DISTRIBUTION DES SOUS-SOMMES D'UNE PARTITION

Jean-Louis NICOLAS *

Nous désignerons par $p(n)$ le nombre de partitions sans restriction de n, et par $r(n, m)$ le nombre de partitions de n dont les sommants sont $\geq m$. Plus généralement si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, nous noterons $r(n, A)$ le nombre de partitions de n dont aucun sommant n'appartient à A. Nous dirons qu'une partition de n :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

représente a, s'il existe une sous somme $n_{i_1} + n_{i_2} + \cdots + n_{i_j}$ égale à a. Nous définissons $R(n, a)$ comme le nombre de partitions de n qui ne représentent pas a.

On voit ainsi que :

$$r(n, m) = r(n, \{1, 2, \ldots, n-1\})$$

$$R(n, a) \geq r(n, a+1) \tag{1}$$

$$R(n, a) \geq r(n, \{1, 2, \ldots, [a/2], a\}) \tag{2}$$

en notant $[x]$ la partie entière de x.

Nous considérons aussi les partitions de n en sommants distincts. Dans ce cas les notations ci-dessus seront remplacées par $q(n)$, $\rho(n, m)$, $\rho(n, A)$, $Q(n, a)$.

Nous nous proposons dans cet exposé de faire le point sur les diverses quantités ci-dessus. Fin 1986, J. Dixmier a attiré notre attention sur ce sujet en voulant évaluer le nombre d'invariants des formes binaires (cf. [DNE]). Ce nombre est en effet minoré par le nombre de solutions d'une équation diophantienne proche de celles qui interviennent dans la théorie des partitions.

Au paragraphe 3, nous étudierons le nombre de couples de partitions de n sans sous-sommes communes (à part 0 et n).

---

* Ce travail a reçu l'aide du CNRS, Greco 060 (calcul formel), PRC Math-Info, PICS France USA n° 48b

Les résultats mentionnés ci-dessous sont en grande partie le fruit d'une collaboration avec J. Dixmier, P. Erdös et A. Sárközy.

1. Estimation de $r(n,m)$ et de $\rho(n,m)$

On définit $p(n,m)$ comme le nombre de partitions de n en sommants $\leq m$, ou ce qui revient au même comme le nombre de partitions de n en au plus m sommants.

On a :

$$\begin{aligned} r(n,m) &= r(n,m+1) + r(n-m,m) \\ r(n,n) &= 1 \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer $r(n,m)$ par récurrence.

On a également (cf. [GGM], p. xiii) :

$$r(n,m) = \sum_{t=0}^{[n/m]} p(n-tm,t) \tag{3}$$

et il est facile de voir que

$$r(n,m) \leq p(n,[n/m]). \tag{4}$$

En utilisant (3), Gupta (cf. [G]) a donné une estimation asymptotique de $r(n,m)$ valide pour $n = O(m \log m)$.

J. Herzog a donné dans sa thèse (cf. [H1], p. 57) l'estimation valable pour $m = O(n^{3/8}(\log n)^{1/4})$:

$$\begin{aligned} \log r(n,m) &= \pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\sqrt{n} - \tfrac{1}{2} m \log n + m \log m \\ &\quad - m\left(1 + \log \tfrac{\sqrt{6}}{\pi}\right) + O\left(n^{1/4}\sqrt{\log n}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Ce résultat est obtenu comme application d'un théorème Taubérien.

Il est démontré dans ([DN1]), que l'on a uniformément pour $1 \leq m \leq n^{1/4}$

$$r(n,m) = p(n)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1} (m-1)!(1 + O(m^2/\sqrt{n})). \tag{6}$$

Cette formule est étendue dans [DN2], où l'on montre que, pour $0 < \varepsilon < 1/3$ et $m \leq n^{1/3-\varepsilon}$, on a :

$$r(n,m) \sim p(n)(m-1)!\left(\frac{C}{2\sqrt{n}}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{C}{8} + \frac{1}{2C}\right)\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right), \tag{7}$$

où $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Pour montrer la cohérence avec (5) rappelons la formule de Hardy-Ramanujan (cf. [HR]) :

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp(C\sqrt{n}). \tag{8}$$

Dans [ENS 1], il est démontré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que quand $n \longrightarrow +\infty$, on a uniformément pour $1 \leq m \leq \alpha\sqrt{n}$

$$\exp\left(O\left(\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \frac{r(n,m)}{p(n)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1}(m-1)!} \leq 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{9}$$

Enfin, dans [DN2], le cas $m \sim \lambda\sqrt{n}$ est étudié. Il est commode de poser pour x réel > 0 :

$$r(n,x) = r(n,\lceil x \rceil) \quad \text{et} \quad p(n,x) = p(n,[x]),$$

où $\lceil x \rceil = \min\{n \ ; \ n \in \mathbb{Z}, \ n \geq x\}$; il est démontré que pour $\lambda > 0$ fixé il existe une fonction g telle que l'on ait pour $n \longrightarrow \infty$,

$$\log r(n, \lambda\sqrt{n}) \sim g(\lambda)\sqrt{n}. \tag{10}$$

La démonstration de (10) utilise (3) et les résultats de Szekeres (cf. [Sz1] et [Sz2])

$$\log p(n, \lambda\sqrt{n}) \sim f(\lambda)\sqrt{n}.$$

La fonction g est analytique pour $\lambda > 0$, vérifie une équation différentielle du second ordre, et il est donné dans [DN2] les développements asymptotiques de $g(\lambda)$ au voisinage de 0 et de l'infini, calculé par les systèmes de calcul forme MAPLE et MACSYMA.

