

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-LOUIS NICOLAS

## Grandes valeurs des fonctions arithmétiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 16, n° 2 (1974-1975),  
exp. n° G20, p. G 1-G 5.

<[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1974-1975\\_\\_16\\_2\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A16_0)>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

GRANDES VALEURS DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Louis NICOLAS

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction arithmétique à valeur réelle. On dit que  $f$  est multiplicative si, pour  $m$  et  $n$  premiers entre eux, on a

$$f(mn) = f(m) f(n).$$

En particulier,  $f$  est déterminée si l'on connaît  $f(p^k)$  pour tout  $p$  premier et tout  $k$  entier.

THEOREME 1. - Soit  $f$  multiplicative. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \iff \lim_{\substack{k \\ p \rightarrow \infty}} f(p^k) = 0.$$

Ce théorème et sa démonstration se trouvent dans HARDY and WRIGHT ([2], ch. XVIII).

COROLLAIRE. - Soit  $d(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$ ;  $d(n)$  est une fonction multiplicative, et  $d(p^k) = k + 1$ . On a, pour  $\delta > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{n^\delta} = 0.$$

Démonstration. - On remarque que  $d(n)/n^\delta$  est une fonction multiplicative et on applique le théorème 1.

THEOREME 2. - On a

$$\lim \frac{\log d(n) \log \log n}{\log n} = \log 2.$$

Démonstration. - On fixe  $\delta$ . La fonction  $d(n)/n^\delta$  est bornée.

Pour  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$ , on a

$$\frac{d(n)}{n^\delta} = \prod_{i=1}^r \frac{\frac{k_i + 1}{k_i \delta}}{p_i}.$$

On constate que  $(k_i + 1)/p_i^{k_i \delta} \leq 1$  dès que  $p_i \geq 2^{1/\delta}$  et que

$$\frac{k_i + 1}{p_i^{k_i \delta}} \leq 1 + \frac{1}{\delta \log 2} \text{ pour tout } p_i \text{ et } k_i.$$

On en déduit la majoration, valable pour  $n$  entier et  $\delta$  réel  $> 0$ :

$$\frac{d(n)}{n^\delta} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta \log 2}\right)^{2^{1/\delta}}.$$

En faisant  $\delta = ((1 + (1/2)\varepsilon) \log 2) / \log \log n$  on obtient :

$$\log d(n) \leq \frac{(1 + \varepsilon) \log 2 \log n}{\log \log n}.$$

Dans l'autre sens, on considère le nombre :

$$n = p_1 \cdots p_j,$$

produit de  $j$  nombres premiers distincts (on suppose  $p_1 < \dots < p_j$ ). On a

$$d(n) = 2^j \text{ et } \log n < j \log p_j,$$

d'où :

$$\log d(n) = j \log 2 > \frac{\log n}{\log p_j} \log 2.$$

Si les nombres  $p_1, \dots, p_j$  sont les  $j$  premiers nombres premiers, on a  $\log n = \theta(p_j)$  en désignant par  $\theta$  la fonction de Čebyšev (cf. [2], ch. XXII) :

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

et l'on sait que  $\theta(x) \sim x$ , d'où il vient :

$$\log d(n) \geq (1 - \varepsilon) \frac{\log n \log 2}{\log \log n}.$$

ce qui achève la démonstration.

Nombres hautement composés. — S. RAMANUJAN ([4]) donne la définition suivante :  $n$  est hautement composé (h. c.) si

$$(m < n) \Rightarrow (d(m) < d(n)).$$

Il semble assez raisonnable de considérer ces nombres pour étudier les "grandes" valeurs de la fonction  $d(n)$ . Malheureusement ils sont difficiles à déterminer (cf. [4] et [3]).

Nombres hautement composés supérieurs. — S. RAMANUJAN ([4], §32) définit aussi les nombres hautement composés supérieurs (h. c. s.) : Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $n \mapsto d(n)/n^\varepsilon$  est bornée, et atteint son maximum en au moins un point :  $N_\varepsilon$ . On dit qu'un nombre  $N$  est h. c. s., s'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que  $d(n)/n^\varepsilon$  soit maximale pour  $n = N$ . On a donc, pour tout  $n$ ,

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d(N)}{N^\varepsilon}.$$

Tout nombre h. c. s. est hautement composé : Soit  $m < N$ . On a :

$$\left( \frac{d(m)}{m^\varepsilon} \leq \frac{d(N)}{N^\varepsilon} \right) \Rightarrow (d(m) \leq \left(\frac{m}{N}\right)^\varepsilon d(N) < d(N)).$$

Les nombres h. c. s. sont faciles à déterminer grâce au lemme suivant :

LEMME 1. — Soit  $f$  une fonction multiplicative vérifiant  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ . Alors,  $f$  est bornée, et atteint son maximum aux points :

$$N = \prod_p p^{\alpha_p}.$$

L'exposant  $\alpha_p$  est tel que la fonction  $\beta \mapsto f(p^\beta)$  soit maximale en  $\beta = \alpha_p$ .

Démonstration. — Pour  $p$  assez grand, comme  $\lim_{(p^\beta) \rightarrow \infty} f(p^\beta) = 0$ , on a  $\alpha_p = 0$ , et le produit définissant  $N$  est un produit fini. Ensuite, soit  $n = \prod_p p^{\beta_p}$ , on a

$$f(n) = \prod_{p|n} f(p^{\beta_p}) \leq \prod_{p|n} f(p^{\alpha_p}) \leq f(N).$$

On constate que  $\log f$  (qui est une fonction additive) se traite comme une

fonction aux variables séparées.

