TD 2: CHAINE DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2024-2025

---

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

   (a) Rappeler la définition de l'irréductibilité.

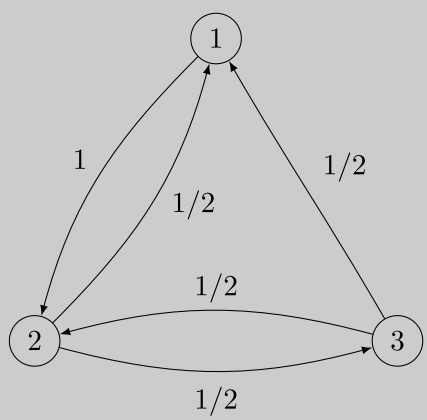
   Solution: Une chaîne de Markov est irréductible si tous ses états communiquent.

   (b) Donner un exemple où $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas irréductible.

   Solution: Un exemple de chaîne de Markov non irréductible est donné par le graphe suivant:

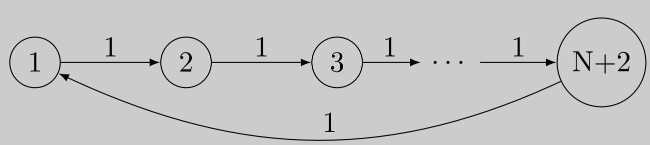
   (c) Donner un exemple où il existe $i \neq j$ tels que $Q_{i,j} = 0$ et la chaîne est irréductible.

   Solution: Dans l'exemple suivant, $Q_{1,3} = 0$ mais la chaîne est irréductible :



   (d) Soit $N \geq 0$ fixé. Donner un exemple où il existe i, j tels que pour tout $k \leq N$, $(Q^k)_{i,j} = 0$ mais la chaîne est irréductible.

   Solution: Pour la chaîne de Markov donnée par le graphe suivant, on a que pour tout $k \leq N$, $(Q^k)_{1,N+2} = 0$:



2. **Maladie contagieuse**
   Une maladie s'attrape avec une probabilité $0,05$. Quand on l'a attrapée on peut soit en guérir soit acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par

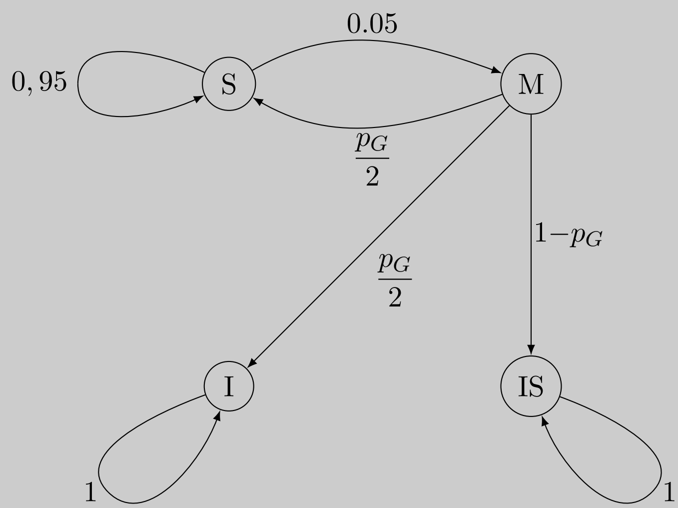
la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, par ailleurs, 1 personne sur 5 est naturellement immunisée.

(a) Modéliser l'état d'un individu dans la période de temps $(n, n+1)$ par une chaîne de Markov. Donner son graphe, sa loi initiale et sa matrice de transition.

Solution: On peut modéliser la chaîne de Markov par 4 états :

- sain (S),
- malade (M),
- immunisé sans séquelles (I),
- immunisé avec séquelles (IS).

On obtient le graphe suivant, où p_G est la probabilité de guérir sans séquelles :



La matrice de transition correspondante est donc :

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 & 0 & 0 \\ \frac{p_G}{2} & 0 & \frac{p_G}{2} & 1-p_G \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Classifier les états.

Solution: L'état I ne communique avec aucun état et il est récurrent.
L'état IS ne communique avec aucun état et il est récurrent.
Si $p_G > 0$, les états S et M communiquent et forment une classe d'équivalence transitoire.
Si $p_G = 0$, S ne communique avec aucun état et il est transitoire et M ne communique avec aucun état et il est transitoire.

(c) Quelle est la probabilité qu'une personne attrape la maladie 2 fois de suite et s'en sorte sans séquelle mais non immunisée ?

Solution: On considère qu'à l'instant 0, une personne est dans l'état I avec probabilité 1/5 et dans l'état S avec probabilité 4/5. La probabilité d'être malade 2 fois de suite et de s'en sortir dans séquelle mais non immunisé est donc égale à :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = S, X_1 = M, X_2 = S, X_3 = M, X_4 = S) \\
=&\mathbb{P}(X_0 = S)\mathbb{P}(X_1 = M|X_0 = S)\mathbb{P}(X_2 = S|X_1 = M)\mathbb{P}(X_3 = M|X_2 = S)\mathbb{P}(X_4 = S|X_3 = M) \\
=&\frac{4}{5}0.05\frac{p_G}{2}0.05\frac{p_G}{2} \\
=&\frac{p_G^2}{1000}.
\end{aligned}
$$

(d) Existe-t-il une probabilité invariante ? Est-elle unique ? Pourquoi ?

Solution: On a une chaîne de Markov sur un nombre fini d'états, il y a donc au moins une mesure invariante. Il n'y a cependant pas unicité de la mesure invariante puisque pour tout $x \in [0, 1]$, la mesure μ_x définie par :

$$\mu_x(\{I\}) = x \text{ et } \mu_x(\{IS\}) = 1 - x$$

est invariante.

