TD 5: MARTINGALES

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2024-2025

---

1. Soit X_n et Y_n deux martingales de carré intégrable définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

   (a) Montrer que pour tout $m \leq n$, on a $\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m Y_m$ p.s., et donc en particulier que $\mathbb{E}\left[X_m X_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m X_m$ p.s.

   Solution: On sait que X_m est $\mathcal{F}_m$-mesurable donc

   $$\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m \mathbb{E}\left[Y_n | \mathcal{F}_m\right] \text{ p.s.}$$

   De plus Y est une martingale et $m \leq n$ donc

   $$\mathbb{E}\left[Y_n | \mathcal{F}_m\right] = Y_m \text{ p.s.}$$

   On en conclut que $\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m Y_m$ p.s.

   (b) Montrer que pour tout $m < n \leq p < q$, on a $\text{Cov}\,(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.

   Solution: On a :

   $$\text{Cov}\,(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = \mathbb{E}((X_n - X_m)(Y_q - Y_p)) - \mathbb{E}(X_n - X_m)\mathbb{E}(Y_q - Y_p).$$

   On a
   $$\mathbb{E}(X_n - X_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n - X_m | \mathcal{F}_m)) = \mathbb{E}(X_m - X_m) = 0.$$

   De même $\mathbb{E}(Y_q - Y_p) = 0$. On a donc :

   $$\begin{aligned}\text{Cov}\,(X_n - X_m, Y_q - Y_p) =& \mathbb{E}((X_n - X_m)(Y_q - Y_p)) \\ =& \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_n - X_m)(Y_q - Y_p)|\mathcal{F}_p)) \\ =& \mathbb{E}((X_n - X_m)\mathbb{E}((Y_q - Y_p)|\mathcal{F}_p)) \text{ car } (X_n - X_m) \text{ est } \mathcal{F}_p - \text{mesurable} \\ =& 0\end{aligned}$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\left[(X_n - X_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right]$.

   Solution: On va raisonner par récurrence. Pour $n \in \{0, 1\}$, $(X_n - X_0)^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1})^2$ et donc $\mathbb{E}\left[(X_n - X_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right]$.

On suppose l'égalité vraie au rang n. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_0)^2\right] =&\mathbb{E}\left[((X_{n+1}-X_n)+(X_n-X_0))^2\right]\\
=&\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2+(X_n-X_0)^2+2(X_{n+1}-X_n)(X_n-X_0)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2+(X_n-X_0)^2\right] \text{ par l'exercice précédent.}\\
=&\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2+\sum_{k=1}^{n}(X_k-X_{k-1})^2\right]\\
=&\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}\left[(X_k-X_{k-1})^2\right].
\end{aligned}$$

2. On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_n,\mathbb{P})$ où $\Omega=\mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $\mathbb{P}(\{n\})=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, $\mathcal{F}_n=\sigma\left(\{1\},...,\{n\},[n+1,+\infty[\right)$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n=(n+1)\mathbb{I}_{[n+1,+\infty[}$.
   (a)
   - Montrer que pour la filtration $\mathcal{F}_n$, X_n est une martingale positive.
   - Vérifier que $X_n \to 0$ p.s.
   - X_n converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$?

Solution: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n\in\{0,n+1\}$ donc la variable X_n est positive. Pour tout $i\in[[1;n]]$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\{i\})=0.$$

On a également

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\,[n+1,+\infty[)=\frac{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\times 0+\frac{1}{n+2}\times(n+2)}{\frac{1}{n+1}}=n+1.$$

On a bien $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=X_n$ p.s.
Pour tout $i\in\mathbb{N}$, pour tout $n\geq i$, $X_n(i)=0$ donc $X_n\to 0$ p.s.
On a $\mathbb{E}\left(|X_n-0|\right)=\mathbb{E}\left(X_n\right)=1$ donc on n'a pas convergence dans $\mathcal{L}^1$.

   (b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, quelle est la valeur de $\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n(k)$? En déduire $\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n\right]$.

Solution: On a que le maximum est atteint pour $n=k-1$ et on a alors $X_{k-1}(k)=k$ donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n(k)=k$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n\right]*=&\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)k\\
=&\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}k\\
=&\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+1)}\\
=&\infty.
\end{aligned}$$

3. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles, positives, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même espérance 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on poste $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, ..., Y_n)$ et $X_n = Y_0...Y_n$.

   (a) Montrer que X_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale et que $\sqrt{X_n}$ est une $\mathcal{F}_n$-surmartingale.

   Solution: Direct pour X_n. Pour $\sqrt{X_n}$, utiliser l'inégalité de Jensen: si ϕ est une fonction concave, alors
   $$\mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}) \leq \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$$

   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sqrt{Y_k}\right]$ converge dans $\mathbb{R}_+$, on note l sa limite.

   Solution: Convergence car décroissant (par Jensen, regarder u_{n+1}/u_n), et minoré par 0 (évident).

   (c) On suppose que $l = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle régulière ?

   Solution: On sait déjà que $\sqrt{X_n}$ converge p.s. puisque c'est une sur-martingale positive et $\mathbb{E}(\sqrt{X_0}) = 1 < +\infty$. On considère la martingale $Z_n = \dfrac{\sqrt{Y_1}}{\mathbb{E}(\sqrt{Y_1})} \cdots \dfrac{\sqrt{Y_n}}{\mathbb{E}(\sqrt{Y_n})}$. Alors Z_n converge p.s. pour les mêmes raisons. De plus $Z_n \times \prod_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = \sqrt{X_n}$ par définition. En particulier comme la partie gauche de l'équation converge vers 0, on trouve $\sqrt{X_n} \to 0$. On ne peut pas avoir régularité de la martingale puisque sinon on aurait $X_n = 0$ pour tout n.

   (d) On suppose que $l > 0$. Montrer que $\left(\sqrt{X_n}\right)$ est Cauchy dans L^2. En déduire que (X_n) est régulière.

   Solution: On considère encore une fois Z_n. On a $\mathbb{E}(Z_n^2) = \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\sqrt{Y}_k)^2} \leq \dfrac{1}{l^2} < +\infty$, donc Z_n est une martingale bornée dans L^2. En particulier, par le théorème 70 du cours, elle converge dans L^2 vers Z_∞. Or $\sqrt{X_n} = Z_n \times \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k})$, où le deuxième terme converge vers $l > 0$. En particulier, $\sqrt{X_n}$ est convergente dans L^2 vers lZ_∞. Donc $\sqrt{X_n}$ est de Cauchy dans L^2. Par un théorème du cours, on en déduit que $\sqrt{X_n}$ et donc X_n sont régulières.

   (e) Application : Soit P et Q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E de même loi Q.
   On suppose que pout tout $x \in E$, on a $Q(x) > 0$.
   On pose $X_n = \dfrac{P(Z_0)}{Q(Z_0)} \cdots \dfrac{P(Z_n)}{Q(Z_n)}$.
   Déduire de ce qui précède que $X_n \to 0$ p.s.

   Solution: Application directe. On est clairement dans la situation de la question 1, avec

$Y_k = \dfrac{P(Z_k)}{Q(Z_k)}$. On vérifie bien que:

$$\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{x\in E} \frac{P(x)}{Q(x)} Q(x) = \sum_{x\in E} P(x) = 1$$

Et il suffit donc de montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Or

$$\mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = \sum_{x\in E} \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}} Q(x) = \sum_{x\in E} \sqrt{P(x)}\sqrt{Q(x)}$$

On utilise l'identité remarquable $ab = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a-b)^2)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) &= \sum_{x\in E} \frac{1}{2}\left(P(x) + Q(x) - \left(\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}\right)^2\right) \\ &= 1 - \sum_{x\in E} \left(\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}\right)^2 \\ &< 1 \text{ puisque } P \neq Q.\end{aligned}$$

Ce qui implique bien que $\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

4. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$, et une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(X_k)_{k\geq 1}$, indépendante de N.
   On pose
   $$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k\,.$$
   (a) Déterminer $\mathbb{E}\left[Y|N\right]$, puis $\mathbb{E}\left[Y\right]$.

Solution: On a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y|N\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i|N\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[C_i|N\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(C_1) = N\mathbb{E}(C_1),\end{aligned}$$

où dans l'avant dernière égalité on utilise le fait que les C_i sont indépendantes de N. On obtient donc que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[Y|N\right]\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(C_1).$$

(b) Déterminer $\mathrm{Var}\,(Y|N)$, puis $\mathrm{Var}(Y)$.

Solution: Rappelons que

$$\mathrm{Var}\,(Y|N) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}\,[Y|N])^2|N\right],$$

et que

$$\mathrm{Var}\,Y = \mathbb{E}(\mathrm{Var}\,(Y|N)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}\,[Y|N]).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(Y|N) &= \mathbb{E}\left[Y^2|N\right] - \mathbb{E}\,[Y|N]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[Y^2|N\right] - \mathbb{E}\,[Y|N]^2 \\ &= \cdots = N\,\mathrm{Var}(C_1).\end{aligned}$$

Puis $\mathrm{Var}(Y) = \cdots = \mathbb{E}(N)\,\mathrm{Var}(C_1) + \mathbb{E}(C_1)^2\mathrm{Var}(N)$

(c) Montrer que $L_S = G_N \circ L_X$ où L_Z est la transformée de Laplace de la variable aléatoire Z et G_Z est sa fonction génératrice des probabilités.

Solution: On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y}|N\right) =&\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}|N\right) \\ =&\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}|N\right) \\ =&\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_i}|N\right) \\ =&\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right)^N.\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y}|N\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right)^N\right).$$

On a bien $L_S = G_N \circ L_X$.