BORNES EFFECTIVES POUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMETIQUES

par Jean Louis NICOLAS

Dans cet exposé nous désignerons par p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. On a ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc...

§ 1 LA FONCTION $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$.

Proposition 1. - *Soit* $N_k = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j$. *Pour* $k \geqslant 13$, *on a* $N_k \geqslant k^k$.

Démonstration : En minorant p_j par j, on a $N_k \geqslant k! \geqslant k^k e^{-k}$ d'après la formule de Stirling. Si l'on pouvait minorer p_j par $3j$, le résultat serait démontré. Mais ceci n'est pas exact lorsque j est petit. Cependant il est facile de voir que pour $j \geqslant 12$, on a $p_j \geqslant 3j$, en observant qu'entre deux multiples de 6, il y a au plus deux nombres premiers (sauf entre 0 et 6 où il y en a 3).

On observe ensuite que ; pour $k \geqslant 11$, on a :

$$(k+1)^{k+1} / k^k = (k+1)(1+1/k)^k \leqslant e(k+1) < p_{k+1} .$$

La proposition se démontre alors par récurrence, en constatant qu'elle est vraie pour $k = 13$.

Proposition. - *Soit* $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, *le nombre de diviseurs premiers de* n. *Pour* $k \geqslant 1$, *on a :*

$$n < N_k \Rightarrow \omega(n) < k.$$

Démonstration : Soit n tel que $\omega(n) \geqslant k$. La décomposition de n en facteurs premiers s'écrit :

$$n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_j^{\alpha_j} \qquad \text{avec} \quad j \geq k.$$

On a :

$$n \geq q_1 \cdots q_j \geq N_j \geq N_k .$$

Proposition 3. - *On a pour tout* $k \geq 2$ *:*

$$k = \omega(N_k) \leq 1{,}38402\ldots \frac{\log N_k}{\log \log N_k}$$

avec égalité lorsque $k = 9$.

Démonstration : Supposons $k \geq 13$. Par la proposition 1, on a :

$$\frac{\log N_k}{\log \log N_k} \geq \frac{k \log k}{\log(k \log k)} = \frac{k}{1+(\log \log k)/\log k} \geq \frac{k}{1+1/e} .$$

Comme $e^{-1} < 0{,}37$, cela démontre la propriété pour $k \geq 13$. Il reste à vérifier l'inégalité pour $2 \leq k \leq 12$.

Proposition 4. - *On a pour tout* $n \geq 3$

$$\omega(n) \leq 1{,}38402\ldots \frac{\log n}{\log \log n}$$

avec égalité si et seulement si $n = N_9$.

Démonstration : On vérifie d'abord la relation pour $3 \leq n \leq 30$. On suppose ensuite que $N_k < n < N_{k+1}$ avec $k \geq 3$. D'après la proposition 2, on a : $\omega(n) < k+1$, soit

$$\omega(n) \leq k \leq 1{,}38402\ldots \frac{\log N_k}{\log \log N_k} < 1{,}38402\ldots \frac{\log n}{\log \log n}$$

en utilisant la croissance pour $x \geq e$ de la fonction $x \to \dfrac{x}{\log x}$.

Proposition 5. - *On a pour tout* $n \geq 3$ *:*

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} \left(1 + \frac{1{,}45743\ldots}{\log \log n}\right)$$

avec égalité pour $n = N_{47}$

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} \left(1 + \frac{1}{\log \log n} + \frac{2{,}89726\ldots}{(\log \log n)^2}\right)$$

avec égalité pour $n = N_{442}$.

On a pour $n \geq 26$ *:*

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n - 1{,}1714\ldots}$$

avec égalité pour $n = N_{189}$.

Proposition 6. - *On pose :*

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right\} .$$

Sous l'hypothèse de Riemann on a :

pour $n \geq N_4 = 210$: $\omega(n) \leq Li(\log n) + 0{,}12\sqrt{\log n}$

$\exists n_0$ *tel que pour* $n \geq n_0$, $\omega(n) \leq Li(\log n)$.

