TD 1: EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Modèles Aléatoires Discrets M1 – 2023-2024

---

1. Expliquer pourquoi un chemin qui commence en 0 et finit en 0 est toujours de longueur paire.
2. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire non biaisée sur $\mathbb{Z}$.
   (a) On pose N le nombre de visites de la marche en 0, i.e. $N = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{X_n=0}$. Montrer que
   $$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0).$$
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ et que $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 0) = 0$. Rappeler ce que vaut le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.
   (c) En utilisant la formule de Stirling :
   $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$
   montrer que
   $$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$
   (d) Est-ce que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge ?
   (e) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge et $a_n \sim b_n$, alors $\frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} \to 1$ quand $N \to +\infty$. En déduire que $\mathbb{E}(N) = +\infty$.