

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS

JEAN-LOUIS NICOLAS

Sur la fonction «nombre de facteurs premiers de n»

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1978-1979),
exp. n° 32, p. 1-19.

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A9_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

SUR LA FONCTION "NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE n "

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS (*)
[Budapest et Limoges]

Résumé. — Soit $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n . On dit que n est ω -largement composé si $m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$. La quantité $Q_\ell(X)$ de tels nombres $\leq X$ vérifie $\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_\ell(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X})$. On démontre aussi

$$\text{card}\{n \leq x ; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}\} = x^{1-c+o(1)}$$

et, si $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec leur multiplicité

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2}(1 + o(1)).$$

On étudie les nombres n ω -intéressants, définis par

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n},$$

et on démontre qu'il existe une infinité de points d'étranglement n_k pour la fonction $n - \omega(n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k),$$

et

$$m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k).$$

Introduction. — Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n . On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives : Une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraîne

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

HARDY et RAMANUJAN (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log \log n$. En 1934, P. TURAN donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant (cf. [Tur]) :

$$\sum_{n=1}^x (\omega(n) - \log \log x)^2 = O(x \log \log x).$$

En 1939, M. KAC et P. ERDÖS démontraient (cf. [Kac]) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card}\{n \leq x ; \omega(n) \leq \log \log x + t \sqrt{\log \log x}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(-\frac{u^2}{2}) du.$$

Ensuite, P. ERDÖS ([Erd 1]) et L. G. SATHE ([Sat]) s'intéressaient aux entiers

(*) Texte reçu le 11 juin 1979.

Paul ERDÖS, Akadémia Matematikai Intézet, 13-15 Reáltanoda u., H.1053 BUDAPEST (Hongrie), et Jean-Louis NICOLAS, Département de Mathématiques, UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

$n \leq x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log \log x$. A. SELBERG ([Sel]) donnait la "formule de Selberg" :

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = zF(z) x(\log x)^{z-1} + o(x(\log x)^{\operatorname{Re} z-2})$$

où $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z.$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de SATHE et d'évaluer avec précision la quantité

$$\operatorname{card}\{n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x\}, \quad \alpha > 1$$

(cf. proposition 3, [Del 1], et [Del 2]).

Soit p_k le k -ième nombre premier, et posons $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω -hautement composé si $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω -hautement composés est la suite A_k .

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que, lorsque $n \rightarrow \infty$, (cf. [Wri], ch. XVIII) :

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω -hautement composés au plus égaux à X vérifie

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log \log X}.$$

On dit maintenant que n est ω -largement composé, si $m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$. Si $A_k \leq n < A_{k+1}$, n est ω -largement composé si, et seulement si, $\omega(n) = k$. Soit $Q_\lambda(X)$ le nombre de nombres ω -largement composés $\leq X$. Nous démontrerons le théorème suivant :

THEORÈME 1. - Il existe deux constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_\lambda(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Nous démontrerons ensuite le théorème suivant.

THEORÈME 2. - Soit c , $0 < c < 1$. On a

$$f_c(x) = \operatorname{card}\{n \leq x ; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}\} = x^{1-c+o(1)}.$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple $\operatorname{card}\{n \leq x ; \omega(n) > (\log x)^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$. KOLESNIK et STRAUSS (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$, pour

quelques fonctions arithmétiques f . Nous démontrerons en particulier le résultat suivant.

THEORÈME 3. - On a, pour $n \rightarrow +\infty$,

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + o(1)).$$

Au paragraphe 4, nous disons qu'un nombre n est ω -intéressant si

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n , si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \text{ et } m > n \Rightarrow f(m) > f(n).$$

Interprétation géométrique : Le graphe de f , contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côtés parallèles aux axes, s'étrangle en n . Nous démontrons enfin le théorème suivant.

THEORÈME 4. - La fonction $n \mapsto n - \omega(n)$ a une infinité de points d'étranglement.

Pour un tel point n , il existe juste avant n , une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers, et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

1. Démonstration du théorème 1.

Minoration. - D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $f(x)/x$ décroisse et tende vers 0, il existe, entre $(1 - 2\epsilon)\log X$ et $(1 - \epsilon)\log X$ un nombre x tel que

$$\pi(x + f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \text{ et } \pi(x) - \pi(x - f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}.$$

On choisit $f(x) = c \sqrt{x} \log x$. Soit k tel que $p_k \leq x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres :

$$n = A_{k-r} q_1 \cdots q_r, \quad 0 \leq r \leq s,$$

où q_1, \dots, q_r sont des nombres premiers choisis parmi p_{k+1}, \dots, p_{k+s} .