On trouvera la démonstration des propositions 4, 5, 6 dans les deux articles de G. Robin : [Rob 1] et [Rob 2]. La démonstration des deux dernières propositions nécessitent des estimations de N_k et de p_k en fonction de k beaucoup plus fines que celles utilisées dans la preuve ci-dessus de la proposition 4. La constante n_0 peut être calculée, mais le calcul n'a pas encore été fait.

§ 2 LES NOMBRES ω-LARGEMENT COMPOSES.

On dit que N est ω-largement composé si

$$n \leq N \Rightarrow \omega(n) \leq \omega(N).$$

On voit facilement, que si $N_k \leq N < N_{k+1}$, dire que N est ω-largement composé revient à dire que $\omega(N) = k$. On peut ainsi construire de tels nombres en remplaçant dans N_k des grands facteurs premiers par une quantité égale de nombres premiers plus grands que p_k.

Soit $Q(X)$ la quantité de nombre ω-largement composés inférieurs ou égaux à X. On trouvera dans ([Erd]) la démonstration du résultat : Il existe c_1 et $c_2 > 0$, tels que pour X assez grand, on ait :

$$\exp(c_2\sqrt{\log X}) \leq Q(X) \leq \exp(c_1\sqrt{\log X}).$$

On conjecture que $\log Q(X) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\log X}$.

Dans sa thèse de 3^e cycle, P. Van den Bosch, (cf [Van]) en utilisant une idée de Carl Pomerance a montré que l'on pouvait prendre $c_2 = 2{,}44$, qui n'est pas très loin de la valeur conjecturée $\pi\sqrt{2/3} = 2{,}565$.

Dans un travail non encore publié, Jean Coquet et P. Van den Bosch ont montré que l'on pouvait prendre pour c_2 n'importe quel nombre inférieur à $\pi\sqrt{2/3}$. Plus précisément, étant donné une fonction $\phi : [-1,+1] \longrightarrow [0,1]$ vérifiant $\int_{-1}^{1} \phi = 1$, ils montrent que l'on peut prendre pour c_2 n'importe quel nombre inférieur à

$$-\int_{-1}^{+1} (\phi \log\phi + (1-\phi)\log(1-\phi)) \Big/ \sqrt{1/2 + \int_{-1}^{+1} t\,\phi(t)dt}$$

et ils choisissent $\phi(t) = 1/(1+e^{rt})$ avec r tendant vers l'infini.

La constante c_1 donnée dans [Erd] vaut $2\pi\sqrt{2/3}+\varepsilon$. Il semble difficile de l'améliorer.

§ 3 LA FONCTION $d(n) = \sum_{d|n} 1$.

Il est commode d'écrire la décomposition de n en facteurs premiers sous la forme :

$$n = \prod_{k\geq 1} p_k^{a_k} \quad , \qquad a_k \geq 0.$$

Le nombre de diviseurs de n vaut alors :

$$d(n) = \prod_{k\geq 1} (a_k+1).$$

Lemme 1. - *Soit t un paramètre réel positif. On considère la fonction définie pour $x \geq 0$:* $x \longrightarrow (x+1)e^{-tx}$.

1°) Si $t \geq 1$ cette fonction est décroissante,

2°) Si $t < 1$ cette fonction a un maximum pour $x = (1/t)-1$, qui vaut e^{t-1}/t.

3°) On considère la quantité $\max_{x\in\mathbb{N}} (x+1)e^{-tx}$.

Si $t \geq \log 2$, ce maximum est atteint en $x=0$, et vaut 1.

Si $t < \log 2$, ce maximum est atteint en $x = [\frac{1}{e^t-1}]$, où $[u]$ désigne la partie entière de u. Il est inférieur ou égal à $2/(e\,t)$.

Démonstration : Elle est élémentaire.

