

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS

JEAN-LOUIS NICOLAS

Sur la fonction «nombre de facteurs premiers de n »

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1978-1979),
exp. n° 32, p. 1-19.

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A9_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA FONCTION "NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE n "

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS (*)

[Budapest et Limoges]

Résumé. - Soit $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n . On dit que n est ω -largement composé si $m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$. La quantité $Q_\omega(X)$ de tels nombres $\leq X$ vérifie $\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_\omega(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X})$. On démontre aussi

$$\text{card}\{n \leq x ; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}\} = x^{1-c+o(1)}$$

et, si $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec leur multiplicité

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2}(1 + o(1)).$$

On étudie les nombres n ω -intéressants, définis par

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n},$$

et on démontre qu'il existe une infinité de points d'étranglement n_k pour la fonction $n - \omega(n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k),$$

et

$$m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k).$$

Introduction. - Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n . On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives : Une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraîne

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

HARDY et RAMANUJAN (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log \log n$. En 1934, P. TURAN donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant (cf. [Tur]) :

$$\sum_{n=1}^x (\omega(n) - \log \log x)^2 = O(x \log \log x).$$

En 1939, M. KAC et P. ERDÖS démontraient (cf. [Kac]) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card}\{n \leq x ; \omega(n) \leq \log \log x + t \sqrt{\log \log x}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(-\frac{u^2}{2}) du.$$

Ensuite, P. ERDÖS ([Erd 1]) et L. G. SATHE ([Sat]) s'intéressaient aux entiers

(*) Texte reçu le 11 juin 1979.

Paul ERDÖS, Akademia Matematikai Intezete, 13-15 Realtanoda u., H.1053 BUDAPEST (Hongrie), et Jean-Louis NICOLAS, Département de Mathématiques, UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

$n \leq x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log \log x$. A. SELBERG ([Sel]) donnait la "formule de Selberg" :

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = zF(z) x(\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{\operatorname{Re} z-2})$$

où $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z.$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de SATHE et d'évaluer avec précision la quantité

$$\operatorname{card}\{n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x\}, \quad \alpha > 1$$

(cf. proposition 3, [Del 1], et [Del 2]).

Soit p_k le k -ième nombre premier, et posons $A_k = 2.3. \dots .p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω -hautement composé si $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω -hautement composés est la suite A_k .

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que, lorsque $n \rightarrow \infty$, (cf. [Wri], ch. XVIII) :

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω -hautement composés au plus égaux à X vérifie

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log \log X}.$$

On dit maintenant que n est ω -largement composé, si $m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$. Si $A_k \leq n < A_{k+1}$, n est ω -largement composé si, et seulement si, $\omega(n) = k$. Soit $Q_\ell(X)$ le nombre de nombres ω -largement composés $\leq X$. Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Il existe deux constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_\ell(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Nous démontrerons ensuite le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Soit c , $0 < c < 1$. On a

$$f_c(x) = \operatorname{card}\{n \leq x; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}\} = x^{1-c+o(1)}.$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple $\operatorname{card}\{n \leq x; \omega(n) > (\log x)^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$. KOLESNIK et STRAUSS (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$, pour

quelques fonctions arithmétiques f . Nous démontrerons en particulier le résultat suivant.

THÉOREME 3. - On a, pour $n \rightarrow +\infty$,

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + o(1)) .$$

Au paragraphe 4, nous disons qu'un nombre n est ω -intéressant si

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n} .$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n , si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \quad \text{et} \quad m > n \Rightarrow f(m) > f(n) .$$

Interprétation géométrique : Le graphe de f , contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côtés parallèles aux axes, s'étrangle en n . Nous démontrons enfin le théorème suivant.

THÉOREME 4. - La fonction $n \mapsto n - \omega(n)$ a une infinité de points d'étranglement.

Pour un tel point n , il existe juste avant n , une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers, et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

1. Démonstration du théorème 1.

Minoration. - D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $f(x)/x$ décroisse et tende vers 0, il existe, entre $(1 - 2\varepsilon)\log X$ et $(1 - \varepsilon)\log X$ un nombre x tel que

$$\pi(x + f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \pi(x) - \pi(x - f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x} .$$

On choisit $f(x) = c \sqrt{x} \log x$. Soit k tel que $p_k \leq x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres :

$$n = A_{k-r} q_1 \dots q_r , \quad 0 \leq r \leq s ,$$

où q_1, \dots, q_r sont des nombres premiers choisis parmi p_{k+1}, \dots, p_{k+s} .

