AVEC LE CALCUL FORMEL, LUTTONS CONTRE LES INÉGALITÉS

Jean-Louis NICOLAS (Université Claude Bernard, Lyon 1)*

1. Introduction

Soit

$$f(x,y) = (y+1)(y+x)^x(y+x+3)^{x+1}$$

$$g(x,y) = (y+x+1)^{x+1}[(y+2)(y+x+2)^x + (y+x)^x].$$

Ces deux fonctions f et g sont définies pour x et $y \geqslant 0$ à l'exception de $(x,y) = (0,0)$. Nous allons démontrer :

PROPOSITION. — *Pour tout* (x,y), $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ *on a :*

$$f(x,y) \leqslant g(x,y). \tag{1}$$

Démontrer une telle inégalité peut vous apparaître comme un jeu modérément rigolo. Cependant, il arrive d'avoir à prouver de telles relations. Supposons qu'un de vous puisse être comme tant d'autres obligé de démontrer une inégalité de ce type, la première chose à faire est de se persuader qu'elle est vraie. Vous demandez alors à un expert de "Mathematica", en l'occurence François Morain, de vous tracer la surface

$$z = \log g(x,y) - \log f(x,y).$$

Cela donne les résultats des figures 1 et 2, où l'axe des y est facile à repérer car

$$g(0,y) = f(0,y).$$

Ensuite la méthode de démonstration est bien classique. Nous allons montrer que pour tout y fixé, la fonction

$$x \mapsto g(x,y) - f(x,y)$$

est positive, en étudiant les variations de fonctions auxiliaires. Mais les calculs ne sont pas simples, et le système de calcul formel MAPLE nous a permis de trouver

---

* Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur IBM 3090 du Centre de Calcul de l'IN2P3, dont j'ai plaisir à remercier le directeur R. Ganouna et le personnel pour leur accueil.