3. **Jeu de soccer**
Le soccer se joue à 2 équipes, composées chacune de 10 joueurs et 1 goal. Chaque équipe se partage sur le terrain en 3 zones : défense-centre-attaque (ex: une configuration $3-4-4$ correspond à 3 défenseurs, 4 milieu et 4 attaquants). On supposera que tous les joueurs sont de niveau équivalent.
On regarde la position de la balle, qui ne peut être qu'à 5 endroits : but de gauche, défense gauche, milieu, défense droite ou but de droite. A chaque instant, la balle doit aller à droite ou à gauche, et les chances sont proportionnelles au nombre de joueurs dans la zone, selon la configuration des équipes. Lorsque la balle atteint un but, elle retourne au milieu à l'instant suivant, et un but est marqué.

(a) Supposons que l'équipe A adopte la configuration $3-4-4$ et l'équipe B la configuration $5-3-3$

(i) Modéliser ce problème avec une chaîne de Markov homogène. Quelle est sa mesure initiale, sa matrice de transition ?

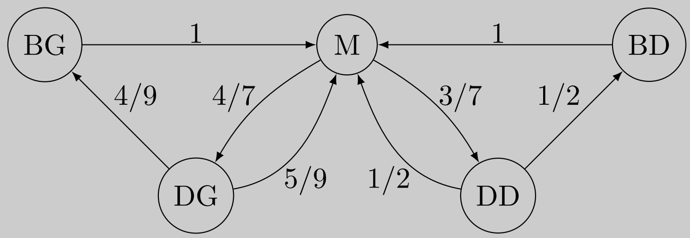
(ii) La chaîne est-elle irréductible? Calculer la mesure de probabilité invariante.

(iii) Sous la mesure de probabilité invariante, quelle est la probabilité moyenne de toucher le but A ? le but B ? Quelle est la meilleure stratégie ?

(iv) On considère que la balle change de zone 3 fois par minute, et que le jeu dure 60 minutes. Donner une approximation du score moyen.

Solution:

1. On modélise l'état de la balle à l'instant n par une chaîne de Markov homogène à 5 états. Cette chaîne est irréductible (tous les états communiquent). La chaîne est donnée par le graphe suivant :



La mesure initiale est $\mu_0 = \delta_M$ puisque le ballon part du milieu du terrain. La matrice de transition est la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 0 & 5/9 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le comportement de la balle à long terme correspond à la probabilité de la balle d'être dans les différents états "à long terme", c'est-à-dire lorsque l'on se place en régime stationnaire : c'est ce que représente la mesure invariante. Or ici on a une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini, donc il y a une unique mesure stationnaire. On la calcule en résolvant l'équation $\mu P = \mu$, avec $\sum_i \mu_i = 1$.

   Cela nous donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} 4/9\mu_2 = \mu_1 \\ 4/7\mu_3 = \mu_2 \\ \mu_1 + 5/9\mu_2 + 1/2\mu_4 + \mu_5 = \mu_3 \\ 3/7\mu_3 = \mu_4 \\ 1/2\mu_4 = \mu_5 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu_1 = 32/311 \\ \mu_2 = 72/311 \\ \mu_3 = 126/311 \\ \mu_4 = 54/311 \\ \mu_5 = 27/311 \end{array} \right.$$

3. La probabilité moyenne de toucher le but A (ou le B) correspond donc à la probabilité d'être en BD en régime stationnaire, donc P(toucher but A)=$\mu_5 = 27/311$ et P(toucher but B)=$\mu_1 = 32/311$. Donc on a plus de chances de marquer dans le but B, et donc la stratégie de A est la meilleure : $3-4-4 > 5-3-3$.

4. On considère que la balle change de zone 3 fois par minute, et que le jeu dure 60 minutes. Le score moyen de l'équipe B correspond au nombre de buts marqués dans le but A, soit $60 \times 3 \times \mu_5 \cong 15$ et celui de l'équipe A est $60 \times 3 \times \mu_1 \cong 18$. Donc score moyen $A - B$: $18 - 15$. La stratégie de A est donc la meilleure.

(b) Comparaison de stratégies

   (i) Comparer les stratégies $3-4-4$ et $4-4-3$.

   (ii) Comparer les stratégies $5-3-3$, $3-4-4$ et $4-3-4$.

Solution:

1. Une étude similaire avec les stratégies $3-4-4$ et $4-4-3$ nous donnent la matrice

suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient pour la mesure stationnaire : $\mu_1 = \mu_5 = \dfrac{1}{10}$, $\mu_2 = \mu_4 = \dfrac{1}{5}$ et $\mu_3 = \dfrac{2}{5}$. On a un jeu équitable, ou équilibré : les stratégies A et B se valent, la probabilité de marquer en A est la même qu'en B.

2. De la même manière, on peut comparer et trouver que la stratégie $3-4-4$ est meilleure que la $4-3-4$ et que la $5-3-3$, ce qui est compatible avec le fait que $3-4-4$ était meilleure que $5-3-3$. En revanche, on peut trouver des stratégies qui sont comparables 2 à deux mais qui ne sont pas ordonnables en globalité. Par exemple, $5-2-4 > 4-3-4$ et $4-3-4 > 5-3-3$ mais $5-3-3 > 5-2-4$. En effet, l'ordre que l'on vient d'établir entre les stratégies n'est pas total : il n'y a pas de stratégie gagnante à tous les coups.