Dans le cas des partitions sans répétition, la quantité $\rho(n,m)$ a été semble-t-il introduite pour la première fois dans [ES2], où il est démontré p. 433, que pour $m \leq n^{1/5}$, on a :

$$\rho(n,m) \sim q(n)2^{-m}, \tag{11}$$

en utilisant l'intégration complexe de la fonction génératrice. Rappelons ici que Hardy et Ramanujan ont donné pour $q(n)$ l'estimation :

$$q(n) \sim \frac{1}{4(3n^3)^{1/4}} \exp(\pi\sqrt{n/3}). \tag{12}$$

Dans [ENSz], il est démontré par des méthodes élémentaires que pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq m \leq n$ on a :

$$\frac{q(n)}{2^{m-1}} \leq \rho(n,m) \leq \frac{1}{2^{m-1}} q\Big(n + \frac{m(m-1)}{2}\Big) \tag{13}$$

et

$$\rho(n,m) \leq \frac{1}{2^{m-2}} q\Big(n + \Big[\frac{m(m-1)}{4}\Big]\Big). \tag{14}$$

Il est aussi prouvé que pour $m = o\Big(\frac{n}{\log n}\Big)^{1/3}$, on a :

$$\rho(n,m) = (1+o(1)) \frac{1}{2^{m-1}} q\Big(n + \Big[\frac{m(m-1)}{4}\Big]\Big). \tag{15}$$

Enfin, il est démontré que pour ε fixé, $0 < \varepsilon < 10^{-2}$, et $m \leq n^{3/8-\varepsilon}$, on a :

$$\rho(n,m) = (1+o(1)) \frac{q(n)}{\prod\limits_{1 \leq j \leq m-1} \Big(1 + \exp\Big(-\frac{\pi j}{2\sqrt{3n}}\Big)\Big)}. \tag{16}$$

Dans [H2], J. Herzog a obtenu à l'aide d'un théorème taubérien l'estimation valable uniformément pour $m = o(\sqrt{n})$

$$\begin{aligned} \log \rho(n,m) = {} & \pi \sqrt{\tfrac{n}{3}} - m \log 2 + \tfrac{\pi}{8\sqrt{3}} \tfrac{m^2}{\sqrt{n}} - \tfrac{\pi^2}{288} \tfrac{m^3}{n} \\ & + O(m^4 n^{-3/2} + n^{1/4} \sqrt{\log n}). \end{aligned} \tag{17}$$

G. Freiman et J. Pitman, ont obtenu, dans [FP], par la méthode du col, une estimation valable pour :

$$1 \leq m \leq n(2 \log n)^{-4}. \tag{18}$$

Soit $\sigma = \sigma(n,m)$ l'unique nombre réel tel que :

$$n = \sum_{j=m}^{n} \frac{j}{1 + e^{\sigma j}}$$

et

$$B^2 = \sum_{j=m}^{n} \frac{j^2 e^{\sigma j}}{(1 + e^{\sigma j})^2}.$$

Sous la condition (18), G. Freiman et J. Pitman démontrent :

$$\rho(n,m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi B^2}} e^{\sigma n} \prod_{j=m}^{n} (1+e^{-j\sigma}). \tag{19}$$

Il est certainement possible, par une estimation précise de σ et B de déduire les formules (15) (16) et (17) de la formule (19). La même méthode devrait s'appliquer à $r(n,m)$.

Les méthodes utilisées pour étudier $r(n,m)$ et $\rho(n,m)$ se généralisent à $r(n,A)$ et $\rho(n,A)$. Dans [ENS1], il est démontré qu'il existe $\lambda_2 > 0$ tel que si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ vérifie $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq \lambda_2 n$ alors, quand $n \longrightarrow \infty$, on a :

$$(\exp\Big(O\Big(\frac{s}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \leq \frac{r(n,A)}{\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big) p(n) \Big(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\Big)^k} \leq 1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{20}$$

Quant à $\rho(n,A)$, on trouve dans [ES3] le résultat suivant : Pour ε fixé, $0 < \varepsilon < 10^{-2}$, et pour k vérifiant $1 \leq k \leq n^{1/6-\varepsilon}$, on a :

$$\rho(n,A) = (1+o(1)) \frac{q(n)}{\prod_{1 \leq j \leq k} \Big(1 + \exp\Big(-\frac{\pi a j}{2\sqrt{3n}}\Big)\Big)}. \tag{21}$$

2. Estimation de $R(n,a)$ et de $Q(n,a)$

Premier cas : a fixé, $n \longrightarrow \infty$.