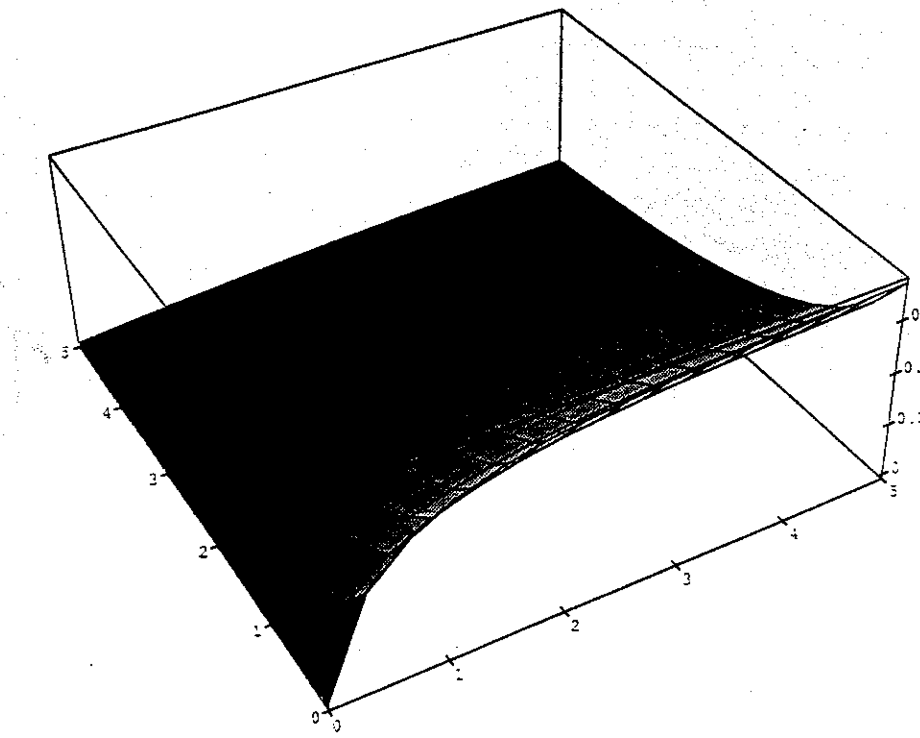

figure 1

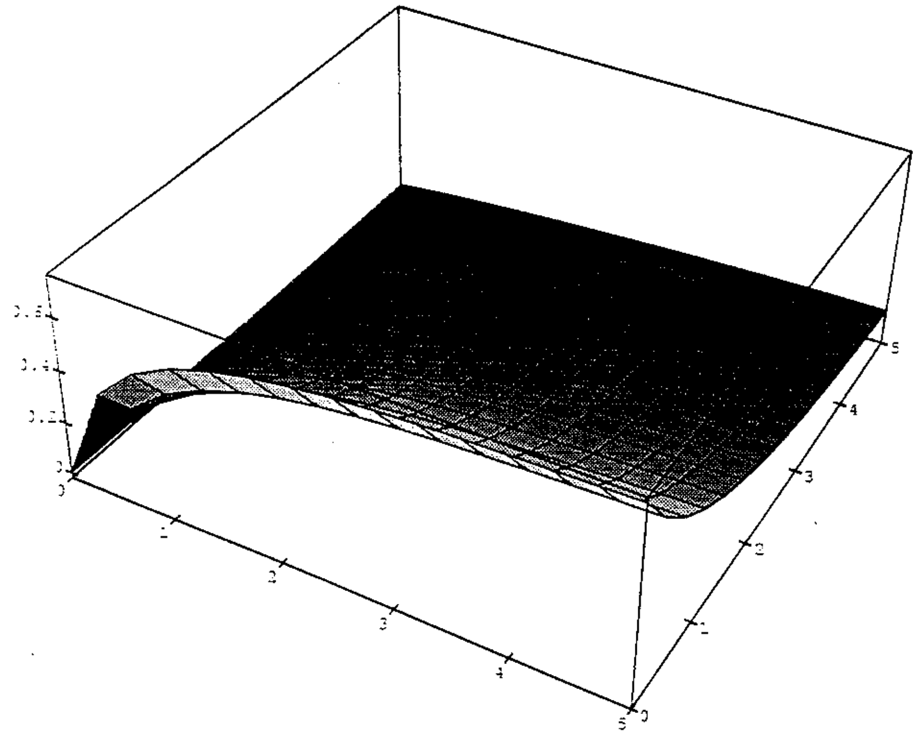

figure 2

une démonstration. Peut-être un lecteur astucieux en trouvera-t-il une plus élégante. Il n'en reste pas moins que le calcul formel m'a permis, en faisant les calculs à ma place, de déterminer des fonctions auxiliaires qui mènent à une solution.

2. Un peu de "pub" pour les nombres Eulériens

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$. La fonction $(1-\lambda e^{-z})^{-1}$ est développable en série entière en $z=0$ et l'on a :

$$\frac{1}{1-\lambda e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-A_n(\lambda)}{(\lambda-1)^{n+1}} \frac{z^n}{n!}$$

où $A_n(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ, de terme constant nul. On écrit

$$A_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} A(n,k)\lambda^k$$

ce qui définit les nombres Eulériens $A(n,k)$ introduits par Euler en 1755. Ces nombres vérifient la relation de récurrence triangulaire

$$A(n+1,k) = (n-k+2)A(n,k-1) + kA(n,k)$$

ce qui avec les conditions $A(n,1) = A(n,n) = 1$ permet de les calculer. On a également la relation de symétrie :

$$A(n,k) = A(n,n-k+1)$$

Table des $A(n,k)$

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1

On trouvera différentes propriétés de ces nombres dans les livres de L. Comtet [1] et de Knuth [2] (car ces nombres sont liés aux permutations, et donc aux algorithmes de tri) ou dans [4], section B68.

Dans l'article [3] écrit en commun avec L. Lesieur, nous nous intéressons au maximum sur une ligne des nombres Eulériens :

$$M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} A(n,k).$$

Nous démontrons la relation

$$A(n,k-1) < \Big(\frac{n-k}{n-k+2}\Big)^{n-2k+2} A(n,k)$$

valable pour $n \geqslant 2k-1$ et $k \geqslant 2$ à l'aide de la proposition ci-dessus.

Cette relation nous permet entre autres choses de montrer la décroissance de la suite $M_{2n}/(2n)!$.