Lemme 2. - *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors la fonction $n \to d(n)\,n^{-\varepsilon}$ a un maximum, qu'elle atteint au nombre*

$$H_\varepsilon = \prod_{p\leq 2^{1/\varepsilon}} p^{\alpha(p,\varepsilon)} \quad , \quad \text{avec} \quad \alpha(p,\varepsilon) = [\frac{1}{p^\varepsilon - 1}] .$$

On a de plus, pour $n \geq 1$:

$$d(n)n^{-\varepsilon} \leq d(H_\varepsilon)H_\varepsilon^{-\varepsilon} \leq (2/(e\,\varepsilon \log 2))^{2^{1/\varepsilon}} .$$

Démonstration : On écrit

$$d(n)n^{-\varepsilon} = \prod_{k\geq 1} (a_k+1)p_k^{-\varepsilon a_k} .$$

On applique le lemme précédent en posant $t = \varepsilon \log p_k$. Lorsque $t \geq \log 2$, c'est-à-dire lorsque $p_k \geq 2^{1/\varepsilon}$, le maximum de $(a_k+1)p_k^{-\varepsilon a_k}$ vaut 1. Lorsque $t < \log 2$, ce maximum est atteint pour $a_k = \alpha(p_k,\varepsilon)$, et vaut moins que le maximum réel qui est $e^{t-1}/t \leq \frac{2}{e\,\varepsilon \log p_k} \leq \frac{2}{e\,\varepsilon \log 2}$.

Proposition 7. - *Pour tout* $n \geq 3$, *on a :*

$$\log d(n) \leq 3{,}6\,(\log n)/\log\log n.$$

Démonstration : On déduit du lemme précédent que pour tout n, et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\log d(n) \leq \varepsilon \log n + 2^{1/\varepsilon} \log(2/(e\,\varepsilon \log 2)).$$

On choisit $\varepsilon = 2 \log 2/\log\log n$. On doit supposer $n \geq 3$, pour avoir $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$\log d(n) \leq \frac{\log n}{\log\log n}\ 2\log\left(2 + \frac{\log\log n \ \ \log\log\log n}{\sqrt{n \log n}}\right).$$

On majore alors $\log\log\log n$ par $\log\log n$, et il reste à constater que la fonction $t^2 e^{-t/2}$ est inférieure à $16/e^2$ pour $t > 0$.

Dans la démonstration ci-dessus, les majorations sont très grossières, et la constante 3,6 n'est pas optimale. En choisissant $\varepsilon = (\log 2 + \eta)/\log\log n$, avec $\eta > 0$, la même démonstration permet de calculer n_o, tel que l'on ait, pour $n \geq n_o$:

$$\log d(n) \leq (\log 2 + 2\eta)(\log n)/(\log\log n).$$

Mais cet n_o sera grand, pour $\eta < 1$, trop grand pour qu'un ordinateur puisse calculer $\log d(n)$ pour $n \leq n_o$.

Dans un repère orthonormé, écrivons pour chaque $n \geq 1$, le point d'abscisse $\log n$, et d'ordonnée $\log d(n)$. L'enveloppe convexe de ces points est une ligne brisée dont la pente des cotés successifs tend vers 0. Dans ce repère, la droite de pente ε qui passe par le point $(\log n, \log d(n))$ a pour ordonnée à l'origine $\log \frac{d(n)}{n^\varepsilon}$. Elle sera une droite d'appui pour notre ensemble convexe, et un point d'appui sera H_ε défini au lemme 2.

Les sommets de l'enveloppe convexe définie ci-dessus sont exactement les points $(\log H_\varepsilon, \log d(H_\varepsilon))$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, où H_ε est défini au lemme 2. Les nombres H_ε sont appelés par S. Ramanujan "nombres hautement composés supérieurs". (cf. [Ram]).

Supposons que l'on veuille démontrer l'inégalité

(*) $\qquad \forall n \geq 5040, \quad \log d(n) \leq A(\log n)/(\log\log n).$

Dans notre repère, cela veut dire que la courbe $y = Ax/\log x$ est au dessus de notre ensemble convexe. Or pour $x \geq e^2$, cette courbe est concave. Comme 5040 est un nombre hautement composé supérieur, et que $5040 \geq 1619 \geq \exp(e^2)$, il suffira de vérifier que cette courbe est au dessus de tous les sommets de l'enveloppe convexe, autrement dit de vérifier la relation (*) ci-dessus lorsque n est un nombre hautement composé supérieur ≥ 5040.