On désigne par $\Psi(a)$ la quantité $[a/2] + 1$. Dans [D1], J. Dixmier a démontré qu'il existe une constante $u(a)$ telle que :

$$R(n,a) \sim p(n) \Big(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\Big)^{\Psi(a)} u(a). \tag{22}$$

Les premières valeurs de $u(a)$ sont $u(1) = 1$, $u(2) = 4$, $u(3) = 3$, $u(4) = 16$. Une table de $u(a)$ pour $a \leq 20$ est donnée en appendice de [D1] et montre que $u(a)$ est croissante pour $3 \leq a \leq 20$. Mais nous verrons ci-dessous que cette propriété n'est pas vraie pour tout $a \geq 3$. La table montre aussi que $u(a)$ est un multiple de a pour $a \leq 20$. En fait, $u(a)$ est divisible par le produit des diviseurs de a (cf. [D1], corollaire 4.26). De plus, J. Dixmier démontre dans [D1] que :

$$\text{pour } a \text{ pair,}([a/3]-1)!a^{a/6+3} \leq u(a) \leq 2^{a/2}a!/(a/2-1)! \tag{23}$$

$$\text{pour } a \text{ impair,}([a/3]-1)!a^{a/6+2} \leq u(a) \leq 2^{a/2}a!/(a/2)! \tag{24}$$

La différence de comportement de $u(a)$ entre les valeurs paires et impaires de a est précisée dans [D3] :

Lorsque a est impair tendant vers l'infini, $u(a)$ admet le développement asymptotique

$$u(a) = (1.3.5.\ \dots\ .a)(\alpha_0 + \frac{\alpha_2}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \frac{\alpha_3}{a^3} + \cdots) \tag{25}$$

où les α_i sont des entiers ≥ 0. On a $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 24$.

Rappelons que :

$$1.3.5.\ \dots\ .a = \frac{a^{a/2}}{e^{a/2}}\sqrt{2a}\Big(1 + \frac{1}{6a} + \cdots\Big). \tag{26}$$

Lorsque a est pair et $\geq a_0$, on a :

$$u(a) \leq \frac{a^{a/2}}{e^{a/2}}e^{-0.006a}.$$

La fonction $a \longmapsto u(a)$ oscille donc très rapidement lorsque a est grand. Par ailleurs les relations (23) et (24) entraînent que, pour a assez grand :

$$u(a) \geq \frac{a^{a/2}}{e^{a/2}}e^{-0.2a}.$$

Une étude similaire pourrait être faite pour $Q(n,a)$. Elle n'a, semble-t-il, pas encore été entreprise.

Deuxième cas : $1 \leq a \leq \lambda_0\sqrt{n}$.

Ce cas est étudié dans l'article [ENS1], où l'on montre : il existe $\lambda_0 > 0$, tel que, uniformément pour $1 \leq a \leq \lambda_0\sqrt{n}$, on a, lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$\log\Big(\frac{R(n,a)}{p(n)}\Big) \leq \Psi(a)\log\frac{\pi a}{\sqrt{6n}} + O(1/\sqrt{n}) \tag{27}$$

et

$$\log\Big(\frac{R(n,a)}{p(n)}\Big) \le \Psi(a)\log\frac{\pi a}{\sqrt{6n}} - \gamma_a a + O(a^2/\sqrt{n}) \tag{28}$$

avec $\gamma_a = 1/2$ si a est impair, et si a est pair

$$\gamma_a = \frac{1}{2} + \log 3 - \frac{7}{6}\log 2 + c\frac{\log a}{a} = 0.79\cdots + c\frac{\log a}{a}$$

où c est une constante.

Dans le cas des sommants distincts, la minoration suivante est démontrée dans [ENS1] : il existe $\lambda_1 > 0$, tel que, pour $1 \le a \le \lambda_1\sqrt{n}$ on ait :

$$\log\Big(\frac{Q(n,a)}{q(n)}\Big) \ge -\frac{a}{6}\log\frac{16}{3} + O(1 + a^2/\sqrt{n}). \tag{29}$$

Dans [ENS2], on donne la majoration : pour $a \le \frac{3}{5}\sqrt{n}$, et n assez grand, on a :

$$\log\Big(\frac{Q(n,a)}{q(n)}\Big) \le -a\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi a^2}{8\sqrt{3n}}. \tag{30}$$

Les constantes figurant dans (29) et (30) valent :

$$\frac{1}{6}\log\frac{16}{3} = 0.279\ldots \quad \log\frac{2}{\sqrt{3}} = 0.144\ldots .$$

Troisième cas : $a \ge \lambda_2\sqrt{n}$.