3. Démonstration

On suppose que y est un paramètre et on définit

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (y+2)\Big(1+\frac{2}{y+x}\Big)^x + 1 - (y+1)\Big(1+\frac{2}{y+x+1}\Big)^{x+1}\\ &= (y+2)\psi(x) - (y+1)\psi(x+1) + 1\end{aligned}$$

avec

$$\psi(x) = \Big(1+\frac{2}{y+x}\Big)^x.$$

Lorsque $y=0$, les fonctions ψ et φ se prolongent par continuité en $x=0$ en posant $\psi(0)=1$ et $\varphi(0)=0$.

Nous allons montrer que pour $y \geqslant 0$, on a $\varphi(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et cela démontrera la proposition.

On étudie la dérivée logarithmique de ψ :

$$h(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \log\Big(1+\frac{2}{y+x}\Big) + \frac{y}{y+x} - \frac{y+2}{y+x+2}$$

$$h'(x) = -4\,\frac{x(y+1)+y(y+2)}{(y+x)^2(y+x+2)^2}.$$

On voit donc que pour $y \geqslant 0$ fixé, h est décroissante en x et en particulier :

$$h(x+1) < h(x) \qquad \text{pour } x \geqslant 0. \tag{1}$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\psi(x+1)}{\psi(x)}$ est décroissante, car son logarithme a pour dérivée $h(x+1)-h(x)$. On a en particulier

$$\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} \leqslant \frac{\psi(1)}{\psi(0)} = \frac{y+3}{y+1} \qquad \text{pour } x \geqslant 0. \tag{2}$$

D'autre part,

$$\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} = \Big[\frac{(y+x+3)(y+x)}{(y+x+1)(y+x+2)}\Big]^x \frac{y+x+3}{y+x+1} \leqslant \frac{y+x+3}{y+x+1} \tag{3}$$

car le crochet est $\leqslant 1$. Cela entraîne :

$$(4) \qquad \frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} \leqslant \frac{y+2}{y+1} \qquad \text{pour } x \geqslant y+1.$$

Il vient ensuite :

$$(5) \qquad \varphi'(x) = (y+2)\psi(x)h(x) - (y+1)\psi(x+1)h(x+1).$$

Lorsque $x \geqslant y+1$, les inégalités (1) et (4) montrent que $\varphi'(x) \geqslant 0$. Nous supposerons donc maintenant que $0 \leqslant x \leqslant y+1$.

Nous avons deux choix pour minorer $\varphi'(x)$, en utilisant (2) ou (3). La minoration de $\varphi'(x)$ par (3) n'a pas abouti. Par contre, si l'on pose

$$(6) \qquad u(x) = (y+2)h(x) - (y+3)h(x+1),$$

on a :

$$\begin{aligned} u'(x) = 4\big[&(y+1)x^5 + (2y^2+2y-1)x^4 - (2y^3+20y^2+42y+20)x^3 \\ &- (8y^4+62y^3+158y^2+148y+36)x^2 \\ &- (7y^5+61y^4+194y^3+269y^2+147y+18)x \\ &- (2y^6+20y^5+77y^4+141y^3+120y^2+36y)\big] \\ &/\big[(y+x)^2(y+x+1)^2(y+x+2)^2(y+x+3)^2\big]. \end{aligned}$$

On observe qu'au numérateur de $u'(x)$ presque tous les termes sont négatifs. Les seuls termes positifs sont

$$(7) \qquad (y+1)x^5 + 2y(y+1)x^4.$$

On pense donc que $u'(x)$ a de bonnes raisons d'être négatif lorsque $x \leqslant y+1$. La majoration de (7) obtenue en remplaçant x par $y+1$ n'est pas suffisante. Par contre, si dans le numérateur de $u'(x)$ on majore (7) par

$$x(y+1)(y+1)^4 + x(2y)(y+1)(y+1)^3$$

et que l'on développe, on trouve un polynôme en x et y à coefficients tous négatifs, ce qui montre que

$$u'(x) \leqslant 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant y+1.$$

et donc

$$(8) \qquad u(x) \geqslant u(y+1) \qquad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant y+1.$$

Par ailleurs (2), (5) et (6) donnent

$$(9) \qquad \varphi'(x) \geqslant \psi(x)u(x).$$

On pose

$$w(y) = u(y+1).$$

Supposons que l'on ait montré

(10) $$w(y) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad y \geqslant 0.$$

Alors (8) et (9) impliquent que $\varphi(x)$ est croissante en x pour tout $y \geqslant 0$, et comme $\varphi(0) = 0$, on aura bien démontré la proposition.

Il reste à démontrer (10). On a :

(11) $$w'(y) = \log\left(1 + \frac{2}{2y+1}\right) - \log\left(1 + \frac{2}{2y+2}\right) - \frac{8y^5 + 64y^4 + 170y^3 + 191y^2 + 87y + 11}{(2y+1)^2(2y+3)^2(y+1)^2(y+2)}$$

$$w''(y) = \left[240y^7 + 1808y^6 + 5524y^5 + 8688y^4 + 7284y^3 + 2909y^2 + 264y - 95\right] / \left[(y+1)^3(y+2)^2(2y+1)^3(2y+3)^3\right].$$

Le numérateur de $w''(y)$ est un polynôme en y dont la dérivée est positive pour $y \geqslant 0$. On voit donc que $w''(y)$ a une seule racine réelle positive y_0 vérifiant

$$0 < y_0 < \frac{95}{264} < 0.36.$$

Pour compléter le tableau de variation de $w'(y)$, on a, par (11) :

$$w'(0) = \log(3/2) - 11/18 = -0.205646 < 0$$

et

$$\lim_{y \to +\infty} w'(y) = 0.$$

Ce tableau

	0		y_0		∞
$w''(y)$		$-$	0	$+$	
$w'(y)$	-0.2				0

montre que $w'(y) < 0$ pour $y \geqslant 0$, et donc $w(y)$ est une fonction décroissante de y.

Il n'est pas complètement évident de montrer que $\lim_{y \to \infty} w(y) = 0$, mais MAPLE le fait pour vous, et peut donner un développement asymptoptique :

$$w(y) = \frac{5}{8y^2} + O\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

et cela achève la preuve de (10), et donc de la proposition.

Références

[1] COMTET L. — *Analyse combinatoire*, t. 1 et 2, PUF, Paris, 1970.

[2] KNUTH D.E. — *The art of computer programming, vol. 3, Sorting and Searching*, Addison Wesley, 1973.

[3] LESIEUR L. et NICOLAS J.-L. — *Sur les Nombres Eulériens* $M_n = \operatorname{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} A(n,k)$, à paraître.

[4] *Reviews in Number Theory*, 1940-72 (édité par W.J. Leveque) et 1973-83 (édité par R.K. Guy), Amer. Math. Soc.

Nous joignons, pages suivantes, quelques instructions MAPLE. *Les lignes précédées du signe ♯ sont des commentaires. Les instructions sont alignées à gauche, suivent le "prompt" >, et sont terminées par un point virgule. Les réponses de l'ordinateur sont centrées. Les trois premières instructions définissent la fonction $h(x)$. L'instruction "normal" simplifie les expressions.*

```
Ready; T=0.01/0.01 17:02:47
 maple
     |\^/|     Licensed for use at: Centre de Calcul
 ._|\|   |/|_. WATCOM Products, Inc.
  \  MAPLE  /  Version 4.2
  <____ ____>  For on-line help, type  help();
       |
 >
 h:=proc(x);
 >
 log(1+2/(x+y))+y/(x+y)-(y+2)/(x+y+2);
 >
 end;
 h := proc (x) log(1+2*1/(x+y))+y/(x+y)-(y+2)/(x+y+2) end

 >
 h(x);
                                 1          y         y + 2
                   ln(1 + 2 -------) + ------- - -----------
                              x + y     x + y    x + y + 2

 >
 h1:=diff(h(x),x);
                                1                          y              y + 2
       h1 := - 2 -------------------------- - ---------- + --------------
                        2          1                   2                  2
                 (x + y)  (1 + 2 -------)      (x + y)      (x + y + 2)
                                  x + y

 >
 h1:=normal(h1);
                                                2
                                x y + x + y  + 2 y
                      h1 := - 4 ----------------------
                                       2            2
                                (x + y)  (x + y + 2)

 >
 u:=(y+2)*h(x)-(y+3)*h(x+1);
                               1         y         y + 2
 u := (y + 2) (ln(1 + 2 -------) + ------- - -----------)
                          x + y     x + y    x + y + 2

                                 1              y              y + 2
    - (y + 3) (ln(1 + 2 -----------) + ----------- - -----------)
                          x + 1 + y     x + 1 + y     x + 3 + y

 >
 u1:=normal(diff(u,x));
 u1 :=

    4

              6     5     4        3  2         2  2       2  3         3          4
       (- 2 y  + x  - x  - 20 x  y  - 158 x  y  - 62 x  y  - 194 x y  - 61 x y
```

$$- 42 x^3 y + 2 x^4 y^2 - 2 x^3 y^3 - 8 x^2 y^4 - 7 x y^5 + x^5 y + 2 x^4 y$$

$$- 77 y^4 - 20 y^5 - 20 x^3 - 141 y^3 - 18 x - 36 y - 36 x^2 - 147 x y$$

$$- 120 y^2 - 148 y x^2 - 269 x y^2)$$

$$/ ((x + y)^2 (x + y + 2)^2 (x + 1 + y)^2 (x + 3 + y)^2)$$

```
>
# On appelle  nu  le 1/4 du numerateur de u1

nu:=numer(u1/4);
```

$$nu := - 2 y^6 + x^5 - x^4 - 20 x^3 y^2 - 158 x^2 y^2 - 62 x^2 y^3 - 194 x y^3 - 61 x y^4$$

$$- 42 x^3 y + 2 x^4 y^2 - 2 x^3 y^3 - 8 x^2 y^4 - 7 x y^5 + x^5 y + 2 x^4 y - 77 y^4$$

$$- 20 y^5 - 20 x^3 - 141 y^3 - 18 x - 36 y - 36 x^2 - 147 x y - 120 y^2 - 148 y x^2$$

$$- 269 x y^2$$

```
>

# On ordonne suivant les puissances de x

nu1:=collect(nu,x);
```

$$nu1 := (y + 1) x^5 + (2 y^2 + 2 y - 1) x^4 + (- 20 - 42 y - 2 y^3 - 20 y^2) x^3$$

$$+ (- 158 y^2 - 62 y^3 - 8 y^4 - 36 - 148 y) x^2$$

$$+ (- 7 y^5 - 147 y - 61 y^4 - 269 y^2 - 194 y^3 - 18) x - 2 y^6 - 141 y^3 - 77 y^4$$

$$- 20 y^5 - 120 y^2 - 36 y$$

```
>

# On repere les termes positifs

termepos:=(y+1)*x^5+2*y*(y+1)*x^4;
```

$$termepos := (y + 1) x^5 + 2 y (y + 1) x^4$$

```
>
```

#On les majore

```
termaj:=x*subs(x=y+1,termepos/x);
```

$$\mathrm{termaj} := \frac{x\left((y+1)^6 + 2\,y\,(y+1)^5\right)}{y+1}$$

```
>
termaj:=normal(termaj);
```

$$\mathrm{termaj} := (3\,y+1)\,(y+1)^4\,x$$

```
>
```

#On reporte la majoration dans nu

```
numaj:=nu1-termepos+termaj;
```

$$\begin{aligned}\mathrm{numaj} := {} & (2\,y^2 + 2\,y - 1)\,x^4 + (-\,20 - 42\,y - 2\,y^3 - 20\,y^2)\,x^3 \\ & + (-\,158\,y^2 - 62\,y^3 - 8\,y^4 - 36 - 148\,y)\,x^2 \\ & + (-\,7\,y^5 - 147\,y - 61\,y^4 - 269\,y^2 - 194\,y^3 - 18)\,x - 2\,y^6 - 141\,y^3 - 77\,y^4 \\ & - 20\,y^5 - 120\,y^2 - 36\,y - 2\,y\,(y+1)\,x^4 + (3\,y+1)\,(y+1)^4\,x\end{aligned}$$

```
>
numaj:=collect(numaj,[x,y]);
```

$$\begin{aligned}\mathrm{numaj} := {} & -\,x^4 + (-\,20 - 42\,y - 2\,y^3 - 20\,y^2)\,x^3 \\ & + (-\,158\,y^2 - 62\,y^3 - 8\,y^4 - 36 - 148\,y)\,x^2 \\ & + (-\,4\,y^5 - 48\,y^4 - 172\,y^3 - 251\,y^2 - 140\,y - 17)\,x - 2\,y^6 - 141\,y^3 - 77\,y^4 \\ & - 20\,y^5 - 120\,y^2 - 36\,y\end{aligned}$$

```
>
```

#On constate que tous les termes sont negatifs

```
w:=subs(x=y+1,u);
```

$$\begin{aligned}w := {} & (y+2)\left(\ln\left(1 + 2\,\frac{1}{2\,y+1}\right) + \frac{y}{2\,y+1} - \frac{y+2}{2\,y+3}\right) \\ & -\,(y+3)\left(\ln\left(1 + 2\,\frac{1}{2\,y+2}\right) + \frac{y}{2\,y+2} - \frac{y+2}{2\,y+4}\right)\end{aligned}$$

```
>
w1:=diff(w,y);
                        1              y           y + 2
w1 := ln(1 + 2 ---------) + --------- - ---------
                    2 y + 1       2 y + 1      2 y + 3

   + (y + 2)

                          1                         1              y
      (- 4 ------------------------------ + --------- - 2 ------------
                      2               1             2 y + 1                   2
           (2 y + 1)  (1 + 2 ---------)                           (2 y + 1)
                                 2 y + 1

              1                y + 2
        - --------- + 2 ------------)
           2 y + 3                   2
                            (2 y + 3)

                      1            y           y + 2
   - ln(1 + 2 ---------) - --------- + ---------
                  2 y + 2      2 y + 2      2 y + 4

   - (y + 3)

                          1                         1              y
      (- 4 ------------------------------ + --------- - 2 ------------
                      2               1             2 y + 2                   2
           (2 y + 2)  (1 + 2 ---------)                           (2 y + 2)
                                 2 y + 2

              1                y + 2
        - --------- + 2 ------------)
           2 y + 4                   2
                            (2 y + 4)

>
nops(w1);
                                        8

>
#Il y a 8 termes dans w1 dont le premier est

ter1:=op(1,w1);
                                                      1
                           ter1 := ln(1 + 2 ---------)
                                                  2 y + 1

>
ter5:=op(5,w1);
                                                        1
                          ter5 := - ln(1 + 2 ---------)
                                                    2 y + 2

>
```

```
#Pour simplifier w1, on sort les termes transcendants

 w1rat:=normal(w1-ter1-ter5);
                                    4       5         3                2
                               64 y   + 8 y   + 170 y   + 87 y + 191 y  + 11
            w1rat := - --------------------------------------------------------
                                          2           2          2
                                 (2 y + 1)  (2 y + 3)  (y + 1)  (y + 2)

 >
 17:25:22  * WNG FROM GIRAUD  : RAPPEL: ARRET DE L'AUTOCOMUTATEUR DE LYON A 18 HEURES.
 w1:=w1rat+ter1+ter5;
                 4       5         3                2
           64 y  + 8 y   + 170 y   + 87 y + 191 y   + 11                        1
 w1 := - ------------------------------------------------------- + ln(1 + 2 ---------)
                       2           2          2                              2 y + 1
              (2 y + 1)  (2 y + 3)  (y + 1)  (y + 2)

                      1
    - ln(1 + 2 ---------)
                2 y + 2

 >
 w2:=normal(diff(w1,y));
                6         7          4          5          3                    2
        1808 y  + 240 y   + 8688 y   + 5524 y   + 7284 y   + 264 y + 2909 y   - 95
  w2 := -------------------------------------------------------------------------------
                                    3           3          3          2
                           (2 y + 1)  (2 y + 3)  (y + 1)  (y + 2)

 >
 limit(w,y=infinity);
                                        0

 >
 asympt(w,y,5);
                               1      41     1      113     1          1
                      5/8 ---- - ---- ---- + ----- ---- + O(----)
                               2      24     3      32      4          5
                              y             y              y          y

 >
 quit
 words used=133445, alloc=38608, time=1.466 (seconde)
 Ready; T=1.54/1.83 17:30:25
```

Gazette des Mathématiciens
(Société Mathématique de France)
Janvier 1991, n°47, p. 60-61.

A propos de l'article de Jean-Louis Nicolas paru dans la Gazette, n° 46

Avec un crayon et du papier

Dans le n° 46 de la *Gazette des Mathématiciens*, pp. 60-71, Jean-Louis Nicolas expliquait comment le système de calcul formel MAPLE et l'ordinateur IBM 3090 du Centre de Calcul de l'IN2P3 lui avaient permis de résoudre le problème suivant : démontrer que pour tout $x \geq 0$ et tout $y \geq 0$, avec $(x, y) \neq (0,0)$, l'expression

$$f(x,y) = (y+1)(y+x)^x(y+x+3)^{x+1}$$

est majorée par l'expression

$$g(x,y) = (y+x+1)^{x+1}\left[(y+2)(y+x+2)^x + (y+x)^x\right].$$

Je désirerais expliquer comment un crayon et du papier permettent d'obtenir le même résultat en quelques lignes. On a

$$\begin{aligned} g(x,y) - f(x,y) =& (y+x+1)^{x+1}(y+x+2)^x(y+2) \\ &- (y+x)^x\left((y+x+3)^{x+1} - (y+x+1)^{x+1}\right) \\ &- y(y+x)^x(y+x+3)^{x+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dans le premier terme, utilisons la minoration évidente

$$(y+x+1)^x(y+x+2)^x \geq (y+x)^x(y+x+3)^x\,; \tag{2}$$

dans le second, utilisons la majoration

$$(y+x+3)^{x+1} - (y+x+1)^{x+1} \leq 2(x+1)(y+x+3)^x \tag{3}$$

déduite de la relation $b^u - a^u = \int_a^b ux^{u-1}dx \leq ub^{u-1}(b-a)$ où l'on prend $u = x+1$, $a = y+x+1$ et $b = y+x+3$.

En insérant (2) et (3) dans (1), on trouve

$$g(x,y) - f(x,y) \geq (y+x)^x(y+x+3)^x[(y+x+1)(y+2) - 2(x+1) - y(y+x+3)] = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

J. OESTERLÉ
Université Pierre et Marie Curie (5 novembre 1990)

Pour quelques francs de moins

Dans la *Gazette* d'octobre 1990 (pp. 60-71), Nicolas se propose de démontrer, pour x et $y \geq 0$

$$(y+1)(y+x)^x(y+x+3)^{x+1} \leq (y+x+1)^{x+1}\left[(y+2)(y+x+2)^x + (y+x)^x\right].$$

Ayant ramené cette inégalité à la suivante :

$$\left(1 + \frac{2}{x+y+1}\right)^{x+1} \leq \frac{1}{y+1} + \frac{y+2}{y+1}\left(1 + \frac{2}{y+x}\right)^x,$$

l'auteur aurait pu remarquer qu'il s'agissait, bien sûr, d'une inégalité de convexité, de surcroît évidente. En effet, soit

$$f(t) = (1+t)^{x+1}, \quad \alpha = \frac{1}{x+y+1}, \quad \beta = \frac{x+y}{x+y+1}.$$

La convexité de f donne aussitôt :

$$f\left(\alpha 0 + \beta\frac{2}{x+y}\right) \leq \alpha f(0) + \beta f\left(\frac{2}{x+y}\right)$$

c'est-à-dire

$$\left(1 + \frac{2}{x+y+1}\right)^{x+1} \leq \frac{1}{x+y+1} + \frac{x+y}{x+y+1}\left(1 + \frac{2}{x+y}\right)\left(1 + \frac{2}{x+y}\right)^x$$

d'où :

$$\left(1 + \frac{2}{x+y+1}\right)^{x+1} \leq \frac{1}{x+y+1} + \frac{x+y+2}{x+y+1}\left(1 + \frac{2}{x+y}\right)^x$$

(inégalité légèrement meilleure que celle de Nicolas).

Ce dernier évoquait l'éventualité de lecteurs "astucieux" et de démonstration "élégante". De ma part toute prétention en ces domaines serait évidemment grotesques. Une remarque toutefois s'impose : la démonstration ci-dessus n'a coûté qu'un peu de papier, de temps et de méthode; si l'on en croit le bon La Fontaine, *"c'est le fonds qui manque le moins"*.

Georges LION
Université Française du Pacifique
Centre Universitaire de Nouvelle-Calédonie (5 décembre 1990)