

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS

## Problèmes extrémaux et combinatoires en théorie des nombres

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1975-1976),  
exp. n° G7, p. G 1-G 5.

<[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_2\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A13_0)>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1er décembre 1976

PROBLÈMES EXTREMES AUX ET COMBINATOIRES  
EN THÉORIE DES NOMBRES

par Paul ERDÖS

(rédigé par Jean-Louis NICOLAS)

1. - Il est connu que la densité asymptotique des entiers ayant deux diviseurs  $d_1$  et  $d_2$  vérifiant  $d_1 < d_2 < 2d_1$  existe (cf. [4], et le livre de HALBERSTAM et ROTH [10], p. 262, théorème 14). Soit

$$F(n) = \max_{t/2 < d \leq t, d|n} 1 .$$

L'énoncé précédent revient à dire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \sum_{F(n) > 1, n \leq x} 1 \right) = c .$$

P. ERDÖS a conjecturé que  $c = 1$ , c'est-à-dire que presque tous les entiers ont deux diviseurs  $d_1$  et  $d_2$  tels que  $d_1 < d_2 < 2d_1$ .

On peut conjecturer aussi que, pour  $k$  fixé, presque tous les entiers vérifient  $F(n) > k$ . Soit

$$d^+(n) = \sum_{k; 2^k < d \leq 2^{k+1}, d|n} 1 \quad \text{et} \quad d(n) = \sum_{d|n} 1 .$$

On conjecture que, pour presque tout  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^+(n)}{d(n)} = 0$ .

2. - Pour chaque entier  $n$ , appelons  $t_n$  le plus petit entier vérifiant  $(t_m + 1)t_n \equiv 0 \pmod m$ .

Ainsi, si  $n$  est premier,  $t_n = n - 1$ ; si  $n = x(x + 1)$ ,  $t_n = x$ .

P. ERDÖS et R. R. HALL ont montré que (non encore publié)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x \frac{t_n}{n} = 0 ;$$

ce qui était une conjecture d'ERDÖS.

3. - Rappelons la définition suivante, liée au théorème de Van der Waerden (cf. [5] ou [13] pour un historique plus détaillé).

Définition. - On désigne par  $r_k(n)$  le nombre maximum de termes d'une suite finie  $(a_i)_{1 \leq i \leq l}$  vérifiant  $1 \leq a_1 < a_2 \dots < a_l \leq n$ , et ne contenant pas une progression arithmétique de  $k$  termes.

E. SZEMEREDI a marqué une étape importante dans cette étude en démontrant que, pour tout  $k$  fixé (cf. [13]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_k(n)/n = 0 .$$

CONJECTURE (primée 15 000 francs). - Soit une suite  $(a_i)$  d'entiers positifs vérifiant  $\sum \frac{1}{a_i} = +\infty$ . Alors, pour tout  $k$ , on peut trouver  $k$  éléments de cette suite en progression arithmétique.

Cette conjecture permettrait de démontrer qu'il existe des progressions arithmétiques arbitrairement longues formées uniquement de nombres premiers.

Dans l'autre sens, on peut définir :

$$A_k = \sup \sum \frac{1}{a_i}$$

le "sup" étant pris sur l'ensemble des suites  $(a_i)$  ne contenant pas de progression arithmétique de  $k$  termes.

A l'aide du résultat de BERLEKAMP [2] qui montre qu'on peut partager les entiers  $n$ ,  $1 \leq n \leq k2^k$ , en deux classes ne contenant aucune progression arithmétique de  $k$  termes, on peut montrer que

$$A_k \geq (1 + o(1)) k \frac{\log 2}{2} .$$

Très récemment, J. GERVER a observé, dans un article à paraître dans les Proc. Amer. math. Soc., que, pour  $p$  premier, l'ensemble

$$S_p = \mathbb{N}^* - \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{n ; jp^i - p^{i-1} + 1 \leq n \leq jp^i\}$$

ne contenait aucune progression arithmétique de  $p$  termes, et que l'on a

$$\sum_{n \in S_p} \frac{1}{n} > p \log p - \frac{2}{p-1} ,$$

ce qui assure, pour  $k$  assez grand,  $A_k \geq (1 - \varepsilon) k \log k$ .

4. - Suites primitives : soit  $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ . Trouver la plus grande valeur de  $k$  tel que chaque  $a_i$  ne divise pas le produit des autres. La réponse est

$$k = \pi(n) = \text{nombre de nombres premiers} \leq n .$$

En effet, si  $a_i \nmid \prod_{j \neq i} a_j$ , il existe un nombre premier  $p_i$  divisant  $a_i$  avec un exposant maximum :

$$\forall j \neq i, v_{p_i}(a_i) > v_{p_i}(a_j) .$$

Ceci implique qu'il ne peut y avoir plus de  $a_i$  que de nombres premiers  $\leq n$ .

On appelle suite primitive (cf. [10], p. 244) une suite  $a_i$  telle que, pour tout  $i \neq j$ ,  $a_i \nmid a_j$ . Le plus grand nombre possible de termes d'une suite primitive inférieurs à  $2n$  est  $n$ , réalisé avec  $n+1, \dots, 2n$ . Si, en effet, on avait plus de  $(n+1)$  termes  $a_i \leq 2n$ , en écrivant  $a_i = 2^i b_i$ ,  $b_i$  impair, il y aurait  $(n+1)$  valeurs possibles de  $b_i$  et les  $b_i$  sont tous  $\leq n$ .

On montre que pour toute suite primitive, la série  $\sum 1/(a_i \log a_i)$  est

convergente (cf. [7], et [10], th. 2, p. 245).

Soit maintenant

$$f(n) = \max \sum_{a_i \leq n} \frac{1}{a_i},$$

le maximum étant pris pour toutes les suites primitives. On a

$$f(n) = (1 + o(1)) \frac{\log n}{\sqrt{2\pi \log \log n}}.$$

Mais probablement, il n'existe pas de solution simple qui réalise le maximum. On consultera sur ce sujet l'article de synthèse [8].

On peut transposer le problème à une suite de nombres réels  $a_i$ . La condition  $a_i/a_j$  se traduit par

$$|ka_i - a_j| \geq 1 \text{ pour tout } i, j, k \text{ entiers.}$$

A-t-on, pour une telle suite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\log x} \sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i} \right) = 0 ?$$

HAIGHT [London] a démontré que si les  $a_i$  sont rationnellement indépendants, et  $a_1 < a_2 < \dots$ , alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/k = \infty.$$

Le cas vraiment difficile semble être le cas où les  $a_i$  sont rationnels.

5. - Soit  $\tilde{(n+1)}$  nombres entiers vérifiant :

$$2 \leq a_1 < \dots < a_{n+1} \leq 2n.$$

Il y en deux qui sont relativement premiers. En effet, il y en a deux qui sont consécutifs. Cette réponse fut donnée par PÓSA à l'âge de 12 ans.

CONJECTURE. - Soit  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$  une suite d'entiers telle qu'on ne peut pas trouver  $r$  nombres  $a_i$  qui soient deux à deux relativement premiers. On obtient la plus grande valeur de  $k$  en considérant tous les nombres qui ont au moins un facteur premier  $\leq p_{r-1}$ , où  $2, 3, \dots, p_{r-1}$  sont les  $(r-1)$  premiers nombres premiers.

6. - Soit  $S$  un ensemble fini à  $n$  éléments. Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq t}$  une famille de parties de  $S$  telle que  $A_i \subset A_j$  ne soit jamais vérifié pour  $i \neq j$ . Le théorème de Sperner dit que le nombre  $t$  d'éléments d'une telle famille vérifie

$$t \leq \binom{n}{[n/2]} \quad (\text{cf : [8], t. 2, p. 114}).$$

Soit maintenant une famille de parties de  $S$  :  $(A_i)_{1 \leq i \leq t}$ , vérifiant  $A_{i_1} \cup A_{i_2} \neq A_{i_3}$  lorsque  $i_1, i_2$  et  $i_3$  sont distincts.

D. KLEITMAN [12] a démontré que l'on avait

$$t \leq 2\sqrt{2} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

P. ERDOS a conjecturé que le coefficient  $2\sqrt{2}$  pouvait être remplacé par  $1 + o(1)$ , et KLEITMAN l'a récemment démontré.

7. - BAUMGARTNER et HINDMAN ont démontré (cf. [11] et [1]) le résultat suivant : si l'on partage l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers en  $k$  classes, il existe une suite infinie  $a_1, \dots, a_n$  appartenant à l'une des classes telle que toutes les sommes  $\sum_i \epsilon_i a_i$ ,  $\epsilon_i = 0$  ou  $1$  soient dans la même classe.

Mais on ne sait pas si, lorsqu'on divise  $\mathbb{N}$  en deux classes, il y a une suite infinie  $(a_n)$  telle que  $a_i + a_j$  et  $a_i a_j$  ( $1 \leq i < j$ ) soient tous dans la même classe.

Autre question : On divise les entiers en deux classes. Est-il vrai que, pour tout  $t$ , il y a des entiers  $a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 a_2$  tous dans la même classe et plus grand que  $t$  ?

GRAHAM a démontré que l'on peut partager les entiers  $\leq 251$  en deux classes de façon qu'aucune classe ne contienne les 4 nombres :  $a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 a_2$ . Si l'on partage les entiers  $\leq 252$ , l'une des classes contient toujours 4 nombres  $a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 a_2$ . Malheureusement, il ne peut pas exclure la possibilité que  $a_1 = 1$ .

8. - Soit  $n$  nombres :  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Montrer que, pour  $\epsilon > 0$  et  $n$  assez grand, l'ensemble des nombres de la forme  $a_i + a_j$  et  $a_i a_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , a un cardinal  $\geq n^{2-\epsilon}$  (cette conjecture est primée 1 000 francs).

E.SZEMEREDI et P. ERDOS savent montrer que ce cardinal est toujours plus grand que  $nf(n)$  pour une fonction  $f$  vérifiant  $\lim f(n) = +\infty$ . A l'aide des méthodes de théorie additive exposée dans le livre de FREIMAN [9], on peut montrer que le  $n^{2-\epsilon}$  ne peut pas être remplacé par  $n^2/\exp(\log n)^\alpha$ .

Peut-être a-t-on le même résultat plus fort : Soit un graphe de sommet  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Si  $(a_i, a_j)$  sont reliés par une arête, on considère les deux nombres  $a_i + a_j$  et  $a_i a_j$ . Si le graphe a  $k$  arêtes, on trouve plus que  $k^{2-\epsilon}$  nombres distincts.

9. - Problème de Sidon (cf. [10], chap. II, et [6] p. 227) : Soit une suite infinie  $a_1, \dots, a_n$  telle que les sommes  $a_i + a_j$  soient toutes distinctes. On peut construire une telle suite par récurrence vérifiant  $a_k < ck^3$  (CHOWLA a fait les calculs jusqu'à 25 000). Peut-on, pour \$100, en construire une telle que  $\lim a_k/k^3 = 0$  ?

Est-il vrai que, si  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  est une suite infinie d'entiers tels que le nombre de solutions de  $n = a_i + a_j$  est inférieur à  $C$ , alors la suite

peut être partitionnée en  $f(C)$  morceaux  $\{a_i^{(r)}\}$ ,  $1 \leq r \leq f(C)$ , telle que les sommes  $a_i^{(r)} + a_j^{(r)}$  soient toutes distinctes ?

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUMGARTNER (J. E.). - A short proof of Hindman's theorem, J. of combinatorial Theory, Series A, t. 17, 1974, p. 384-386.
- [2] BERLEKAMP (E. R.). - A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 32, 1946, p. 331-332.
- [3] COMTET (L.). - Analyse combinatoire. - Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 4 et 5).
- [4] ERDŐS (P.). - On the density of some sequences of integers, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 685-692.
- [5] ERDŐS (P.). - Résultats et problèmes en théorie des nombres, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 24, 7 p.
- [6] ERDŐS (P.). - Some unsolved problems, Magyar Tudományos Akad., Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sc., t. 6, 1961, p. 221-254.
- [7] ERDŐS (P.). - Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London math. Soc., t. 10, 1935, p. 126-128.
- [8] ERDŐS (P.), SARKÖZI (A.) and SZEMERÉDI (E.). - On divisibility properties of sequences of integers, "Number theory". Edited by P. Turan [1968, Debrecen.], p. 37-49. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1970 (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 2).
- [9] FREJMAN (G. A.). - Foundations of a structural theory of set addition. - Providence, American mathematical Society, 1973 (Translations of mathematical Monographs, 37).
- [10] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences, vol I. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [11] HINDMAN (N.). - Finite sums from sequences within cells of a partition of  $\mathbb{N}$ , J. combinatorial Theory, Series A, t. 17, 1974, p. 1-11.
- [12] KLEITMAN (D.). - On a combinatorial problem of Erdős, Proc. Amer. math. Soc., t. 17, 1966, p. 139-141.
- [13] SZEMERÉDI (E.). - On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression, "Proceedings of the international congress of mathematicians" [1974, Vancouver], p. 503-505 ; et Acta Arithmetica, Warszawa, t. 27, 1975, p. 199-245.

(Texte reçu le 16 juillet 1976)

Paul ERDŐS  
 Akademia Matematikai Intezete  
 Reáltanoda u. 13-15  
 H - 1053 BUDAPEST  
 (Hongrie)

---