Les résultats suivants figurent dans [ENS2] : Pour $n > n_0$, et $10^{18}\sqrt{n} \le a \le n^{5/7}$, on a :

$$Q(n,a) \le q([n/2])\exp(4.10^5 a^{-1/3} n^{2/3}\log(a^{1/3}n^{-1/6})) \tag{31}$$

et

$$R(n,a) \le p([n/2])\exp(4.10^5 a^{-1/3} n^{2/3}\log(a^{1/3}n^{-1/6})). \tag{32}$$

Pour $n > n_0$ et $n^{5/7} < a \le n/2$, on a :

$$Q(n,a) \le q([n/2])\exp(n^{1/2-1/30}) \tag{33}$$

et

$$R(n,a) \le p([n/2]) \exp(n^{1/2-1/30}). \tag{34}$$

On déduit aisément des formules ci-dessus, que si $a = a(n)$ vérifie $a/\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$ et $a \le n/2$, on a :

$$Q(n,a) = q([n/2])^{1+o(1)} \tag{35}$$

et

$$R(n,a) = p([n/2])^{1+o(1)}. \tag{36}$$

Enfin, le résultat ci-dessous montre que l'influence de la parité de a que nous avons observée s'étend à celle de la divisibilité de a par les petits nombres : Soit $s(a)$ le plus petit entier naturel qui ne divise pas a. Pour n assez grand, $s(a) \ge 40\ 000$ et

$$\frac{7}{100} n^{1/2} s(a)^{3/2} \le a \le \frac{1}{40} n(s(a))^{-1}$$

on a

$$Q(n,a) \le \exp(201 n^{1/2} s(a)^{-1/2} \log(s(a))) \tag{37}$$

et

$$R(n,a) \le \exp(301 n^{1/2} s(a)^{-1/2} \log(s(a))) \tag{38}$$

Comme il est facile d'observer que :

$$Q(n,a) \ge q([(n-a)/s(a)] - 1)$$

et

$$R(n,a) \ge p([(n-a)/s(a)] - 1),$$

les formules (37) et (38) seraient optimales (à la constante près) si l'on enlevait le terme en $\log s(a)$.

La démonstration des formules (31) à (38) utilise des résultats de théorie additive des nombres (cf. [Sa1] et [Sa2]) et particulièrement le théorème suivant : si une partie A de $\{1,2,\ldots,N\}$ contient suffisamment d'éléments, l'ensemble des sous sommes de A contient une progression arithmétique assez longue (cf. [Sa2], théorème 4).

Quatrième cas : $\lambda_3 n \le a \le n/2$.

En utilisant également les théorèmes additifs, J. Dixmier démontre dans [D4] : soit λ_3 fixé, $0 < \lambda_3 \le 1/2$ et r un entier fixé ≥ 1. Soit n tendant vers l'infini, et $a = a_n$ tel que $\lambda_3 n \le a \le n/2$.

On suppose que $s(a) = r+1$. Alors :

(39i) si $a \ge n/(r+1)$, alors $\log R(n,a) \sim \log p(a)$;

(39ii) si $a \le \frac{n}{(r+1)}$ et $r+1 \nmid n-a$, alors $R(n,a) \sim \log p(\frac{n}{r+1})$;

(39iii) si $\frac{n}{r+2} \le a \le \frac{n}{(r+1)}$ et $r+1 | n-a$, alors $\log R(n,a) \sim \log p(a)$;

(39iv) si $a \le \frac{n}{r+2}$ et $r+1 | n-a$, alors $\log R(n,a) \sim \log p(\frac{n-a}{r+1})$.

J. Dixmier considère aussi dans [D4] le cas $n = 2a$. Plus précisément, il donne un développement asymptotique de $R(2n,n)$ suivant les puissances de $n^{-1/2}$. Soit $R''(2n)$ le nombre de partitions de $2n$ qui ne représentent pas n, et ayant une part $> n$. On a :

$$R''(2n) = \sum_{i=0}^{n-1} p(i)$$

et il est possible (cf. [DN1]) d'obtenir, un développement asymptotique :

$$R''(2n) = p(n)\Big(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n} + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_2}{n} + \cdots\Big). \tag{40}$$

Soit $R'(2n) = R(2n,n) - R''(2n)$ le nombre de partitions de $2n$ qui ne représentent pas n, et dont les parts sont $< n$. Lorsque n est pair, J. Dixmier prouve :

$$R'(2n) = p(n)\Big(\frac{\pi}{\sqrt{6n}} + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} + \cdots\Big) \tag{41}$$

et lorsque n est impair :

$$R'(2n) = p(n)\Big(1 + \frac{\pi}{\sqrt{6n}} + \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\alpha_3}{n^{3/2}} + \cdots\Big). \tag{42}$$

Les coefficients α_i sont les mêmes dans (41) et (42). Le "1" supplémentaire dans (42) correspond aux partitions dont toutes les parts sont paires.

Cinquième cas : $a \sim \lambda\sqrt{n}$.

Il est démontré que dans [DN2] que si a est impair et $a \sim \sqrt{n}$, on a :

$$\log R(n,a) \geq 2.0138\sqrt{n}. \tag{43}$$

La même méthode permet de déterminer une fonction φ telle que si a est impair, et $a \sim \lambda\sqrt{n}$, on ait :

$$\log R(n,a) \geq \varphi(\lambda)\sqrt{n}. \tag{44}$$

Il est conjecturé dans [ENS2] que (44) est optimal lorsque a est impair. Lorsque a est pair, la situation semble moins claire.