En appliquant le lemme 1 à la fonction  $d(n)/n^\epsilon$ , on trouve :

$$\alpha_p = \left[ \frac{1}{p^\epsilon - 1} \right]$$

en désignant par  $[u]$  la partie entière de  $u$ .

Il est commode de poser  $x = 2^{1/\epsilon}$ ; soit

$$\epsilon = \frac{\log 2}{\log x} \text{ et } x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2}.$$

On a alors :

$$(x_{k+1} < p \leq x_k) \iff (\alpha_p = k)$$

et l'on a, pour  $N = \prod p^{\alpha_p}$ :

$$(1) \quad \begin{cases} \log N = \theta(x) + \theta(x_2) + \dots + \theta(x_k) + \dots \\ d(N) = 2^{\pi(x)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi(x_2)} \dots \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\pi(x_k)} + \dots \end{cases}$$

où  $\theta$  est la fonction de Čebyšev, et  $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ . On sait que (cf. [1])  
 $\theta(x) = x + O(x \exp(-c \sqrt{\log x}))$

et que :

$$\pi(x) = li x + O(x \exp(-c \sqrt{\log x})) \text{ avec } li x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Pour  $k > \log x / (\log 2)^2$ , on a  $x_k < 2$ . Les formules (1) donnent :

$$\log d(N) = \pi(x) \log 2 + O(x^{(\log 3/2)/\log 2})$$

$$= (li x)(\log 2) + O(x \exp(-c \sqrt{\log x}))$$

$$\log d(N) = (\log 2)(li(\log N)) + O(\log N \exp(-c \sqrt{\log \log N})).$$

Soit maintenant  $n$  quelconque. Il existe  $N$  hautement composé supérieur, tel que

$$\frac{N}{2 \log N} \leq n \leq N.$$

Comme  $N$  est h. c., on a  $d(n) < d(N)$  et l'on a

$$\log d(n) \leq \log 2(li(\log n)) + O(\log n \exp(-c \sqrt{\log \log n})).$$

On voit ainsi que l'ordre maximum de  $d(n)$  est atteint pour les nombres hautement composés supérieurs. Remarquons également que les nombres hautement composés supérieurs correspondent aux abscisses des sommets de l'enveloppe convexe du graphe de  $\log d(n)$  en fonction de  $\log n$ .

Fonction  $r(n)$ . - Soit  $r(n)$  la fonction multiplicative qui vaut :

$$r(p^k) = d(p^k) = k + 1 \text{ si } p \equiv 1 \pmod{4},$$

$$r(p^k) = 0 \text{ si } k \text{ impair, } 1 \text{ si } k \text{ pair pour } p \equiv 3 \pmod{4},$$

$$r(2^k) = 1.$$

Le nombre de décomposition de l'entier  $n$  en somme de deux carrés vaut  $4r(n)$

(cf. [2], ch. XVI).

On peut définir de la même façon que pour la fonction  $d$  les nombres r-hautement composés supérieurs. Seuls comptent les nombres premiers  $\equiv 1 \pmod{4}$ . Et les formules (1) deviennent

$$\begin{cases} \log N = \theta_1(x) + \theta_1(x_2) + \dots + \theta_1(x_k) + \dots \\ r(N) = 2^{\pi_1(x)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi_1(x_2)} + \dots + \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\pi_1(x_k)} + \dots \end{cases}$$

avec

$$\theta_1(x) = \sum_{p \leq x, p \equiv 1 \pmod{4}} \log p \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \sum_{p \leq x, p \equiv 1 \pmod{4}} 1.$$

Des relations (cf. [1], p. 72) :

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x})) \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \frac{1}{2} \operatorname{li} x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$$

on déduit :

$$\log r(N) = \frac{\log 2}{2} \operatorname{li}(2 \log N) + O(\log N \exp(-c\sqrt{\log \log N})).$$

On peut donner un développement limité de  $\operatorname{li}(x)$  :

$$\operatorname{li} x = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \dots + \frac{(n-1)! x}{\log^n x} + O\left(\frac{x}{\log^{n+1}(x)}\right).$$

Ce qui nous donne pour l'ordre maximum de  $d(n)$  :

$$\frac{\log 2 \log n}{\log \log n} + \frac{\log 2 \log n}{(\log \log n)^2} + O\left(\frac{\log n}{(\log \log n)^3}\right),$$

et pour  $r(n)$  :

$$\frac{\log 2 \log n}{\log \log n} + \frac{\log 2(1 - \log 2)\log n}{(\log \log n)^2} + O\left(\frac{\log n}{(\log \log n)^3}\right).$$

Signalons enfin que S. RAMANUJAN a calculé ([4], §40) avec l'hypothèse de Riemann l'ordre maximum de  $d(n)$  : On a alors :

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^{(1/2)+\epsilon}) \quad \text{et} \quad \theta(x) = x + O(x^{(1/2)+\epsilon}),$$

et on écrit les formules (1) en tenant compte du 2e terme :

$$\begin{cases} \log N = \theta(x) + \theta(x_2) + O(x^{(1/2)+\epsilon}) \\ \log d(N) = \pi(x) \log 2 + \pi(x_2) \log 3/2 + O(x^{(1/2)+\epsilon}) \end{cases}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLANCHARD (A.). - Initiation à la théorie analytique des nombres premiers. - Paris, Dunod, 1969.
- [2] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3rd edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1954.
- [3] NICOLAS (J. L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Canad. J. Math., t. 23, 1971, p. 116-130.

- [4] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 347-400 ; and "Collected papers", p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.

(Texte reçu le 16 juin 1975)

Jean-Louis NICOLAS  
Département de mathématiques  
UER des Sciences de Limoges  
123 rue Albert Thomas  
87100 LIMOGES

---