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$, et il y en a 2^s . De plus, ils vérifient

$$n \leq A_k [p_{k+s}/p_{k-s}]^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leq x + f(x)$ et $p_{k-s} \geq x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \frac{f(x)}{\log x}$. On a alors :

$$\log \frac{n}{A_k} \leq s \log \frac{x + f(x)}{x - f(x)} \lesssim 2c^2 \log x.$$

Si l'on choisit $c < 1/\sqrt{2}$, on aura donc $A_k \leq n < A_{k+1}$, et ces nombres n seront ω -largement composés et $\leq X$. On aura donc

$$Q_k(X) \geq 2^s \geq \exp((1 - \epsilon) \frac{\log 2}{\sqrt{2}} \sqrt{\log X}).$$

Majoration. - La majoration de $Q_k(X)$ est basée sur le lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., p_k , le k -ième nombre premier, et soit $T(x)$ le nombre de solutions de l'inéquation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leq x, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Si $C > \pi\sqrt{2/3}$, on a pour x assez grand,

$$\log T(x) \leq C \sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

Démonstration. - Le nombre de solutions de l'équation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots = n, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

est le nombre $S(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leq x} S(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Ramanujan (cf. [Ram]), et ROTH et SZEKERES donnent la formule [Roth]

$$\log S(n) = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{n}{\log n}} (1 + o(\frac{\log \log n}{\log n})),$$

et montrent que $S(n)$ est une fonction croissante de n . On a alors $T(x) \leq xS[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble

$$E_k = \{n | \omega(n) = k, n < A_{k+1}\}.$$

Soit $n \in E_k$, $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \dots q_k$ est sans facteur carré, et $n' \in E_k$. De plus $n/n' < p_{k+1}$. On a donc

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1} \text{ card } E'_k,$$

avec $E'_k = \{n; n \text{ sans facteur carré}, \omega(n) = k, n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit

$$n = 2^{1-y_k} 3^{1-y_{k-1}} \dots p_k^{1-y_1} p_{k+1}^{x_1} \dots p_{k+r}^{x_r} \dots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1, et $\sum x_i = \sum y_i$. Il vient

$$\log \frac{n}{A_k} = x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'iné-

quation, en x_i et y_i valant 0 ou 1 ,

$$x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots \leq \log p_{k+1} .$$

On en déduit $\text{card } E_k' \leq N_1 N_2$, avec N_1 = nombre de solutions de l'inéquation (ξ_i) ($i = 1, 2$)

$$(\xi_1) \quad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leq \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \quad y_1 \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots \leq \log p_{k+1} .$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation (ξ_1) en deux

$$(\xi_1') \quad \sum_{r=1}^R x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1} ,$$

$$(\xi_1'') \quad \sum_{r=R+1}^{\infty} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1} .$$

Le nombre de variables de (ξ_1'') est en fait fini, et majoré par $p_k p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de (ξ_1'') est majoré par $\log p_{k+1} / \log 2$. Le nombre N_1'' de solutions de (ξ_1'') est majoré par

$$N_1'' \leq \sum_{j \leq \log p_{k+1} / \log 2} \binom{p_k p_{k+1}}{j} \leq \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} (p_k p_{k+1})^{\log p_{k+1} / \log 2}$$

ce qui assure

$$\log N_1'' = O((\log p_k)^2) .$$

Il résulte de l'inégalité de Brun-Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]),

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y / \log y ,$$

valable pour $1 < y \leq x$, que

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log(p_{k+r} - p_k) \geq \frac{r}{2} \log 2r .$$

On en déduit que, pour $r \leq R$, on a

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geq \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geq \frac{r \log 2r}{4p_k} \geq c \frac{p_r}{p_k} .$$

Toute solution de (ξ_1') est donc solution de l'inéquation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leq \frac{1}{c} p_k \log p_{k+1}$$

et, d'après le lemme précédent, on a

$$\log N_1' = O(\sqrt{p_k}) ,$$

et le nombre de solutions de (ξ_1) vérifie $\log N_1 = O(\sqrt{p_k})$.

