TD 2: CHAINE DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2022-2023

---

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q.
   (a) Rappeler la définition de l'irréductibilité.
   (b) Donner un exemple où $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas irréductible.
   (c) Donner un exemple où il existe $i \neq j$ tels que $Q_{i,j} = 0$ et la chaîne est irréductible.
   (d) Soit $N \geq 0$ fixé. Donner un exemple où il existe i, j tels que pour tout $k \leq N$, $(Q^k)_{i,j} = 0$ mais la chaîne est irréductible.

2. **Maladie contagieuse**
   Une maladie s'attrape avec une probabilité $0,05$. Quand on l'a attrapée on peut soit en guérir soit acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, par ailleurs, 1 personne sur 5 est naturellement immunisée.
   (a) Modéliser l'état d'un individu dans la période de temps $(n, n+1)$ par une chaîne de Markov. Donner son graphe, sa loi initiale et sa matrice de transition.
   (b) Classifier les états.
   (c) Quelle est la probabilité qu'une personne attrape la maladie 2 fois de suite et s'en sorte sans séquelle mais non immunisée ?
   (d) Existe-t-il une probabilité invariante ? Est-elle unique ? Pourquoi ?

3. **Jeu de soccer**
   Le soccer se joue à 2 équipes, composées chacune de 10 joueurs et 1 goal. Chaque équipe se partage sur le terrain en 3 zones : défense-centre-attaque (ex: une configuration $3-4-4$ correspond à 3 défenseurs, 4 milieu et 4 attaquants). On supposera que tous les joueurs sont de niveau équivalent.
   On regarde la position de la balle, qui ne peut être qu'à 5 endroits : but de gauche, défense gauche, milieu, défense droite ou but de droite. A chaque instant, la balle doit aller à droite ou à gauche, et les chances sont proportionnelles au nombre de joueurs dans la zone, selon la configuration des équipes. Lorsque la balle atteint un but, elle retourne au milieu à l'instant suivant, et un but est marqué.
   (a) Supposons que l'équipe A adopte la configuration $3-4-4$ et l'équipe B la configuration $5-3-3$
      (i) Modéliser ce problème avec une chaîne de Markov homogène. Quelle est sa mesure initiale, sa matrice de transition ?
      (ii) La chaîne est-elle irréductible? Calculer la mesure de probabilité invariante.
      (iii) Sous la mesure de probabilité invariante, quelle est la probabilité moyenne de toucher le but A ? le but B ? Quelle est la meilleure stratégie ?
      (iv) On considère que la balle change de zone 3 fois par minute, et que le jeu dure 60 minutes. Donner une approximation du score moyen.
   (b) Comparaison de stratégies

(i) Comparer les stratégies $3-4-4$ et $4-4-3$.

(ii) Comparer les stratégies $5-3-3$, $3-4-4$ et $4-3-4$.