \rightarrow 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle régulière ?
 - (d) On suppose que $l > 0$. Montrer que $(\sqrt{X_n})$ est Cauchy dans L^2 . En déduire que (X_n) est régulière.
 - (e) Application : Soit P et Q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E de même loi Q .
On suppose que pour tout $x \in E$, on a $Q(x) > 0$.
On pose $X_n = \frac{P(Z_0)}{Q(Z_0)} \dots \frac{P(Z_n)}{Q(Z_n)}$.
Déduire de ce qui précède que $X_n \rightarrow 0$ p.s.
4. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$, et une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(X_k)_{k \geq 1}$, indépendante de N .
On pose

$$Y = \sum_{k=1}^N X_k.$$

- (a) Déterminer $\mathbb{E}[Y|N]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.
- (b) Déterminer $\text{Var}(Y|N)$, puis $\text{Var}(Y)$.
- (c) Montrer que $L_S = G_N \circ L_X$ où L_Z est la transformée de Laplace de la variable aléatoire Z et G_Z est sa fonction génératrice des probabilités.