Cela se fait en deux temps : Pour les "petits" nombres hautement composés supérieurs, on utilise l'ordinateur. Pour les plus "grands", on utilise la factorisation de H_ε, et les estimations connues sur les nombres premiers.

Par cette méthode, et en considérant des fonctions différentes de $Ax/\log x$, on peut démontrer (cf. [Rob 4] et [Nic 1]).

Proposition 8. - *Pour* $n \geq 3$, *on a :*

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq 1,5379\ldots \frac{\log n}{\log\log n}$$

avec égalité pour $n = 6\ 983\ 776\ 800 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log\log n} + 1,9349 \frac{\log n}{(\log\log n)^2}, \quad n \geq 3.$$

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log\log n} + \frac{\log n}{(\log\log n)^2} + 4,7624 \frac{\log n}{(\log\log n)^3}, \quad n \geq 3.$$

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log\log n - 1,39177}, \quad n \geq 56 \geq \exp(\exp 1,392).$$

Remarque : Sous l'hypothèse de Riemann, en tenant compte du développement asymptotique obtenu par S. Ramanujan (cf. [Ram], § 43), on peut démontrer que

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \mathrm{Li}(\log n) + c(\log n)^{(\log 3/2)/\log 2}.$$

Aucune valeur effective de c n'est connue pour le moment.

§ 4 LA FONCTION D'EULER $\phi(n)$.

J.B. Rosser et L. Schoenfeld ont démontré (cf. [Ros]) que pour $n \geq 3$, on a :

(**)
$$\frac{n}{\phi(n)} \leq e^\gamma \log\log n + \frac{5}{2\log\log n}$$

excepté pour $n = 2230\ 92870 = N_9$ pour lequel $\frac{5}{2}$ doit être remplacé par 2,50637. Le nombre γ est la constante d'Euler.

Proposition 9. - *Pour* $k \geq 1$, *on a :*

$$n < N_k \Rightarrow \frac{n}{\phi(n)} \leq \frac{N_{k-1}}{\phi(N_{k-1})}.$$

Démonstration : Elle est voisine de celle de la proposition 2.

Corollaire. - *Soit $f(n)$ une fonction croissante de n. Pour démontrer que pour tout n, $\frac{n}{\phi(n)} \leqslant f(n)$, il suffit de le démontrer lorsque $n = N_k$ pour tout k.*

Le deuxième membre de (**) n'est croissant que pour $n \geqslant 59$. On démontre donc (**) pour $n = N_k \geqslant N_4 = 210$, puis pour tous les $n \leqslant 210$. La démonstration de (**) pour $n = N_k$ se ramène à des estimations sur les nombres premiers.

Proposition 10. - *Il existe une infinité de n pour lesquels :*

$$\frac{n}{\phi(n)} > e^{\gamma} \log \log n .$$

La démonstration se trouve dans [Nic 2].

Les nombres N_k jouent le rôle des nombres hautement composés supérieurs pour la fonction $d(n)$. D.W. Masser et P. Shiu ont considéré les nombres n tels que $m > n \Rightarrow \phi(m) > \phi(n)$, qui jouent le rôle des nombres hautement composés (cf. [Ala] et [Masser]).

§ 5 LA FONCTION $\sigma(n)$ = SOMME DES DIVISEURS DE n.

Si n s'écrit :

$$n = \prod_{k \geqslant 1} p_k^{a_k} , \qquad a_k \geqslant 0 ;$$

alors,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{k \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{p_k} + \ldots + \frac{1}{p_k^{a_k}}\right) < \prod_{k \geqslant 1} \frac{1}{1 - 1/p_k} = \frac{n}{\phi(n)} .$$

Les majorations obtenues pour $\frac{n}{\phi(n)}$ sont donc aussi valables pour $\frac{\sigma(n)}{n}$.

On définit pour $\varepsilon > 0$, le nombre colossalement abondant S_ε qui maximise $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$, et l'on peut faire la même théorie qu'avec la fonction $d(n)$ et les nombres hautement composés supérieurs. (cf. [Ala]).

