BULLETIN de l'A.P.M.E.P
n° 311, décembre 1977, p 795-797

Sur le nombre de partitions

par Jean-Louis NICOLAS, Université de Limoges

Dans sa brochure, publiée par l'A.P.M., "*Substitutions et groupe symétrique*", Jacques Dautrevaux est amené à parler de partitions (p. 20). En effet il y a une bijection entre les classes de conjugaison du groupe symétrique S_n et les partitions de n. Signalons une erreur dans la table numérique : les nombres de partitions pour n = 10, 11, 12 sont respectivement : 42, 56, 77.

Une partition de n est une façon d'écrire l'entier naturel n comme une somme de naturels. Ainsi :

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

a 7 partitions. L'ordre des termes ne compte pas, aussi les écrit-on en général dans l'ordre décroissant. C'est un problème amusant de générer sur une machine à calculer toutes les partitions d'un naturel n fixé. On trouvera dans le livre "*Combinatorial Algorithms*" de A. Nijenhuis et H.S. Wilf (Academic Press, 1975) un algorithme pour ce faire et un programme FORTRAN.

Je voudrais maintenant méditer sur la phrase de J. Dautrevaux : "*On ne connaît malheureusement pas de formule générale donnant en fonction de n, le nombre p(n) de partitions de n*", et sur la question : "*Est-il plus facile de calculer p(n) que(n !)?*"

Pour calculer p(n), sans écrire les termes des différentes partitions, il existe deux formules :

1) Une formule de récurrence :

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) \ldots$$
$$+ (-1)^k\, p\left[n - \frac{1}{2}k(3k-1)\right] + (-1)^k\, p\left[n - \frac{1}{2}k(3k+1)\right] + \ldots = 0$$

avec $p(0) = 1$ et pour $m < 0$, $p(m) = 0$.

Cette formule se trouve par exemple dans le livre de Hardy and Wright, "*An introduction to the theory of numbers*", Chap. 19, ou dans celui de Comtet, "*Analyse combinatoire*", Collection Sup, Presses Universitaires de France, tome 1, p. 115. Elle a été utilisée par Mac Mahon en 1918 pour calculer p(n) pour $1 \leqslant n \leqslant 200$. Elle est d'un emploi facile, car elle ne comporte que des additions ou des soustractions, et il ne paraît pas évident qu'il soit plus long de calculer p(100) en l'utilisant que de calculer 100 !. Elle est aisément programmable sur ordinateurs, à condition d'avoir beaucoup de mémoires : Pour calculer p(100), il faut conserver en mémoire p(n) pour $n \leqslant 99$.

2) Un développement en série :

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\, A_k(n) \frac{d}{dn}\left(\frac{\mathrm{Sh}\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_n\right)}{\lambda_n}\right)$$

avec $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ et la "dérivation"

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\mathrm{Sh}\, C\lambda_n}{\lambda_n}\right) = \frac{C\lambda_n\, \mathrm{Ch}(C\lambda_n) - \mathrm{Sh}(C\lambda_n)}{2\lambda_n{}^3}$$

Les coefficients $A_k(n)$ ont une forme compliquée. On a :

$$A_1(n) = 1\,;\; A_2(n) = (-1)^n\,;\; A_3(n) = 2\cos\left(\frac{2}{3}n\pi - \frac{\pi}{18}\right)$$

On en trouvera une table dans RAMANUJAN, "*Collected papers*" jusqu'à $k = 18$. On trouvera un moyen de les calculer dans RADEMACHER, "*Topics in Analytic number theory*" Chap. 14, qui donne aussi la majoration

$$|A_k(n)| \leqslant 2\,k^{3/4}$$

La série ci-dessus est rapidement convergente, et comme p(n) est un naturel, il suffit de calculer les termes jusqu'à ce que le reste soit, en valeur absolue, inférieur à $\frac{1}{2}$. Pour $n \geqslant 576$, on a au plus à calculer $\frac{2\sqrt{n}}{3}$ termes.

Cette série donnant p(n), malgré son aspect technique un peu rébarbatif est beaucoup plus intéressante que la formule de Stirling pour n ! qui n'est qu'un développement asymptotique :

$$n\,! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\exp\left(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j-1)\,2j}\,n^{-2j+1} + R_{2m}\right)$$

Les coefficients B_{2j} sont les nombres de Bernoulli,

$$B_2 = \frac{1}{6}\,;\; B_4 = -\frac{1}{30}\,;\; B_6 = \frac{1}{42}\,;\; B_8 = -\frac{1}{30}\,;\; B_{10} = \frac{5}{66}\,;\ \text{etc...}$$

leur signe est alterné. Le reste R_{2m} est du signe de B_{2m} et on sait seulement :

$$|R_{2m}| \leqslant \frac{|B_{2m}|}{(2m-1)\,2m}\,n^{-2m+1}$$

Les nombres de Bernoulli tendent vers l'infini : On a :

$$B_{2k} = (2k)\,!\,\frac{2(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)$$

ce qui entraîne que $\quad |B_{2k}| \geqslant \dfrac{2(2k)\,!}{(2\pi)^{2k}}$

et, pour n fixé, la série

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j-1)\,2j}\,n^{-2j+1}$$

est divergente.