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$, et il y en a 2^s . De plus, ils vérifient

$$n \leq A_k [p_{k+s}/p_{k-s}]^s.$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leq x + f(x)$ et $p_{k-s} \geq x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \frac{f(x)}{\log x}$. On a alors :

$$\log \frac{n}{A_k} \leq s \log \frac{x + f(x)}{x - f(x)} \leq 2c^2 \log x.$$

Si l'on choisit $c < 1/\sqrt{2}$, on aura donc $A_k \leq n < A_{k+1}$, et ces nombres n seront ω -largement composés et $\leq x$. On aura donc

$$Q_\lambda(x) \geq 2^s \geq \exp((1 - \varepsilon) \frac{\log 2}{\sqrt{2}} \sqrt{\log x}).$$

Majoration. — La majoration de $Q_\lambda(x)$ est basée sur le lemme suivant.

LEMME 1. — Soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., p_k , le k -ième nombre premier, et soit $T(x)$ le nombre de solutions de l'inéquation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leq x, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Si $C > \pi \sqrt{2/3}$, on a pour x assez grand,

$$\log T(x) \leq C \sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

Démonstration. — Le nombre de solutions de l'équation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots = n, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

est le nombre $S(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leq x} S(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Ramanujan (cf. [Ram]), et ROTH et SZEKERES donnent la formule [Roth]

$$\log S(n) = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{n}{\log n}} \left(1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right),$$

et montrent que $S(n)$ est une fonction croissante de n . On a alors $T(x) \leq xS[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble

$$E_k = \{n \mid \omega(n) = k, n < A_{k+1}\}.$$

Soit $n \in E_k$, $n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \cdots q_k$ est sans facteur carré, et $n' \in E_k$. De plus $n/n' < p_{k+1}$. On a donc

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1} \text{ card } E'_k,$$

avec $E'_k = \{n ; n \text{ sans facteur carré}, \omega(n) = k, n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit

$$n = 2^{1-y_k} 3^{1-y_{k-1}} \cdots p_k^{1-y_1} p_{k+1}^{x_1} \cdots p_{k+r}^{x_r} \cdots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1, et $\sum x_i = \sum y_i$. Il vient

$$\log \frac{n}{A_k} = x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \cdots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \cdots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \cdots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \cdots$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'iné-

quation, en x_i et y_i valant 0 ou 1,

$$x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots \leq \log p_{k+1}.$$

On en déduit $\text{card } E'_k \leq N_1 N_2$, avec N_i = nombre de solutions de l'inéquation (ξ_i) ($i = 1, 2$)

$$(\xi_1) \quad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leq \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \quad y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots \leq \log p_{k+1}.$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation (ξ_1) en deux

$$(\xi'_1) \quad \sum_{r=1}^R x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1},$$

$$(\xi''_1) \quad \sum_{r=R+1}^{\infty} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1}.$$

Le nombre de variables de (ξ''_1) est en fait fini, et majoré par $p_k p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de (ξ''_1) est majoré par $\log p_{k+1}/\log 2$. Le nombre N''_1 de solutions de (ξ''_1) est majoré par

$$N''_1 \leq \sum_{j \leq \log p_{k+1}/\log 2} \binom{p_k p_{k+1}}{j} \leq \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} (p_k p_{k+1})^{\log p_{k+1}/\log 2}$$

ce qui assure

$$\log N''_1 = O((\log p_k)^2).$$

Il résulte de l'inégalité de Brun-Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]),

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y/\log y,$$

valable pour $1 < y \leq x$, que

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log(p_{k+r} - p_k) \geq \frac{r}{2} \log 2r.$$

On en déduit que, pour $r \leq R$, on a

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geq \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geq \frac{r \log 2r}{4p_k} \geq c \frac{p_r}{p_k}.$$

Toute solution de (ξ'_1) est donc solution de l'inéquation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leq \frac{1}{c} p_k \log p_{k+1}$$

et, d'après le lemme précédent, on a

$$\log N'_1 = O(\sqrt{p_k}),$$

et le nombre de solutions de (ξ'_1) vérifie $\log N'_1 = O(\sqrt{p_k})$.