Proposition 11. - *Pour $n \geqslant 3$, on a :*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leqslant e^{\gamma} \log \log n + \frac{0,6482\ldots}{\log \log n}$$

avec égalité pour $n = 12$.

Sous l'hypothèse de Riemann, on a :

pour $n \geqslant 5041$, $$\frac{\sigma(n)}{n} \leqslant e^{\gamma} \log \log n .$$

Réciproquement, si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une infinité de n tels que $\sigma(n) > n\, e^{\gamma} (\log \log n)$.

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Rob 3].

§ 6 LA FONCTION g(n) DE LANDAU.

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments.
On définit :

$$g(n) = \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\text{ordre de } \sigma).$$

On peut démontrer que :

$$g(n) = \max_{\ell(k)\leqslant n} k ,$$

où, pour $k = \prod_{j\geqslant 1} p_j^{a_j}$, on définit

$$\ell(k) = \sum_{\substack{j\geqslant 1\\ a_j\geqslant 1}} p_j^{a_j} .$$

Pour $\rho > 0$, on considère les nombres G_ρ qui minimisent la quantité $\ell(n) - \rho \log n$. Ces nombres jouent le rôle des nombres hautement composés supérieurs de Ramanujan. Ils permettent de démontrer le résultat suivant :

Proposition 12. - *Pour $n \geqslant 1$, on a :*

$$\log g(n) \leqslant 1{,}05341\ldots\sqrt{n \log n}$$

avec égalité pour $n = 1319766$.

Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\log g(n) < \sqrt{n \log n}\ \left(1 + \frac{\log\log n}{2 \log n}\right).$$

Pour $n \geqslant 906$, on a :

$$\log g(n) \geqslant \sqrt{n \log n}.$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Mas 1] et [Mas 2].

REFERENCES

[Ala] L. ALAOGLU and P. ERDÖS. - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. Math. Soc. t. 56, 1944, p. 448-469.

[Erd] P. ERDÖS et J.L. NICOLAS. - Sur la fonction : nombre de facteurs premiers de n, Ens. Math. t. 27, 1981, p. 3-27.

[Mas 1] J.P. MASSIAS. - Majoration explicite de l'ordre d'un élément du groupe symétrique. Annales Fac. Sci. Toulouse. t. 6 , 1984, p. 269-281.

[Mas 2] J.P. MASSIAS. - Ordre maximum d'un élément du groupe symétrique et applications, Thèse de 3ème cycle de l'Université de Limoges, mai 1984.

[Masser] D.W. MASSER and P. SHIU. - On sparsely totient numbers. A paraître Pacific J. of Maths, 1985.

[Nic 1] J.L. NICOLAS et G. ROBIN. - Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de n, Canad. Math. Bull. t. 26, 1983, p. 485-492.

[Nic 2] J.L. NICOLAS. - Petites valeurs de la fonction d'Euler, J. of Number Theory, t. 17, 1983, p. 375-388.

[Ram] S. RAMANUJAN. - Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. , Séries 2, t. 14, 1915, p. 347-400 ; and Collected papers, Cambridge, at the University Press, 1927, p. 78-128.

[Rob 1] G. ROBIN. - Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k-ième nombre premier, et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n, Acta Arithmetica, t. 42, 1983, p. 367-389.

[Rob 2] G. ROBIN. - Sur la différence $Li(\theta(x)) - \pi(x)$, Annales Fac. Sci. Toulouse, t. 6, 1984, p. 257-268.

[Rob 3] G. ROBIN. - Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. pures et appliquées t. 63, 1984,p.187-213

[Rob 4] G. ROBIN. - Grandes valeurs de fonctions arithmétiques et problèmes d'optimisation en nombres entiers, Thèse, Université de Limoges, mars 1983.

[Ros] J.B. ROSSER and L. SCHOENFELD. - Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. of Math. t. 6, 1962, p. 64-94.

[Van] P. VAN DENBOSCH. - Etude des propriétés de la fonction $\omega(n)$, Thèse 3ème cycle, Université de Lille, juin 1982.

J.L. NICOLAS

Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, Avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX.