

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.

## THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-LOUIS NICOLAS

### Répartition des nombres premiers

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 9, n° 2 (1967-1968),  
exp. n° G6, p. G 1-G 4.

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1967-1968\\_\\_9\\_2\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A12_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS

par Jean-Louis NICOLAS

### 1. Théorème des nombres premiers.

Rappel de définition.

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 ; \quad \theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p ; \quad \psi(x) = \sum_{\substack{(m,p) \\ p^m \leq x}} \log p$$

où  $p$  décrit l'ensemble des nombres premiers, et  $m$  est entier  $\geq 1$ . On remarque que  $\exp(\theta(x))$  est le produit de tous les nombres premiers au plus égaux à  $x$ , et que  $\exp(\psi(x))$  est le plus petit commun multiple des nombres entiers au plus égaux à  $x$ . De plus, on a :

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \dots + \theta(x^{1/m}) = \sum_{p \leq x} \left[ \frac{\log x}{\log p} \right] \log p$$

avec  $m = \left[ \frac{\log x}{\log 2} \right]$  en désignant par  $[u]$  la partie entière de  $u$ .

THEOREME 1. - Quand  $x \rightarrow \infty$ , on a :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= x + O(xe^{-c/\log x}) \\ \psi(x) &= x + O(xe^{-c/\log x}) \\ \pi(x) &= li x + O(xe^{-c/\log x}) \end{aligned}$$

où  $li x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ .

### 2. Différence entre deux nombres premiers consécutifs.

On désigne par  $p_n$  le  $n$ -ième nombre premier, et on pose  $d_n = p_n - p_{n-1}$ . Comme  $\pi(p_n) = n$ , on a

$$p_n \sim n \log n$$

et

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i = \frac{1}{N} p_N \sim \log N \sim \log p_N .$$

THEOREME 2 (RANKIN [4]). - Pour tout  $\epsilon > 0$  , il existe une infinité de  $n$  qui vérifient :

$$p_{n+1} - p_n \geq (e^\gamma - \epsilon) \log p_n \frac{\log_2 p_n \log_4 p_n}{\log_3^2 p_n}$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler ( $e^\gamma = 1,78$ ) .

THEOREME 3. - Il existe un nombre  $\tau < 1$  tel que, pour tout  $n$  , on ait :

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n^\tau .$$

On peut prendre  $\tau = \frac{5}{8}$  , et même un peu moins ; l'hypothèse de Riemann permet de prendre  $\tau = \frac{1}{2} + \epsilon$  pour tout  $\epsilon$  .

Remarque. - On voit que les théorèmes 2 et 3 sont très éloignés l'un de l'autre. Une conjecture de Cramer est que

$$\overline{\lim} \frac{d_n}{\log^2 p_n} = A .$$

THEOREME 4 (BOMBIERI-DAVENPORT [1]). - Il existe une infinité de  $n$  pour lesquels on a :

$$p_{n+1} - p_n < \frac{1}{2} \log p_n .$$

Remarque. - On a toujours  $p_{n+1} - p_n \geq 2$  . La conjecture dite des nombres premiers jumeaux est que l'équation  $p_{n+1} - p_n = 2$  a une infinité de solutions en  $n$  .

### 3. Remarque sur la démonstration des théorèmes 2, 3, 4.

Les démonstrations se trouvent dans PRACHAR [3] (chap. V, § 5, et chap. IX, § 3), où l'on trouvera également d'autres renseignements.

A propos des théorèmes 2 et 4, remarquons qu'il est très facile d'établir (car  $\log p_n$  est la valeur moyenne de  $d_n$  ) :

$$\overline{\lim} \frac{d_n}{\log p_n} \leq 1 \leq \overline{\lim} \frac{d_n}{\log p_n} .$$

Supposons par exemple que  $\overline{\lim} \frac{d_n}{\log p_n} = a > 1$  . Cela veut dire que, pour  $p_n > p_{n_0}$  , on a  $d_n > a' \log p_n$  avec  $a > a' > 1$  . On aurait alors pour  $n > n_0$  ,

$$p_n = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^{n_0} d_i + \sum_{i=n_0+1}^n d_i \geq p_{n_0} + (n - n_0)a' \log p_n.$$

Comme  $a' > 1$ , on arrive à une contradiction lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Pour démontrer le théorème 2, on cherche des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de telle façon que si  $z$  vérifie les congruences :

$$z \equiv a_i \pmod{p_i} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k$$

alors les nombres  $z + 2, z + 3, \dots, z + u$ , sont divisibles par l'un des nombres  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , avec  $u$  le plus grand possible. Il n'y a donc pas de nombres premiers entre  $z + 2$  et  $z + u$ .

Le théorème 3 découle du résultat plus général suivant :

**THEORÈME 3'.** - Soit  $\tau \geq \frac{5}{8}$ , alors  $\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x^\tau}{\log x}$ .

Le théorème 3' se démontre par des méthodes analytiques en étudiant la fonction  $\zeta$  de Riemann.

Le théorème 4 se démontre en utilisant la méthode du crible. A l'aide du résultat suivant ([3], Satz 4.4, chap. 2) :

$$\text{card}\{i \mid p_i \leq x; d_i = n\} \leq C \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

on peut démontrer qu'il n'y a pas "trop" de  $d_i$  compris entre  $a \log p_i$  et  $A \log p_i$  avec  $a < 1 < A$ . Si on avait  $d_i > A \log p_i$  constamment, il y aurait donc beaucoup de  $d_i$  supérieur à  $A \log p_i$ , ce qui ne peut pas avoir lieu.

#### 4. Quelques problèmes irrésolus.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\min(d_n, d_{n+1}, \dots, d_{n+k})}{\log p_n} = +\infty \quad \text{pour tout } k > 2$$

(conjecture de P. ERDÖS, qui a démontré le résultat pour  $k = 2$ ).

De même :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max(d_n, d_{n+1})}{\log p_n} < 1$$

(conjecture de P. ERDÖS).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOMBIERI (E.) and DAVENPORT (H.). - Small differences between prime numbers, Proc. Royal Soc. London, Series A, t. 293, 1966, p. 1-18.
  - [2] INGHAM (A. E.). - The distribution of prime numbers. - Cambridge, at the University Press, 1932 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 30).
  - [3] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).
  - [4] RANKIN (R. A.). - The difference between consecutive prime numbers, V, Proc. Edinburgh math. Soc., t. 13, 1963, p. 331-332.
-