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de (ξ_2) vérifie

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}).$$

Ceci entraîne

$$\log(\text{card } E'_k) \leq \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1} (\text{card } E'_k) = \exp(O(\sqrt{p_k})) .$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω -largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_\lambda(X)$ de tels nombres $\leq X$ vérifie, en posant $A_{k_0} \leq X < A_{k_0+1}$, ce qui entraîne $\log X \sim p_{k_0}$

$$Q_\lambda(X) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \exp(O(\sqrt{p_k})) \leq k_0 \exp(O(\sqrt{p_{k_0}})) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}) .$$

Remarque. — On peut conjecturer que $\log Q_\lambda(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet, si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\epsilon)$, le "2" venant de la formule de Brun-Titschmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k , on peut assimiler $\log p_{k+r}/p_k$ à $r(\log p_{k+1}/p_k)$, et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} rx_r + \sum_{r=1}^{\infty} ry_r \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, \quad x_i, y_i \in \{0, 1\} .$$

Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{2/3} \sqrt{p_k}$.

2. Démonstration du théorème 2.

Minoration. — Posons

$$k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1 \quad \text{et} \quad A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k ,$$

où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Čebyshev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > (c \log x)/(\log \log x)$. Il y en a $[x/A_k]$ qui sont inférieurs à x . On a (cf. [Land], § 57)

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k/\log^2 p_k) = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)) .$$

Il vient, en posant $\lambda = \log x$, $\lambda_2 = \log \log x$,

$$k = \frac{c\lambda}{\lambda_2} + o(1)$$

$$\log A_k = c\lambda + c(\log c - 1)(1 + o(1)) \lambda/\lambda_2$$

et

$$f_c(x) \geq \left[\frac{x}{A_k} \right] \geq x^{1-c} \exp(c(1 - \log c)(1 + o(1)) \frac{\log x}{\log \log x}) .$$

Majoration. — En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38, ou [Hal 2], p. 147), on obtient

$$\left[\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right]^k \geq k! \sum_{2 \leq p_{i_1} < \dots < p_{i_k} \leq x} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} .$$

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x, n \in S, \omega(n)=k} 1 \leq \sum_{n \leq x, n \in S, \omega(n)=k} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k.$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers $n \leq x$ dont les facteurs premiers sont exactement $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$. On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_k}^{\alpha_k} \leq x; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Ceci entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \leq \lceil \frac{\log x}{\log 2} \rceil; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut

$$\binom{\lceil \log x / \log 2 \rceil}{k} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^k.$$

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x, \omega(n)=k} 1 \leq \frac{1}{(k!)^2} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^k$$

et

$$\sum_{n \leq x, \omega(n) \geq k} 1 \leq x \sum_{j \geq k} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^j \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^j / (j!)^2.$$

On utilise la majoration $\sum_{j \geq k} a^j / (j!)^2 \leq a^k / (k!)^2 1 / (1 - a/(k+1))^2$, valable pour $a < (k+1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land], § 28) qu'il existe B tel que $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + B$, et on choisit

$$k = \lceil \frac{c \log x}{\log \log x} \rceil + 1.$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leq x \frac{(\lambda_2 + B)^k (\lambda / \log 2)^k}{(k!)^2} \left(1 + O\left(\frac{\lambda^3}{\lambda}\right) \right)$$

et, en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp(3c(1+o(1))) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$.

1° Fonction $\sigma(n) = \text{somme des diviseurs de } n$. - On remarque d'abord que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$(2) \quad \sigma(n) = n \prod_{p^a \parallel n} \left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^a} \right) = n(1+o(1)) \prod_{p^a \parallel n, p \leq \log n} \left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^a} \right);$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log \log n$; et

$$\begin{aligned} \prod_{p|n, p > \log n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) &\leq \prod_{p|n, p > \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{-\log n / \log \log n} = 1 + \frac{o(1)}{\log \log n}, \end{aligned}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n , $\sigma(n) \geq n$, et pour n pair, $\sigma(n) \geq \frac{3}{2}n$. On a donc, pour tout n , $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geq \frac{5}{2}n$. Inversement, pour k tendant vers $+\infty$, le nombre $n = 4p_2 p_3 \cdots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1 - \varepsilon) \log n$, et donc vérifie

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) = \frac{5}{2}n(1 + o(1)).$$