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de (ξ_2) vérifie

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}) .$$

Ceci entraîne

$$\log(\text{card } E'_k) \leq \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1} (\text{card } E'_k) = \exp(O(\sqrt{p_k})) .$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω -largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_\ell(X)$ de tels nombres $\leq X$ vérifie, en posant $A_{k_0} \leq X < A_{k_0+1}$, ce qui entraîne $\log X \sim p_{k_0}$

$$Q_\ell(X) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \exp(O(\sqrt{p_k})) \leq k_0 \exp(O(\sqrt{p_{k_0}})) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}) .$$

Remarque. - On peut conjecturer que $\log Q_\ell(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet, si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le "2" venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k , on peut assimiler $\log p_{k+r}/p_k$ à $r(\log p_{k+1}/p_k)$, et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, \quad x_i, y_i \in \{0, 1\} .$$

Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{2/3} \sqrt{p_k}$.

2. Démonstration du théorème 2.

Minoration. - Posons

$$k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1 \quad \text{et} \quad A_k = e^{\theta(p_k)} = 2.3. \dots p_k ,$$

où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Čebyšev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > (c \log x)/(\log \log x)$. Il y en a $[x/A_k]$ qui sont inférieurs à x . On a (cf. [Land], § 57)

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k / \log^2 p_k) = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)) .$$

Il vient, en posant $\ell = \log x$, $\ell_2 = \log \log x$,

$$k = \frac{c\ell}{\ell_2} + o(1)$$

$$\log A_k = c\ell + c(\log c - 1)(1 + o(1)) \ell / \ell_2$$

et

$$f_c(x) \geq \left[\frac{x}{A_k} \right] \geq x^{1-c} \exp(c(1 - \log c)(1 + o(1))) \frac{\log x}{\log \log x} .$$

Majoration. - En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38, ou [Hal 2], p. 147), on obtient

$$\left[\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right]^k \geq k! \sum_{2 \leq p_1 < \dots < p_k \leq x} \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_k} .$$

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x, n \in S, \omega(n)=k} 1 \leq \sum_{n \leq x, n \in S, \omega(n)=k} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k.$$

Évaluons maintenant le nombre d'entiers $n \leq x$ dont les facteurs premiers sont exactement $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$. On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k} \leq x; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Ceci entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq \left[\frac{\log x}{\log 2} \right]; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut

$$\binom{\left[\log x / \log 2 \right]}{k} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^k.$$

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x, \omega(n)=k} 1 \leq \frac{1}{(k!)^2} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^k$$

et

$$\sum_{n \leq x, \omega(n) \geq k} 1 \leq x \sum_{j \geq k} \left(\left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^j (\log x / \log 2)^j \right) / (j!)^2.$$

On utilise la majoration $\sum_{j \geq k} a^j / (j!)^2 \leq a^k / (k!)^2 \cdot 1 / (1 - a / (k+1)^2)$, valable pour $a < (k+1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land], § 28) qu'il existe B tel que $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + B$, et on choisit

$$k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1.$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leq x \frac{(\log 2 + B)^k (\log 2)^k}{(k!)^2} \left(1 + O\left(\frac{\log^3 2}{\log^2 x}\right) \right)$$

et, en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp(3c(1 + o(1))) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$.

1° Fonction $\sigma(n) =$ somme des diviseurs de n . — On remarque d'abord que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$(2) \quad \sigma(n) = n \prod_{p^a \parallel n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a} \right) = n(1 + o(1)) \prod_{p^a \parallel n, p \leq \log n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a} \right);$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log \log n$; et

$$\prod_{p^a \parallel n, p > \log n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \leq \prod_{p^a \parallel n, p > \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \\ \leq \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{-\log n / \log \log n} = 1 + \frac{O(1)}{\log \log n},$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n , $\sigma(n) \geq n$, et pour n pair, $\sigma(n) \geq \frac{3}{2}n$. On a donc, pour tout n , $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geq \frac{5}{2}n$. Inversement, pour k tendant vers $+\infty$, le nombre $n = 4p_2 p_3 \dots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1 - \varepsilon) \log n$, et donc vérifie

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) = \frac{5}{2}n(1 + o(1)).$$

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n+1)$ de la façon suivante : Il résulte de (2) que $\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1 + o(1))(P_1 + P_2)$ avec

$$P_1 = \prod_{p \mid n, p \leq \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{p \mid n+1, p \leq \log n} \frac{1}{1 - 1/p}.$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs ou égaux à 1, $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$. Mais

$$P_1 P_2 \leq \prod_{p \leq \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \sim e^\gamma \log \log n,$$

où γ est la constante d'Euler, d'après la formule de MERTENS (cf. [Wril]). Cela donne, pour tout n ,

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1 + o(1)) e^\gamma \log \log n.$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque, pour une infinité de n , on a (cf. [Wril])

$$\sigma(n) \sim n e^\gamma \log \log n.$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut prendre P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max_{n \leq x} \sigma(n)$ et de $\max_{n \leq x} (\sigma(n) + \sigma(n-1))$ montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie

$$\max_{n \leq N+1} (\sigma(n) + \sigma(n-1)) = \sigma(N) + \sigma(N-1) \quad \text{ou} \quad \sigma(N+1) + \sigma(N).$$

2° Indicateur d'Euler φ . - On a une relation analogue à (2)

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n(1 + o(1)) \prod_{p \mid n, p \leq \log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On démontre comme précédemment que, pour tout n , on a

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \leq \frac{3}{2}n$$

et que, pour une infinité de n ,

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \sim \frac{3}{2}n.$$

Pour les petites valeurs de $\varphi(n) + \varphi(n+1)$, on a

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \geq n(1 + o(1))(P_1 + P_2) \geq 2n(1 + o(1)) \sqrt{P_1 P_2},$$

avec

$$P_1 = \prod_{p|n, p \leq \log n} (1 - \frac{1}{p}) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{p|n+1, p \leq \log n} (1 - \frac{1}{p}) ,$$

et, comme

$$P_1 P_2 \geq \prod_{p \leq \log n} (1 - 1/p) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n} ,$$

on a

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \geq \frac{2e^{-\gamma/2} n(1 + o(1))}{\sqrt{\log \log n}} .$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante : Soit $k \geq 4$. On pose $P_k = \prod_{p \leq p_k} (1 - 1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel que $P_{k'} \geq \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \dots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \dots p_k$; on a, lorsque $k \rightarrow +\infty$, $\frac{\varphi(R)}{R} = \frac{\varphi(S)}{S}(1 + o(1))$, et l'on prend pour n la plus petite solution des congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{R} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{S} . \end{cases}$$

3° Fonction Ω . Démonstration du théorème 3.

PROPOSITION 1. - Soit $\varepsilon > 0$, et $k > 0$. On écrit $n(n+1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leq k$. Alors il existe $n_0(k, \varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $U_k \leq n^{1+\varepsilon}$.

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque

$$\begin{aligned} \Omega(n) + \Omega(n+1) &= \Omega(n(n+1)) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k) \\ &\leq \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{\log n}{\log 2} + \frac{\log n(n+1)}{\log k} \quad \text{pour } n \geq n_0 . \end{aligned}$$

Etant donné η , il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + \eta) \quad \text{pour } n \geq n_0 .$$

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th. 4-F) comme nous l'a précisé M. LANGEVIN.

PROPOSITION 2 (RIDOUT). - Soit θ un nombre algébrique $\neq 0$. Soit P_1, P_2, \dots, P_s , Q_1, Q_2, \dots, Q_t des nombres premiers distincts, et $\delta > 0$. Il y a un nombre fini de nombres rationnels a/b de la forme :

$$a = a' p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad b = b' q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_t^{\beta_t}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in \mathbb{N}$ et $a', b' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| \theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{|a' b'| |ab|^\delta} .$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que, pour une infinité de n , on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leq k$ en deux parties P_1, P_2, \dots, P_s et Q_1, Q_2, \dots, Q_t , de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$p \leq k \text{ et } p|n \Rightarrow p \in \{P_1, \dots, P_s\}$$

$$p \leq k \text{ et } p|n+1 \Rightarrow p \in \{Q_1, \dots, Q_t\}.$$

On écrit $n = n' P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n'' Q_1^{\beta_1} \dots Q_t^{\beta_t}$, et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $(n+1)/n$, solution de :

$$\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \frac{1}{|n' n''| (n(n+1))^\delta}$$

puisque $n' n'' = V_k \leq n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leq 300\,000$ vérifiant $m < n \Rightarrow \Omega(m(m+1)) < \Omega(n(n+1))$ sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega(n(n+1))$) : 2(2) ; 3(3) ; 7(4) ; 8(5) ; 15(6) ; 32(7) ; 63(9) ; 224(10) ; 255(11) ; 512(13) ; 3968(14) ; 4095(17) ; 14436(18) ; 32768(19) ; 65535(20) ; 180224(22) ; 262143(24).

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4° Fonction ω . - Nous avons rappelé dans l'introduction que, lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1)).$$

Soit

$$\lambda = \overline{\lim} \frac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n / \log \log n}.$$

On a $1 \leq \lambda \leq 2$ de façon évidente. On a probablement $\lambda = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega(m(m+1)) < \omega(n(n+1))$ est 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc. On a en particulier $714 = 2.3.7.17$ et $715 = 5.11.13$. L'équation

$$n(n+1) = 2.3.5. \dots p_k$$

a-t-elle des solutions > 714 (cf. [Nel]) ?

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p , on a $\Omega(2p+1) \leq 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que, pour une infinité de n , on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leq \Omega(n) + \Omega(n+1) \leq 4.$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen ($\Omega(2p+1) = 1$) permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω .

Si l'on a $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$, n et $n+1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne ($n = 2^p - 1$ avec p premier) ou si $n+1$ est un nombre premier de Fermat ($n+1 = 2^{2^k} + 1$). D'autre part, l'équation $2^n \pm 1 = p^a$ avec $a \geq 2$, qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n , tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$, est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

4. Nombres ω -intéressants.

Définition. - On dit que n est ω -intéressant si l'on a

$$m > n \implies \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique : pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

PROPRIÉTÉ 1. - Pour $k \geq 1$, le nombre $A_k = 2.3. \dots .p_k$ est ω -intéressant.

En effet, si $\omega(m) \leq k$, on a bien $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geq A_k 3^\Delta$ et

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k + \Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{(1 + \Delta/k)}{3^\Delta} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1 + \Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

PROPRIÉTÉ 2. - Soit n vérifiant

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ et } \omega(n) = k,$$

alors n est ω -intéressant.

Démonstration. - Soit $m > n$. Ou bien on a $m \geq A_{k+1}$ et, d'après la propriété 1,

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1)(1 - 1/k)}{n} < \frac{\omega(n)}{n};$$

ou bien on a $n < m < A_{k+1}$, et cela entraîne $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

PROPRIÉTÉ 3. - Pour une infinité de valeurs de k , il existe un nombre ω -intéressant, plus grand que A_k et ayant $k-1$ facteurs premiers.

Démonstration. - Soit k tel que

$$(3) \quad \frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{1}{k-1}.$$

Alors, $n = 2.3. \dots .p_{k-1}(p_k + 1)$ est ω -intéressant.

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k p_{k+1}/p_k$ et que, pour $k \geq 2$, d'après la propriété 2, n' est ω -intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k - 1$; si m vérifie $n < m < n'$, on a $\omega(m) \leq k - 1$; si m vérifie $n' \leq m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n},$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres, on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k + 1},$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraîne la relation (3) pour k assez grand.

Remarque 1. - Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < p_k/(k-1)$ il est facile de voir qu'il n'existe aucun nombre ω -intéressant compris entre A_k et $n' = A_k p_{k+1}/p_k$. Cette situation se produit pour une infinité de k . On peut donc conjecturer que, pour une infinité de k , les nombres ω -intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) = k$.

Remarque 2. - Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leq n = A_k(1 + 1/p_k)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante : Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u+1) \dots (u+r)$ est plus grand que r si $u \geq r$ (cf. [Lan]).

Considérons le produit $\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1} p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1} p_k + t$. Alors le nombre $n = 2.3. \dots .p_{k-2}(p_{k-1} p_k + t_q)$ a $k-1$ facteurs premiers, et l'on a $n \leq A_k(1 + p_{k-2}/p_k p_{k-1})$. Le résultat de RAMACHANDRA (cf. [Ramac]) "Si $r^{3/2} \leq u \leq r^{\log \log r}$, on a $P(u, r) > r^{1+2^\lambda}$ avec $\lambda = -(8 + \frac{\log u}{\log r})$ " permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leq A_k(1 + 1/p_k^{1+\alpha})$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

PROPRIÉTÉ 4. - Soit n un nombre ω -intéressant, $n \geq (k-1) A_k$. Alors $\omega(n) \geq k$. Cela entraîne qu'un nombre ω -intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. - Soit $n \geq (k-1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leq k-1$; on écrit

$$A_k(t-1) \leq n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geq k$. Ce nombre n ne peut pas être ω -intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leq \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leq \frac{k}{A_k t} \leq \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture. - Peut-on remplacer $n \geq (k-1) A_k$ par $n \geq (1 + \varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω -intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω -largement composés : Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω -largement composés non ω -intéressants (exemple : $n = (p_{k+1} - 1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

5. Démonstration du théorème 4.

PROPOSITION 3. - Posons $N_k(x) = \text{card}\{n \leq x ; \omega(n) > k\}$. Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a, lorsque $x \rightarrow +\infty$ (avec les notations de l'introduction),

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{1/2 + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1 - \alpha + \alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}},$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y .

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable (en remplaçant $\frac{F(\alpha)}{\alpha - 1}$ par $\frac{F(\alpha)}{1 - \alpha}$) pour estimer $\text{card}\{n \leq x ; \omega(n) \leq \alpha \log \log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. DELANGE). - Soit $P_x(z) = \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)}$. Le théorème des résidus montre que

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P_x(z)}{(z-1) z^{k+1}} dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de SELBERG (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{zF(z) x(\log x)^{z-1}}{(z-1) z^{k+1}} dz + R_1(x)$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{O(x(\log x)^{\text{Re } z-2})}{(z-1) z^{k+1}} dz = O\left(\frac{x(\log x)^{r-2}}{(r-1) r^k}\right).$$

On pose $\frac{zF(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe pour $z \neq 1$, et l'on a

$$G(z) = G(r) + (z-r) G'(r) + (z-r)^2 H(z, r),$$

où $H(z, r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma$, $1 < r_1 \leq r \leq r_2$. On pose $\log \log x = \ell$. On obtient

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{1}{2i\pi \log x} \int_{\gamma} \frac{xG(z) e^{z\ell}}{z^{k+1}} dz + R_1(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi \log x} \left(\int_{\gamma} \frac{xG(r) e^{z\ell}}{z^{k+1}} dz + \int_{\gamma} \frac{x(z-r) e^{z\ell} G'(r)}{z^{k+1}} dz \right) + R_1(x) + R_2(x) \\ &= \frac{x}{\log x} G(r) \frac{\ell^k}{k!} + \frac{x}{\log x} G'(r) \left(\frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r\ell^k}{k!} \right) + R_1(x) + R_2(x). \end{aligned}$$

On choisit $r = k/\ell$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et

on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_K \frac{x(z-r)^2}{z^{k+1}} \frac{H(z, r) e^{z\ell}}{dz} dz.$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$, on a $|z-r|^2 |e^{z\ell}| = 2r^2(1 - \cos \theta) e^{r\ell \cos \theta}$. On peut montrer que, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, on a

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) e^{\alpha \cos \theta} d\theta = O(e^\alpha \alpha^{-3/2})$$

(cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{r\ell}}{\ell^{3/2} r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x} G(r) \frac{\ell^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{r\ell}}{\ell^{3/2} r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x(\log x)^{r-2}}{(r-1) r^k}\right).$$

On prend $k = [\alpha \log \log x]$, de sorte que $r = \frac{k}{\ell} = \alpha + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)$. On a donc $G(r) = G(\alpha)(1 + O(\frac{1}{\ell}))$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling : $k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$), et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \frac{k}{\ell} < 1$.

PROPOSITION 4. - Soit $(n_0, A) = 1$. Alors on a, avec $d(n) = \sum_{d|n} 1$,

$$(i) \quad \sum_{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x} d(n) \leq \frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) + 2\sqrt{x}$$

$$(ii) \quad \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x, \\ \omega(n) \geq \alpha \log \log x}} 1 \leq \frac{1}{(\log x)^\alpha \log 2} \left(\frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) + 2\sqrt{x}\right).$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\frac{x}{A} (1/(\log x)^\alpha \log 2^{-1})\right)$ lorsque $A = O(\sqrt{x})$.

Démonstration. - La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i) : Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geq \alpha \log \log x$ vérifient $d(n) \geq 2^{\omega(n)}$, soit $d(n) \geq (\log x)^\alpha \log 2$.

On a

$$\sum_{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x} d(n) \leq \sum_{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x} \sum_{d \leq \sqrt{n}, d|n} 2 < \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod{A}, \\ d|n, n \leq x}} 1.$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + yA \equiv 0 \pmod{d}$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution, et une seule, en y dans chaque intervalle de longueur d . Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d) | n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d , et la somme est inférieure ou égale à

$$\sum_{d \leq \sqrt{x}} 2\left(\frac{x}{Ad} + 1\right) \leq 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right).$$

Remarque. - Dans le cas $A = 1$, $\alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est dû au fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leq x, \omega(n) \sim 2 \log \log x} d(n) \sim x \log x.$$

Par des techniques plus compliquées, il est possible d'avoir pour (ii) une majoration du même ordre en $\log x$ que celle de la proposition 3, pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.

LEMME 2. - Soit $M = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps K . Soit \mathcal{P} une partie de K , et soit L_i le nombre d'éléments de la i -ème ligne de M qui sont dans \mathcal{P} . Alors il y a au moins $n - \sum_{i=1}^m L_i$ colonnes de M dont tous les éléments sont dans $K - \mathcal{P}$.

Démonstration. - Soit C_j le nombre d'éléments de la j -ième colonne qui sont dans \mathcal{P} . On a

$$\sum_{j=1}^n C_j = \sum_{i=1}^m L_i \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j = 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j \neq 0}} 1 \geq n - \sum_{j=1}^n C_j = n - \sum_{i=1}^m L_i.$$

PROPOSITION 5. - Supposons qu'il existe $k > 0$ et $j < n$ tels que

- (i) $k \leq \omega(n)$,
- (ii) $\omega(n) \leq j$,
- (iii) $\omega(n - r) \geq j$ pour $r = 1, 2, \dots, j - 1$,
- (iv) $\omega(n + s) \leq k$ pour $s = 1, 2, \dots, [2 \log n]$.

Alors, pour n assez grand, n est un point d'étranglement pour la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. - Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leq n - j$ et, d'après (ii),

$$m - \omega(m) < n - j \leq n - \omega(n).$$

Ou bien on a $m = n - r$ avec $1 \leq r \leq j - 1$, et (iii) et (ii) donnent

$$m - \omega(m) \leq m - j \leq m - \omega(n) < n - \omega(n).$$

Soit maintenant $m > n$.

Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et, en remarquant que pour tout entier m on a $\omega(m) \leq \frac{\log m}{\log 2} \leq \frac{3}{2} \log m$, on obtient, si n est assez grand,

$$m - \omega(m) \geq m - \frac{3}{2} \log m > n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log(n + 2 \log n) > n > n - \omega(n)$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x - \frac{3}{2} \log x$.

Ou bien on a $m \leq n + [2 \log n]$, et (iv) donne alors

$$\omega(m) \leq k \leq \omega(n),$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n).$$

Démonstration du théorème 4. - La méthode suivante est celle de [Erd 2].

Pour assurer les hypothèses (i) et (iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences :

$$\begin{cases} n \equiv 0 & (\text{mod } B_0) \\ n \equiv 1 & (\text{mod } B_1) \\ \vdots \\ n \equiv j-1 & (\text{mod } B_{j-1}) \end{cases}$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers, et B_1, \dots, B_{j-1} des produits de j nombres premiers tous distincts. On pose $A = B_0 B_1 \dots B_{j-1}$. D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + yA \quad \text{avec} \quad 0 \leq n_0 < A \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{N}.$$

On se donne x assez grand. On choisit $k = [3 \log \log x]$, $j = [6 \log \log x]$. On prend les facteurs premiers de B_0, \dots, B_{j-1} distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc

$$\log A \leq 36(\log \log x)^2 \log(4 \log x) = O(\log \log x)^3.$$

Maintenant, pour $1 \leq s \leq 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A , on a, pour la solution n_0 des congruences,

$$(n_0 + s, A) = 1 \quad \text{et} \quad (n_0, A) = B_0.$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, où $0 \leq s \leq 2 \log x$, $0 \leq y \leq \frac{x}{A} - 1$, défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega(n_0 + s + yA) \quad \text{si } s \neq 0 \\ &= \omega\left(\frac{n_0 + yA}{B_0}\right) \quad \text{si } s = 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la s -ième ligne de ce tableau contient au plus

$$O\left(\frac{x}{A} \frac{1}{(\log x)^3 \log 2-1}\right)$$

termes supérieurs à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\frac{x}{A}(1 + o(1))$ colonnes y pour lesquelles

$$\omega(n_0 + s + yA) \leq 3 \log \log x \quad \text{pour } s = 1, \dots, 2[\log x]$$

$$\omega(n_0 + yA) \leq 6 \log \log x \quad \text{pour } s = 0.$$

Pour une de ces valeurs de y , $n = n_0 + yA$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que, pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^\varepsilon$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que, pour $n = 2.3. \dots .p_k$, $n - (\omega(n) \log \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a aucun point d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de point d'étranglement : La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante : Majorer le plus petit t_k tel que $\omega(n + t_k) \geq k$. On a évidemment $t_k \leq 2.3. \dots .p_k$, et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que, si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que, pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$, et même

$$m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - \exp(\log n)^{1-\varepsilon},$$

ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$ (On a besoin de $n - 2$, parce que $\min_{m=n+1, n+2} m - d(m) \leq n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet).

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme : La démonstration suivante a été proposée par D. BERNARDI et W. NARKIEWICZ.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de points d'étranglement, et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $[n_k/b, n_k/a]$ un nombre c premier à a et b ; on aura alors

$$ca < n_k < cb,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

REFERENCES

- [And] ANDERSON (I.). - On primitive sequences, J. London math. Soc., t. 42, 1967, p. 137-148.
- [Com] COMTET (L.). - Analyse combinatoire. Tomes 1 et 2. - Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 4 et 5).

- [Del 1] DELANGE (H.). - Sur des formules dues à A. Selberg, Bull. Sc. math., 2e série, t. 83, 1959, p. 101-111.
- [Del 2] DELANGE (H.). - Sur des formules de A. Selberg, Acta Arithm., Warszawa, t. 19, 1971, p. 105-146.
- [Dieu] DIEUDONNÉ (J.). - Calcul infinitésimal. - Hermann, Paris, 1968 (Collection Méthodes).
- [Erd 1] ERDÖS (P.). - On the integers having exactly k prime factors, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 53-66.
- [Erd 2] ERDÖS (P.). - On arithmetical properties of Lambert series, J. Indian math. Soc., t. 12, 1948, p. 63-66.
- [Erd 3] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Ann. of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.
- [Hal 1] HALBERSTAM (H.) and RICHERT (H. E.). - Sieve methods. - London, Academic Press, 1974 (London mathematical Society Monographs, 4).
- [Hal 2] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [Har] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - The normal number of prime factors of a number n , Quart J. of Math., t. 48, 1917, p. 76-92 ; "Collected papers of Ramanujan", p. 262-275. - Cambridge, at the University Press, 1927.
- [Kac 1] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, Proc. Nat. Acad. Sc., t. 25, 1939, p. 206-207.
- [Kac 2] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - The Gaussian law of errors in the theory of additive functions, Amer. J. Math., t. 62, 1940, p. 738-742.
- [Kol] KOLESNIK (G.) and STRAUSS (E. G.). - On the distribution of integers with a given number of prime factors (à paraître).
- [Land] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. - New York, Chelsea publishing Company, 1953.
- [Lan] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.
- [Mon] MONTGOMERY (H. L.) and VAUGHAN (R. C.). - On the large sieve, Mathematika, London, t. 20, 1973, p. 119-134.
- [Nel] NELSON (C.), PENNEY (D. E.) and POMERANCE (C.). - 714 and 715, J. recreational Mathematics, t. 7, 1974, p. 87-89.
- [Nic] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres largement composés, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année, 1977/78, n° 41, 10 p. ; et Acta Arithm., Warszawa, t. 34, 1979, p. 379-390.
- [Pis] PISOT (C.) and SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.
- [Pra] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).
- [Ramac] RAMACHANDRA (K.). - A note on numbers with a large prime factor, II, J. Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 39-48.
- [Ram] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 16, 1917, p. 112-132 ; and "Collected papers". Vol. 1, p. 277-293.
- [Rid] RIDOUT (D.). - Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika, London, t. 4, 1957, p. 125-131.
- [Roth] ROTH (K. F.) and SZEKERES (G.). - Some asymptotic formulae in the theory of partitions, Quart. J. math., Oxford, Series 2, t. 5, 1954, p. 241-259.

- [Sat] SATHE (L. G.). - On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors, I, II, III, IV, J. Indian math. Soc., t. 17, 1953, p. 63-141 et t. 18, 1954, p. 27-81.
- [Sch] SCHMIDT (W. M.). - Approximation to algebraic numbers, Enseign. math. Genève, t. 17, 1971, p. 187-253 ; et Genève, Enseignement mathématique, 1972 (Monographies de l'Enseignement mathématique, 19).
- [Sel 1] SELBERG (A.). - Note on a paper by L. G. Sathe, J. Indian math. Soc., t. 18, 1954, p. 83-87.
- [Sel 2] SELBERG (A.). - On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes, Arch. Math. Naturvid., t. 47, 1943, fasc. 6, p. 87-105.
- [Tij] TIJDEMAN (R.). - Of the equation of Catalan. - Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 197-209.
- [Tur] TURAN (P.). - On a theorem of Hardy and Ramanujan, J. London math. Soc., t. 9, 1934, p. 274-276.
- [Wri] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.
-