J. Dixmier démontre dans [D4] que, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta < 1$ tel que, pour n assez grand on a :

$$\varepsilon\sqrt{n} \leq a \leq n - \varepsilon\sqrt{n} \Longrightarrow R(n,a) \leq p(n)^{\delta}. \tag{45}$$

Par la même méthode, un résultat similaire peut être démontré en remplaçant $R(n,a)$ par $Q(n,a)$ et $p(n)$ par $q(n)$.

Remarque : Une table numérique de $R(n,a)$ figure dans [ENS1] et une table de $Q(n,a)$ dans [ENS2].

3. Couples de partitions additivement indépendantes

Nous dirons que deux partitions τ_1 et τ_2 du même entier naturel n sont additivement indépendantes si leurs sous-sommes (excepté 0 et n) sont distinctes, autrement dit s'il n'existe aucun entier naturel a, $1 \leq a \leq n-1$ représenté simultanément par τ_1 et τ_2.

Nous désignerons par $G(n)$ (resp. $H(n)$) le nombre de couples de partitions (resp. partitions sans répétitions) additivement indépendantes. Si l'on choisit pour τ_1 (resp. τ_2) la partition avec un seul sommant égal à n, pour tout choix de τ_2 (resp. τ_1), τ_1 et τ_2 seront additivement indépendantes, ce qui démontre

$$\begin{aligned} G(n) &\geq 2p(n) - 1 \\ H(n) &\geq 2q(n) - 1. \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous permet de calculer $G(7) = 41$.

σ_i	Sous-sommes $\neq 0$ et 7	$\{j\,;\sigma_i$ et σ_j add.ind.$\}$	Nombres de j
$\sigma_1 = 7$	$\emptyset$	$1 \cdots 15$	15
$\sigma_2 = 6+1$	1,6	1,3,5,9	4
$\sigma_3 = 5+2$	2,5	1,2,5,8	4
$\sigma_4 = 5+1+1$	1,2,5,6	1,5	2
$\sigma_5 = 4+3$	3,4	1,2,3,4	4
$\sigma_6 = 4+2+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_7 = 4+1+1+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_8 = 3+3+1$	1,3,4,6	1,3	2
$\sigma_9 = 3+2+2$	2,3,4,5	1,2	2
$\sigma_{10} = 3+2+1+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_{11} = 3+1+1+1+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_{12} = 2+2+2+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_{13} = 2+2+1+1+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_{14} = 2+1+1+1+1+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
$\sigma_{15} = 1+1+1+1+1+1+1$	1,2,3,4,5,6	1	1
		Total =	41

Notons que les partitions $\sigma_6, \sigma_7, \sigma_{10}$ à σ_{15} sont "pratiques", c'est-à-dire représentent tout nombre entre 0 et 7. Dans [ES1], il est démontré que $\widetilde{p}(n)$, le nombre de partitions pratiques de n, vérifie $\widetilde{p}(n) \sim p(n)$, autrement dit, lorsque $n \longrightarrow \infty$, presque toutes les partitions sont pratiques. Dans [DN1], on trouvera un développement asymptotique de $\widetilde{p}(n)/p(n)$.

Dans [ENS3], on donne les estimations suivantes pour $G(n)$ et $H(n)$. Pour tout entier k, il existe des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tels que

$$(46)\quad G(n) = 2p(n)\Big(1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha_2}{n} + \cdots + \frac{\alpha_k}{n^{k/2}} + O\Big(\frac{1}{n^{(k+1)/2}}\Big)\Big)\,.$$

On a :

$$\alpha_1 = \tfrac{\pi}{\sqrt{6}} = 1.28\cdots, \quad \alpha_2 = \tfrac{17}{12}\pi^2 - 1 = 12.98\cdots$$

$$\alpha_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\Big(\tfrac{337}{36}\pi^3 - \tfrac{1019}{48}\pi + \tfrac{3}{2\pi}\Big) = 91.46\cdots$$

$$\alpha_4 = \tfrac{7889}{864}\pi^4 - \tfrac{12115}{288}\pi^2 + \tfrac{509}{24} + \tfrac{3}{4\pi^2} = 495.53\cdots$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_5 = 10450.82 & \alpha_6 = 43427.98 & \alpha_7 = -848498.0 \\ \alpha_8 = 7.67\ 10^7 & \alpha_9 = -1.897\ 10^9 & \alpha_{10} = 4.42\ 10^{10} \\ \alpha_{11} = -7.28\ 10^{11} & \alpha_{12} = 1.23\ 10^{13} & \alpha_{13} = -4.04\ 10^{14} \\ \alpha_{14} = 2.53\ 10^{16} & \alpha_{15} = -1.42\ 10^{18} & \alpha_{16} = 6.51\ 10^{19} \\ \alpha_{17} = -2.53\ 10^{21}. & & \end{array}$$

Les coefficients ci-dessus ont été calculés à l'aide du système de calcul formel MAPLE.