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n+1)$ de la façon suivante : Il résulte de (2) que $\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1 + o(1))(P_1 + P_2)$ avec

$$P_1 = \prod_{p|n, p \leq \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \text{ et } P_2 = \prod_{p|n+1, p \leq \log n} \frac{1}{1 - 1/p}.$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs ou égaux à 1, $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$. Mais

$$P_1 P_2 \leq \prod_{p \leq \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \sim e^\gamma \log \log n,$$

où γ est la constante d'Euler, d'après la formule de MERTENS (cf. [Wri1]). Cela donne, pour tout n ,

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1 + o(1)) e^\gamma \log \log n.$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque, pour une infinité de n , on a (cf. [Wri1])

$$\sigma(n) \sim n e^\gamma \log \log n.$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut prendre P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max_{n \leq x} \sigma(n)$ et de $\max_{n \leq x} (\sigma(n) + \sigma(n-1))$ montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie

$$\max_{n \leq N+1} (\sigma(n) + \sigma(n-1)) = \sigma(N) + \sigma(N-1) \text{ ou } \sigma(N+1) + \sigma(N).$$

2º Indicateur d'Euler φ . - On a une relation analogue à (2)

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n(1 + o(1)) \prod_{p|n, p \leq \log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On démontre comme précédemment que, pour tout n , on a

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \leq \frac{3}{2}n$$

et que, pour une infinité de n ,

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \sim \frac{3}{2}n.$$

Pour les petites valeurs de $\varphi(n) + \varphi(n+1)$, on a

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \geq n(1 + o(1))(P_1 + P_2) \geq 2n(1 + o(1)) \sqrt{P_1 P_2},$$

avec

$$P_1 = \prod_{p|n, p \leq \log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ et } P_2 = \prod_{p|n+1, p \leq \log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et, comme

$$P_1 P_2 \geq \prod_{p \leq \log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n},$$

on a

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) \geq \frac{2e^{-\gamma/2} n(1 + o(1))}{\sqrt{\log \log n}}.$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante : Soit $k \geq 4$. On pose $P_k = \prod_{p \leq p_k} (1 - 1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel que $P_{k'} \geq \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \cdots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \cdots p_k$; on a, lorsque $k \rightarrow +\infty$, $\frac{\varphi(R)}{R} = \frac{\varphi(S)}{S}(1 + o(1))$, et l'on prend pour n la plus petite solution des congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{R} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{S} \end{cases}.$$

3° Fonction Ω . Démonstration du théorème 3.

PROPOSITION 1. - Soit $\varepsilon > 0$, et $k > 0$. On écrit $n(n+1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leq k$. Alors il existe $n_0(k, \varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $U_k \leq n^{1+\varepsilon}$.

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque

$$\begin{aligned} \Omega(n) + \Omega(n+1) &= \Omega(n(n+1)) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k) \\ &\leq \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{\log n}{\log 2} + \frac{\log n(n+1)}{\log k} \quad \text{pour } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Etant donné η , il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2}(1 + \eta) \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th. 4-F) comme nous l'a précisé M. LANGEVIN.

PROPOSITION 2 (RIDOUT). - Soit θ un nombre algébrique $\neq 0$. Soit P_1, P_2, \dots, P_s , Q_1, Q_2, \dots, Q_t des nombres premiers distincts, et $\delta > 0$. Il y a un nombre fini de nombres rationnels a/b de la forme :

$$a = a' P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad b = b' Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \cdots Q_t^{\beta_t}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in \mathbb{N}$ et $a', b' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| \theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{|a'| |b'| |ab|^{\delta}}.$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que, pour une infinité de n , on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leq k$ en deux parties P_1, P_2, \dots, P_s et Q_1, Q_2, \dots, Q_t , de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$p \leq k \text{ et } p|n \Rightarrow p \in \{P_1, \dots, P_s\}$$

$$p \leq k \text{ et } p|n+1 \Rightarrow p \in \{Q_1, \dots, Q_t\}.$$

On écrit $n = n^{\alpha_1} P_1^{\alpha_s} \dots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n^{\beta_1} Q_1^{\beta_t} \dots Q_t^{\beta_t}$, et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $(n+1)/n$, solution de :

$$\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \frac{1}{|n^{\alpha_1} n^{\beta_1}| (n(n+1))^{\delta}}$$

puisque $n^{\alpha_1} n^{\beta_1} = V_k \leq n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leq 300\,000$ vérifiant $m < n \Rightarrow \Omega(m(m+1)) < \Omega(n(n+1))$ sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega(n(n+1))$) : 2(2) ; 3(3) ; 7(4) ; 8(5) ; 15(6) ; 32(7) ; 63(9) ; 224(10) ; 255(11) ; 512(13) ; 3968(14) ; 4095(17) ; 14436(18) ; 32768(19) ; 65535(20) ; 180224(22) ; 262143(24).

