Bulletin APMEP n° 387, février-Mars 1993

ÉNONCÉ N°215 (Jacques AMON, Limoges).
Soit f une fonction continue de $[0\,,\,1] \to \mathbf{R}$, et soient a et b respectivement l'inf et le sup de $f(t)$ sur $[0\,,\,1]$.

Montrer que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt \leq -ab$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 199 (Daniel REISZ, Dijon).

Un disque de rayon 1 est partagé en quatre régions par deux cordes perpendiculaires. Quelle est la plus grande valeur possible de la somme des rayons des cercles inscrits dans ces quatre régions ?

RÉPONSES

Cet énoncé est extrait de la revue *Crux Mathematicorum* (problème 1627, mars 1991). Il a été abordé de deux façons différentes.

a) Abord géométrique (par majoration) *comme le propose Daniel REISZ (Dijon) :*

Soit le cercle de centre O et de rayon R et les deux cordes perpendiculaires (MN) et (ET), ainsi que les quatre cercles (O_i, r_i) inscrits dans chacune des quatre régions Q_i.

On a alors, en désignant par Ai les points de contact des cercles (O_i, r_i) avec le cercle (O, R) les alignement des points A_i, O_i, O. D'où :

$$A_1O_1 + O_1O_3 + O_3A_3 \leq A_1O + OA_3 = 2R$$

$$A_1O_1 + O_1H + HO_3 + O_3A_3 \leq 2R$$

$$r_1 + r_1\sqrt{2} + r_3\sqrt{2} + r_3 \leq 2R$$

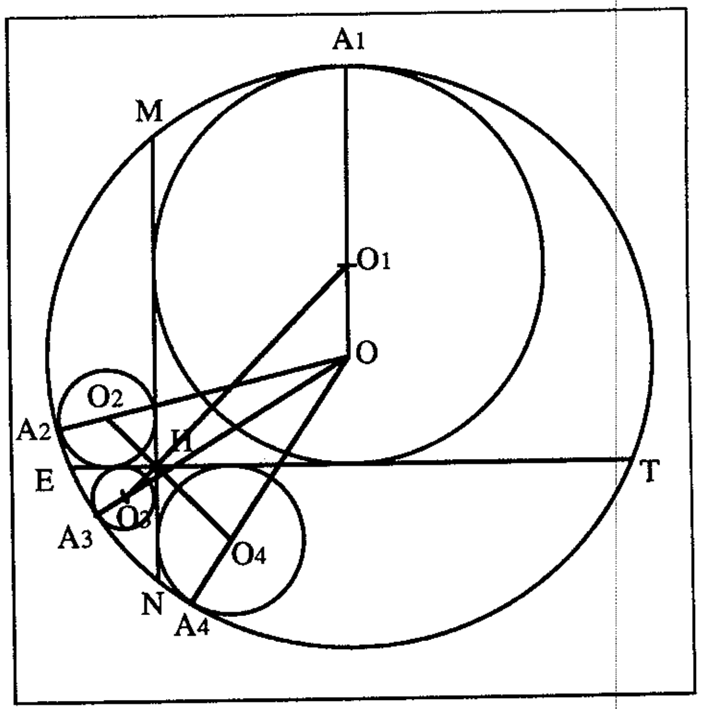
$$(r_1 + r_3)(1 + \sqrt{2}) \leq 2R$$

$$r_1 + r_3 \leq 2R\,(\sqrt{2} - 1)$$

De même $\quad r_2 + r_4 \leq 2R\,(\sqrt{2} - 1)$

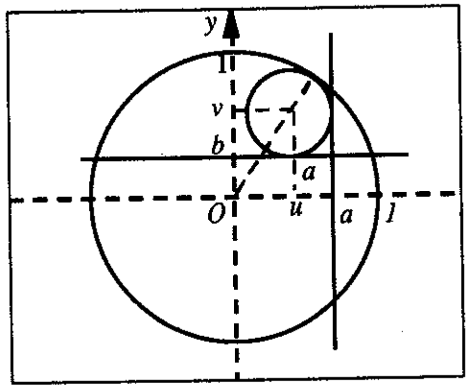
D'où $\quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq 4R\,(\sqrt{2} - 1)$

(Il y a égalité si $H = 0$).



b) Abord analytique (par calcul explicite)*, comme le propose, par exemple, J.L.NICOLAS (Villeurbanne).*

Choisissons un repère orthonormé de centre O, le centre du cercle, et d'axes parallèles aux cordes. Soit $x = a$ et $y = b$, les équations des cordes dans ce repère. Soit $(u\,,\,v)$ les coordonnées du centre d'un cercle inscrit dans l'une des quatre régions et r son rayon.



On doit avoir

(1) $u = a + \alpha r$ avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ suivant que le cercle est à droite ou à gauche de la droite $x = a$.

De même, on doit avoir

(2) $v = b + \beta b$ avec $\beta = \pm 1$.

Enfin, on doit avoir

(3) $\sqrt{u^2 + v^2} = 1 - r$ et $0 < r < 1$, soit $u^2 + v^2 = (1 - r)^2$,
et par (1) et (2),

(4) $r^2 + 2\,(a\alpha + b\beta + 1)\,r + a^2 + b^2 - 1 = 0$.

On vérifie que pour chacun des 4 choix (α, β), l'équation (4) a exactement une solution comprise entre 0 et 1. Les solutions sont donc :

$$r = -\alpha a - \beta b - 1 + \sqrt{2\,(1 + \alpha a)\,(1 - \beta b)}\ ,\ \alpha = \pm 1\ ,\ \beta = \pm 1$$

et la somme des quatre rayons vaut $-4 + \sqrt{2}\,f(a, b)$ avec
$f(a, b) = \sqrt{(1+a)\,(1+b)} + \sqrt{(1+a)\,(1-b)} + \sqrt{(1-a)\,(1+b)} + \sqrt{(1-a)\,(1-b)}$ . .
Posons $a = \cos 2u$, $b = \cos 2v$, avec $u, v \in [0, \pi/2]$. Il vient : $f(a, b) = 2(\cos(u-v) + \sin(u+v))$. Or, ceci montre que $f(a,b) \leq 4$ avec égalité lorsque $u = v = \pi/4$ (et seulement dans ce cas), ce qui donne $a = 0$ et $b = 0$.

Cette seconde approche (calcul explicite) débouche sur la généralisation suivante (Pierre NOÉ, Marseille): «La différence entre la somme des rayons des quatre cercles inscrits et la somme des deux cordes orthogonales est indépendante de la position des rayons des quatre cercles exinscrits. Il s'ensuit que ces deux sommes sont simultanément maximales». Cette différence constante est égale à 8, les deux calculs étant très similaires.

La première approche (par majoration) conduit à une autre généralisation, amorcée par Daniel CARRON (Bruxelles): «Soit *(C)* un cercle de rayon *R*, *M* un point intérieur au cercle et $D_1, D_2 \ldots D_n$, *n* droites passant par *M*. La somme des rayons des cercles tangents au cercle *(C)* et à deux droites consécutives admet pour valeur maximale:

$$S_n = \frac{2n \sin \dfrac{\pi}{2n}}{1 + \sin \dfrac{\pi}{2n}}\, R$$

En s'inspirant en effet de cette technique de majoration, on démontre

que, avec les notations de la figure:

$$2R \geq M_1M'_1 \geq N_1N'_1 = \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha_1}\right)(r_1 + r'_1)$$

De sorte que la somme des rayons vaut:

$(r_1 + r'_1) + (r_2 + r'_2) + \ldots + (r_n + r'_n) \leq$

$$\leq 2R \left(\frac{\sin \alpha_1}{1 + \sin \alpha_1} + \frac{\sin \alpha_2}{1 + \sin \alpha_2} + \ldots + \frac{\sin \alpha_n}{1 + \sin \alpha_n} \right)$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \pi/2$.

Or, la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$ a pour dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{\sin x - 2}{(1 + \sin x)^2} < 0$$

de sorte qu'elle est concave et vérifie donc:

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_n) \leq \frac{n \sin \dfrac{\pi}{2n}}{1 + \sin \dfrac{\pi}{2n}}$$

D'où $S_n \leq \left(\dfrac{2n \sin \dfrac{\pi}{2n}}{1 + \sin \dfrac{\pi}{2n}} \right) R$, et l'égalité est vérifiée lorsque M est au centre du cercle (Γ) et que tous les angles de droites sont égaux à $\dfrac{\pi}{n}$, car alors $M_kM'_k = 2R$ (pour tout k) et les points (M_k et N_k tout comme M'_k et N'_k) sont confondus.(voir la figure page suivante)

Signalons également la remarque de Denis HARTEMANN (Cayenne-Guyane), qui signale que le cercle inscrit dans une région pourrait être défini comme le plus grand cercle contenu dans cette région. Or ce dernier n'est pas nécessairement le cercle tangent aux deux cordes : si, dans le cercle de centre (0,0) et de rayon 1, les cordes ont pour équations, par exemple $y = 1/10$ pour l'une, $x = 3/5$ pour l'autre, il existe dans les deux plus grandes régions des cercles plus grands que ceux tangents aux deux cordes. Toutefois, au prix d'un calcul supplémentaire, même avec cette définition, le