Il existe un nombre réel c tel que

$$H(n) = cq(n)\Big(1 + O\Big(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\Big)\Big). \tag{47}$$

La valeur de c vérifie : $13.83 \leq c \leq 14.29$.

La différence entre (46) et (47) s'explique par la différence de comportement de $r(n,m))$ et de $\rho(n,m)$. Si l'on choisit pour τ_1 la partition $1 + (n-1)$, et pour τ_2 une partition sans 1, τ_1 et τ_2 seront des partitions additivement indépendantes. De tels couples, il y en a $r(n,2)$ ou $\rho(n,2)$. Or, d'après (6),

$$r(n,2) \sim \frac{\pi}{\sqrt{6n}} p(n) = o(p(n))$$

tandis que, d'après (11),

$$\rho(n,2) \sim \frac{1}{2} q(n).$$

Désignons par $\pi(h)$ (resp. $\pi'(h)$) l'ensemble des partitions de h (resp. l'ensemble des partitions en sommants distincts).

Si σ est une partition, on appelle $\mathcal{P}(\sigma)$ l'ensemble des sous sommes non nulles de σ. Le point de départ des formules (46) et (47) est que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$G(n) = 2 \sum_{h=0}^{3000\sqrt{n}\log n} \sum_{\sigma \in \pi(h)} R(n, \mathcal{P}(\sigma)) + O_\varepsilon(p(n)^{1/\sqrt{2}+\varepsilon}) \tag{48}$$

et

$$(49) \qquad H(n) = 2 \sum_{h=0}^{3000\sqrt{n}} \sum_{\sigma\in\pi'(h)} \rho(n, \mathcal{P}(\sigma)) + O_\varepsilon(q(n)^{1/\sqrt{2}+\varepsilon}).$$

La démonstration de (49) est la même que celle de (48). Pour démontrer (48), on commence par minorer $G(n)$: Pour tout $h_0 < n/2$, on a :

$$(50) \qquad G(n) = 2\sum_{h=0}^{h_0} \sum_{\sigma\in\pi(h)} R(n, \mathcal{P}(\sigma)) - E(h_0).$$

Cette formule est assez simple : à $\sigma \in \pi(h)$ on associe $\tau_1 \in \pi(n)$ qui est formée des parts de σ auxquelles on ajoute la part $n-h$. Si τ_2 est une partition quelconque de n dont les sous sommes ne sont pas dans $\mathcal{P}(\sigma)$, alors le couple (τ_1, τ_2) est additivement indépendant, et de même le couple (τ_2, τ_1). Ceci justifie le terme principal dans le membre de droite de (50). $E(h_0)$ compte le nombre des couples (τ_1, τ_2) comptés deux fois dans le procédé ci-dessus, c'est-à-dire pour lesquels il existe h_1 et h_2, $0 \le h_1 \le h_0$, $0 \le h_2 \le h_0$, $\sigma_1 \in \pi(h_1)$ $\sigma_2 \in \pi(h_2)$ tels que

$$\tau_1 = \sigma_1 + (n-h_1); \quad \tau_2 = \sigma_2 + (n-h_2)$$

et $\mathcal{P}(\sigma_1) \cap \mathcal{P}(\sigma_2) = \emptyset$. On a la majoration

$$E(h_0) \le \Big(\sum_{h=0}^{h_0} p(h)\Big)^2 \le ((h_0+1)p(h_0))^2$$

qui, par (8), prouve avec (50) la minoration dans (48).

Pour la majoration, on dit qu'une partition $\tau \in \pi(n)$ a la propriété (51) si

(51) τ a au moins $\sqrt{n}/100$ parts distinctes inférieures à $100\sqrt{n}$.

Par un argument combinatoire assez grossier, on peut montrer que le nombre de partitions de n pour lesquelles (51) n'est pas vrai est $O((p(n))^{1/4})$. Le nombre de couples (τ_1, τ_2) de partitions de n tels que τ_1 et τ_2 ne vérifient pas (51) est $O((p(n))^{1/2})$, et est donc inclus dans le terme d'erreur de (48).

Supposons maintenant que τ_2 soit une partition de n dont tous les sommants sont inférieurs à $n - 3000\sqrt{n}\log n$. Il est assez facile de voir que τ_2 représente un nombre a vérifiant

$$a_1 = 1500\sqrt{n}\log n \leq a < a_2 = n - 1500\sqrt{n}\log n.$$

Le nombre de choix possibles pour τ_1, tel que le couple (τ_1, τ_2) soit additivement indépendant, est donc au plus (car τ_1 ne doit pas représenter a)

$$\sum_{a_1 \leq a \leq a_2} R(n, a) \tag{52}$$

et les formules (32) et (34) permettent de majorer (52) par $O((p(n))^{(1/\sqrt{2}+\varepsilon)}$.

Si, de plus, τ_1 vérifie (51), grâce aux théorèmes de théorie additive des nombres (cf. [Sa1] et [Sa2]) déjà utilisés pour démontrer les formules (31) à (38), on peut montrer que le nombre de partitions τ_2 tels que le couple (τ_1, τ_2) soit additivement indépendant est $O((p(n))^{1/\sqrt{2}+\varepsilon})$.