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4° Fonction ω . — Nous avons rappelé dans l'introduction que, lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1)).$$

Soit

$$\lambda = \varlimsup \frac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n / \log \log n}.$$

On a $1 \leq \lambda \leq 2$ de façon évidente. On a probablement $\lambda = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega(m(m+1)) < \omega(n(n+1))$ est 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc. On a en particulier $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ et $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. L'équation

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k$$

a-t-elle des solutions > 714 (cf. [Nel]) ?

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p , on a $\Omega(2p+1) \leq 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que, pour une infinité de n , on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leq \Omega(n) + \Omega(n+1) \leq 4.$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen ($\Omega(2p + 1) = 1$) permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω .

Si l'on a $\omega(n) + \omega(n + 1) = 2$, n et $n + 1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne ($n = 2^p - 1$ avec p premier) ou si $n + 1$ est un nombre premier de Fermat ($n + 1 = 2^{2^k} + 1$). D'autre part, l'équation $2^n \pm 1 = p^a$ avec $a \geq 2$, qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n, tels que $\omega(n) + \omega(n + 1) = 2$, est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

4. Nombres ω -intéressants.

Définition. - On dit que n est ω -intéressant si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique : pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

PROPRIÉTÉ 1. - Pour $k \geq 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ est ω -intéressant.

En effet, si $\omega(m) \leq k$, on a bien $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geq A_k 3^\Delta$ et

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k + \Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{(1 + \Delta/k)}{3^\Delta} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1 + \Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

PROPRIÉTÉ 2. - Soit n vérifiant

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ et } \omega(n) = k,$$

alors n est ω -intéressant.

Démonstration. - Soit $m > n$. Ou bien on a $m \geq A_{k+1}$ et, d'après la propriété 1,

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1)(1 - 1/k)}{n} < \frac{\omega(n)}{n};$$

ou bien on a $n < m < A_{k+1}$, et cela entraîne $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

PROPRIÉTÉ 3. - Pour une infinité de valeurs de k, il existe un nombre ω -intéressant, plus grand que A_k et ayant $k - 1$ facteurs premiers.

Démonstration. - Soit k tel que

$$(3) \quad \frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{1}{k-1}.$$

Alors, $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1} (p_k + 1)$ est ω -intéressant.

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k p_{k+1}/p_k$ et que, pour $k \geq 2$, d'après la propriété 2, n' est ω -intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k - 1$; si m vérifie $n < m < n'$, on a $\omega(m) \leq k - 1$; si m vérifie $n' \leq m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n},$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres, on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k + 1},$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraîne la relation (3) pour k assez grand.

Remarque 1. - Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < p_k/(k - 1)$ il est facile de voir qu'il n'existe aucun nombre ω -intéressant compris entre A_k et $n' = A_k p_{k+1}/p_k$. Cette situation se produit pour une infinité de k . On peut donc conjecturer que, pour une infinité de k , les nombres ω -intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) = k$.

Remarque 2. - Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k - 1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leq n = A_k(1 + 1/p_k)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante : Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u + 1) \dots (u + r)$ est plus grand que r si $u \geq r$ (cf. [Lan]).

Considérons le produit $\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1} p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1} p_k + t$. Alors le nombre $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-2} (p_{k-1} p_k + t_q)$ a $k - 1$ facteurs premiers, et l'on a $n \leq A_k (1 + p_{k-2}/p_k p_{k-1})$. Le résultat de RAMACHANDRA (cf. [Ramac]) "Si $r^{3/2} \leq u \leq r \log \log r$, on a $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -(8 + \frac{\log u}{\log r})$ " permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leq A_k (1 + 1/p_k^{1+\alpha})$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

PROPRIÉTÉ 4. - Soit n un nombre ω -intéressant, $n \geq (k - 1) A_k$. Alors $\omega(n) \geq k$. Cela entraîne qu'un nombre ω -intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k - 1)$ facteurs premiers.

Démonstration. - Soit $n \geq (k - 1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leq k - 1$; on écrit

$$A_k(t - 1) \leq n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geq k$. Ce nombre n ne peut pas être ω -intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leq \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leq \frac{k}{A_k t} \leq \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture. - Peut-on remplacer $n \geq (k-1) A_k$ par $n \geq (1 + \varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω -intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω -largement composés : Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω -largement composés non ω -intéressants (exemple : $n = (p_{k+1} - 1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

5. Démonstration du théorème 4.

PROPOSITION 3. - Posons $N_k(x) = \text{card}\{n \leq x ; \omega(n) > k\}$. Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a, lorsque $x \rightarrow +\infty$ (avec les notations de l'introduction),

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{1/2 + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}},$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y .

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable (en remplaçant $\frac{F(\alpha)}{\alpha - 1}$ par $\frac{F(\alpha)}{1 - \alpha}$) pour estimer $\text{card}\{n \leq x ; \omega(n) \leq \alpha \log \log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. DELANGE). - Soit $P_x(z) = \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)}$. Le théorème des résidus montre que

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P_x(z)}{(z-1) z^{k+1}} dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de SELBERG (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{zF(z) x(\log x)^{z-1}}{(z-1) z^{k+1}} dz + R_1(x)$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{O(x(\log x)^{\text{Re } z-2})}{(z-1) z^{k+1}} dz = O\left(\frac{x(\log x)^{r-2}}{(r-1) r^k}\right).$$

On pose $\frac{zF(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe pour $z \neq 1$, et l'on a

$$G(z) = G(r) + (z-r) G'(r) + (z-r)^2 H(z, r),$$

où $H(z, r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma$, $1 < r_1 \leq r \leq r_2$. On pose $\log \log x = \lambda$. On obtient

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{1}{2i\pi \log x} \int_{\gamma} \frac{xG(z) e^{z\lambda}}{z^{k+1}} + R_1(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi \log x} \left(\int_{\gamma} \frac{xG(r) e^{z\lambda}}{z^{k+1}} dz + \int_{\gamma} \frac{x(z-r) e^{z\lambda} G'(r)}{z^{k+1}} dz \right) + R_1(x) + R_2(x) \\ &= \frac{x}{\log x} G(r) \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{x}{\log x} G'(r) \left(\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r\lambda^k}{k!} \right) + R_1(x) + R_2(x). \end{aligned}$$

On choisit $r = k/\lambda$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et

on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_{\gamma} \frac{x(z-r)^2 H(z, r) e^{z\lambda}}{z^{k+1}} dz .$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$, on a $|z-r|^2 |e^{z\lambda}| = 2r^2(1 - \cos \theta) e^{r\lambda} \cos \theta$. On peut montrer que, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, on a

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) e^{\alpha \cos \theta} d\theta = O(e^\alpha \alpha^{-3/2})$$

(cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{r\lambda}}{\lambda^{3/2} r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x} G(r) \frac{\lambda^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{r\lambda}}{\lambda^{3/2} r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x(\log x)^{r-2}}{(r-1) r^k}\right) .$$

On prend $k = [\alpha \log \log x]$, de sorte que $r = \frac{\lambda}{\lambda} = \alpha + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)$. On a donc $G(r) = G(\alpha)(1 + O(\frac{1}{\lambda}))$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling : $k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$), et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \frac{k}{\lambda} < 1$.

PROPOSITION 4. - Soit $(n_0, A) = 1$. Alors on a, avec $d(n) = \sum_{d|n} 1$,

$$(i) \quad \sum_{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x} d(n) \leq \frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) + 2\sqrt{x}$$

$$(ii) \quad \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x, \\ \omega(n) \geq \alpha \log \log x}} 1 \leq \frac{1}{(\log x)^\alpha \log 2} \left(\frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) + 2\sqrt{x}\right) .$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\frac{x}{A} \left(1/(\log x)^\alpha \log 2\right)\right)$ lorsque $A = O(\sqrt{x})$.

Démonstration. - La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i) : Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geq \alpha \log \log x$ vérifient $d(n) \geq 2^{\omega(n)}$, soit $d(n) \geq (\log x)^\alpha \log 2$.

On a

$$\sum_{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x} d(n) \leq \sum_{n \equiv n_0 \pmod{A}, n \leq x} \sum_{d \leq \sqrt{x}, d|n} 2 \leq \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod{A}, \\ d|n, n \leq x}} 1 .$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + yA \equiv 0 \pmod{d}$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution, et une seule, en y dans chaque intervalle de longueur d . Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d)|n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d , et la somme est inférieure ou égale à

$$\sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \left(\frac{x}{Ad} + 1\right) \leq 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) .$$

Remarque. - Dans le cas $A = 1$, $\alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est dû au fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leq x, \omega(n) \sim 2} d(n) \sim x \log \log x.$$

Par des techniques plus compliquées, il est possible d'avoir pour (ii) une majoration du même ordre en $\log x$ que celle de la proposition 3, pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.

LEMME 2. - Soit $M = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps K . Soit \mathcal{P} une partie de K , et soit L_i le nombre d'éléments de la i -ème ligne de M qui sont dans \mathcal{P} . Alors il y a au moins $n - \sum_{i=1}^m L_i$ colonnes de M dont tous les éléments sont dans $K - \mathcal{P}$.

Démonstration. - Soit C_j le nombre d'éléments de la j -ième colonne qui sont dans \mathcal{P} . On a

$$\sum_{j=1}^n C_j = \sum_{i=1}^m L_i \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j \neq 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j = 0}} 1 \geq n - \sum_{j=1}^n C_j = n - \sum_{i=1}^m L_i.$$

PROPOSITION 5. - Supposons qu'il existe $k > 0$ et $j < n$ tels que

- (i) $k \leq \omega(n)$,
- (ii) $\omega(n) \leq j$,
- (iii) $\omega(n - r) \geq j$ pour $r = 1, 2, \dots, j - 1$,
- (iv) $\omega(n + s) \leq k$ pour $s = 1, 2, \dots, [2 \log n]$.

Alors, pour n assez grand, n est un point d'étranglement pour la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. - Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leq n - j$ et, d'après (ii),

$$m - \omega(m) < n - j \leq n - \omega(n).$$

Ou bien on a $m = n - r$ avec $1 \leq r \leq j - 1$, et (iii) et (ii) donnent

$$m - \omega(m) \leq m - j \leq m - \omega(n) < n - \omega(n).$$

Soit maintenant $m > n$.

Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et, en remarquant que pour tout entier m on a $\omega(m) \leq \frac{\log m}{\log 2} \leq \frac{3}{2} \log m$, on obtient, si n est assez grand,

$$m - \omega(m) \geq m - \frac{3}{2} \log m > n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log(n + 2 \log n) > n > n - \omega(n)$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x - \frac{3}{2} \log x$.

Ou bien on a $m \leq n + [2 \log n]$, et (iv) donne alors

$$\omega(m) \leq k \leq \omega(n),$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n).$$

Démonstration du théorème 4. — La méthode suivante est celle de [Erd 2].

Pour assurer les hypothèses (i) et (iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences :

$$\begin{cases} n \equiv 0 & (\text{mod } B_0) \\ n \equiv 1 & (\text{mod } B_1) \\ \vdots \\ n \equiv j-1 & (\text{mod } B_{j-1}) \end{cases}$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers, et B_1, \dots, B_{j-1} des produits de j nombres premiers tous distincts. On pose $A = B_0 B_1 \dots B_{j-1}$. D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + yA \quad \text{avec } 0 \leq n_0 < A \quad \text{et } y \in \mathbb{N}.$$

On se donne x assez grand. On choisit $k = [3 \log \log x]$, $j = [6 \log \log x]$. On prend les facteurs premiers de B_0, \dots, B_{j-1} distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc

$$\log A \leq 36(\log \log x)^2 \log(4 \log x) = O(\log \log x)^3.$$

Maintenant, pour $1 \leq s \leq 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A , on a, pour la solution n_0 des congruences,

$$(n_0 + s, A) = 1 \quad \text{et} \quad (n_0, A) = B_0.$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, où $0 \leq s \leq 2 \log x$, $0 \leq y \leq \frac{x}{A} - 1$, défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega(n_0 + s + yA) \quad \text{si } s \neq 0 \\ &= \omega\left(\frac{n_0 + yA}{B_0}\right) \quad \text{si } s = 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la s -ième ligne de ce tableau contient au plus

$$O\left(\frac{x}{A} \frac{1}{(\log x)^3 \log 2-1}\right)$$

termes supérieurs à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\frac{x}{A}(1 + o(1))$ colonnes y pour lesquelles

$$\omega(n_0 + s + yA) \leq 3 \log \log x \quad \text{pour } s = 1, \dots, 2[\log x]$$

$$\omega(n_0 + yA) \leq 6 \log \log x \quad \text{pour } s = 0.$$

Pour une de ces valeurs de y , $n = n_0 + yA$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que, pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^\varepsilon$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que, pour $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$, $n - (\omega(n) \log \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a aucun point d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de point d'étranglement : La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante : Majorer le plus petit t_k tel que $\omega(n + t_k) \geq k$. On a évidemment $t_k < 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$, et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que, si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que, pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$, et même

$$m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - \exp(\log n)^{1-\varepsilon},$$

ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$ (On a besoin de $n - 2$, parce que $\min_{m=n+1, n+2} m - d(m) \leq n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet).