Il restera à compter les couples additivement indépendants (τ_1, τ_2) avec τ_1 vérifiant (51) et τ_2 ayant un sommant $n-h$, avec $h \leq 3000\sqrt{n}\log n$. Clairement le nombre de ces couples est majoré par

$$\sum_{0 \leq h \leq 3000\sqrt{n}\log n} \sum_{\sigma \in \pi(h)} R(n, \mathcal{P}(\sigma)). \tag{53}$$

Et comme on doit considérer de façon symétrique les couples (τ_1, τ_2) où τ_1 a un grand sommant $n-h$, et τ_2 vérifie (51), il faut multiplier (53) par 2, pour obtenir (48).

Pour démontrer (46) à partir de (48), on observe d'abord (puisque $h \in \mathcal{P}(\sigma)$) que

$$\sum_{\sigma \in \pi(h)} R(n, \mathcal{P}(\sigma)) \leq \sum_{\sigma \in \pi(h)} R(n, h) = p(h)R(n, h).$$

On prouve ensuite

$$\sum_{h=2k}^{3000\sqrt{n}\log n} p(h)R(n, h) = O(p(n)n^{-(k+1)/2})$$

en utilisant les formules (8), (22), (27) et (45).

D'après [D1], on peut écrire

$$\sum_{h=0}^{2k-1} \sum_{\sigma \in \pi(h)} R(n, \mathcal{P}(\sigma)) = \sum_{i=0}^{d} b_i p(n-i)$$

où les nombres d, et b_i peuvent être calculés.

Enfin d'après Hardy et Ramanujan (cf. [DN1]) on a le développement asymptotique d'ordre s quelconque, pour μ fixé

$$\frac{p(n-\mu)}{p(n)} = 1 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i n^{-i/2} + O(n^{-(s+1)/2})$$

avec en particulier :

$$\beta_1 = -\frac{C\mu}{2}, \quad \beta_2 = \mu + \frac{C^2\mu^2}{8}, \quad C = \pi\sqrt{2/3}.$$

Pour démontrer (47) à partir de (49), on observe similairement que

$$\sum_{\sigma \in \pi'(h)} \rho(n, \mathcal{P}(\sigma)) \leq q(h)Q(n,h)$$

et l'on prouve

$$\sum_{5\log n < h \leq 3000\sqrt{n}\log n} q(h)Q(n,h) = O(q(n)\log n/\sqrt{n})$$

en utilisant les formules (12), (30) et (35).

L'évaluation de

$$S_1 = \sum_{0 \leq h \leq 5\log n} \sum_{\sigma \in \pi'(h)} \rho(n, \mathcal{P}(\sigma))$$

est plus délicate. On observe d'abord que comme σ est une partition sans répétition de h, $\mathcal{P}(\sigma)$ est un ensemble contenu dans $\{1, \ldots, h(h+1)/2\}$. Soit P un ensemble d'entiers naturels ≥ 1. On définit $\mathcal{W}(h, P)$ comme l'ensemble des parties $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \ldots, h\}$ telles que les sous sommes de $\mathcal{A}$ ne rencontrent pas P. Si $S(\mathcal{A})$ est la somme des éléments de $\mathcal{A}$, on a alors

$$\rho(n, P) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{W}(h,P), S(\mathcal{A}) \leq n} \rho(n - S(\mathcal{A}), h+1). \tag{54}$$

Comme $S(\mathcal{A}) \leq \frac{h(h+1)}{2} = O(\log^2 n)$, la formule (13) nous donne

$$\rho(n - S(\mathcal{A}), h+1) = \frac{1}{2^h} q(n)\Big(1 + O\Big(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \tag{55}$$

et, par (54) et (55), S_1 devient :

$$S_1 = q(n)\Big(\sum_{0 \leq h \leq 5 \log n} z(h) 2^{-h}\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \tag{56}$$

avec

$$z(h) = \sum_{\sigma \in \pi'(h)} \mathrm{Card}(\mathcal{W}(h, \mathcal{P}(\sigma))). \tag{57}$$

On démontre ensuite que

$$z(h) \leq q(h) 3^{h/2} \tag{58}$$

et l'on pose

$$c/2 = \sum_{h=0}^{\infty} z(h) 2^{-h}.$$

Par (12) et (58), la série ci-dessus est convergente, et le reste vérifie

$$\sum_{h > 5 \log n} z(h) 2^{-h} = O\Big(\sum_{h > 5 \log n} \exp(-h/10)\Big) = O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

La formule (56) donne alors

$$S_1 = \frac{c}{2} q(n)\Big(1 + O\Big(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

ce qui achève la preuve de (47).

Le calcul numérique de c a été fait par M. Deléglise. Le calcul de $z(h)$ par (57) est très lent et a été effectué pour $h \leq 40$ en plusieurs jours d'ordinateurs SUN 3/80. On obtient

$$z(40) 2^{-40} = 0.842 \; 10^{-3}$$

tandis que la majoration (58) donne :

$$z(40) 2^{-40} \leq q(40)(\sqrt{3}/2)^{40} = 3.53.$$

Il a donc fallu améliorer la majoration théorique ci-dessus pour obtenir la valeur de c avec une précision pas trop mauvaise. On trouvera dans [ENS3] les calculs détaillés de cette majoration, ainsi que des tables numériques des diverses fonctions utilisées.

BIBLIOGRAPHIE

[D1] J. DIXMIER. — *Sur les sous-sommes d'une partition*, Mémoire de la SMF, n° 35, supplément au Bull. SMF 116, 1988.

[D2] J. DIXMIER. — Sur les sous-sommes d'une partition II, *Portugaliae Mathematica* **46**, (1989), 137-154.

[D3] J. DIXMIER. — Sur les sous-sommes d'une partition III, *Bull. Sci. Math.* **113**, (1989), 125-149.

[D4] J. DIXMIER. — *Partitions avec sous-sommes interdites*, preprint IHES, oct. 89, soumis à Bull. Soc. Math. Belgique.

[D5] J. DIXMIER. — Proof of a conjecture by Erdös and Graham concerning the problem of Frobenius, *J. Number Theory* **34**, (1990), 198-209.

[DEN] J. DIXMIER, P. ERDÖS, et J.-L. NICOLAS. — Sur le nombre d'invariants fondamentaux des forme binaires, *C.R. Acad. Sci. Paris* **305, Série I**, (1987), 319-322.

[DN1] J. DIXMIER et J.-L. NICOLAS. — Partitions without small parts, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, *Number Theory, Budapest (Hungary)* **51**, (1987), 9-33.

[DN2] J. DIXMIER et J.-L. NICOLAS. — *Partitions sans petits sommants, à paraître dans A tribute to Paul Erdös*, édité par A. Baker, B. Bollobas, A. Hajnal, Cambridge University Press, 1990.

[ENS1] P. ERDÖS, J.-L. NICOLAS et A. SÁRKÖZY. — On the number of partitions of n without a given subsum (I), *Discrete Mathematics* **75**, (1989), 155-166.

[ENS2] P. ERDÖS, J.-L. NICOLAS et A. SÁRKÖZY. — On the number of partitions of n without a given subsum (II), *Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in Honor of Paul T. Bateman, Progress in Mathematics, Birkhäuser* **85**, (1990), 205-234.

[ENS3] P. Erdös, J.-L. Nicolas et A. Sárközy. — *On the number of pairs of partitions of n without common subsums*, à paraître.

[ENSz] P. Erdös, J.-L. Nicolas et M. Szalay. — Partitions into parts which are unequal and large, *Number Theory, Ulm 87 édité par H.P. Schickewei et E. Wirsing, Springer Verlag Lecture Note* **1380**, (1987), 19-30.

[ES1] P. Erdös et M. Szalay. — On some problems of J. Dénes and P. Turán, *Studies in pure Math. to the memory of P. Turán, Editor P. Erdös, Budapest* , (1983), 187-212.

[ES2] P. Erdös et M. Szalay. — On the statistical theory of partitions, *Coll. Math. Soc. János Bolyai, Topics in classical number theory, Budapest* **34**, (1981), 397-450.

[ES3] P. Erdös et M. Szalay. — On some problems of the statistical theory of partitions, *Coll. Math. Soc. János Bolyai, Number theory, Budapest (Hungary)* **51**, (1987), 93-110.

[FP] G. Freiman et J. Ptiman. — *Partitions into distinct large parts*, preprint.

[G] H. Gupta. — A formula in partitions, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **6**, (1942), 115-117.

[GGM] H. Gupta, C.E. Gwyther et J.C.P. Miller. — *Table of partitions*, Cambridge University Press, 1962.

[H1] J. Herzog. — *Gleichmässige asymptotische für parameterabhängige Partionenfunktionen, Thesis*, Université J.W. Goethe, Frankfurt am Main, 1987.

[H2] J. Herzog. — *On partitions into distinct parts* $\geq Y$, préprint.

[HR] G.H. Hardy et S. Ramanujan. — Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2), 17, 1918, 75-115. (Aussi dans Collected Papers de S. Ramanujan, Cambridge University Press 1927, 276-309, réimprimé par Chelsea, 1962.

[Sa1] A. Sárközy. — Finite addition theorems, *J. Number Theory* **32**, (1989), 114-130.

[Sa2] A. Sárközy. — Finite additions theorem II, à paraître, *J. Number Theory*.

[Sz1] G. SZEKERES. — An asymptotic formulae in the theory of partitions, *Quart. J. Math. Oxford* **2**, (1951), 85-108.

[Sz2] G. SZEKERES. — Some asymptotic formulae in the theory of partitions II, *Quart. J. Math. Oxford* 4, (1953), 96-111.

Jean-Louis NICOLAS
Mathématiques, Bât. 101
Université Claude Bernard, Lyon 1
F-69622 VILLEURBANNE CEDEX