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme : La démonstration suivante a été proposée par D. BERNARDI et W. NARKIEWICZ.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de points d'étranglement, et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $(n_k/b, n_k/a)$ un nombre c premier à a b ; on aura alors

$$ca < n_k < cb,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

REFERENCES

- [And] ANDERSON (I.). - On primitive sequences, J. London math. Soc., t. 42, 1967, p. 137-148.
- [Com] COMTET (L.). - Analyse combinatoire. Tomes 1 et 2. - Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 4 et 5).

- [Del 1] DELANGE (H.). - Sur des formules dues à A. Selberg, Bull. Sc. math., 2e série, t. 83, 1959, p. 101-111.
- [Del 2] DELANGE (H.). - Sur des formules de A. Selberg, Acta Arithm., Warszawa, t. 19, 1971, p. 105-146.
- [Dieu] DIEUDONNÉ (J.). - Calcul infinitésimal. - Hermann, Paris, 1968 (Collection Méthodes).
- [Erd 1] ERDÖS (P.). - On the integers having exactly k prime factors, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 53-66.
- [Erd 2] ERDÖS (P.). - On arithmetical properties of Lambert series, J. Indian math. Soc., t. 12, 1948, p. 63-66.
- [Erd 3] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Ann. of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.
- [Hal 1] HALBERSTAM (H.) and RICHERT (H. E.). - Sieve methods. - London, Academic Press, 1974 (London mathematical Society Monographs, 4).
- [Hal 2] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [Har] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - The normal number of prime factors of a number n , Quart J. of Math., t. 48, 1917, p. 76-92 ; "Collected papers of Ramanujan", p. 262-275. - Cambridge, at the University Press, 1927.
- [Kac 1] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, Proc. Nat. Acad. Sc., t. 25, 1939, p. 206-207.
- [Kac 2] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - The Gaussian law of errors in the theory of additive functions, Amer. J. Math., t. 62, 1940, p. 738-742.
- [Kol] KOLESNIK (G.) and STRAUSS (E. G.). - On the distribution of integers with a given number of prime factors (à paraître).
- [Land] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. - New York, Chelsea publishing Company, 1953.
- [Lan] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.
- [Mon] MONTGOMERY (H. L.) and VAUGHAN (R. C.). - On the large sieve, Mathematika, London, t. 20, 1973, p. 119-134.
- [Nel] NELSON (C.), PENNEY (D. E.) and POMERANCE (C.). - 714 and 715, J. recreational Mathematics, t. 7, 1974, p. 87-89.
- [Nic] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres largement composés, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année, 1977/78, n° 41, 10 p. ; et Acta Arithm., Warszawa, t. 34, 1979, p. 379-390.
- [Pis] PISOT (C.) and SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.
- [Pra] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).
- [Ramac] RAMACHANDRA (K.). - A note on numbers with a large prime factor, II, J. Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 39-48.
- [Ram] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 16, 1917, p. 112-132 ; and "Collected papers". Vol. 1, p. 277-293.
- [Rid] RIDOUT (D.). - Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika, London, t. 4, 1957, p. 125-131.
- [Roth] ROTH (K. F.) and SZEKERES (G.). - Some asymptotic formulae in the theory of partitions, Quart. J. math., Oxford, Series 2, t. 5, 1954, p. 241-259.

- [Sat] SATHE (L. G.). - On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors, I, II, III, IV, J. Indian math. Soc., t. 17, 1953, p. 63-141 et t. 18, 1954, p. 27-81.
- [Sch] SCHMIDT (W. M.). - Approximation to algebraic numbers, Enseign. math. Genève, t. 17, 1971, p. 187-253 ; et Genève, Enseignement mathématique, 1972 (Monographies de l'Enseignement mathématique, 19).
- [Sel 1] SELBERG (A.). - Note on a paper by L. G. Sathe, J. Indian math. Soc., t. 18, 1954, p. 83-87.
- [Sel 2] SELBERG (A.). - On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes, Arch. Math. Naturvid., t. 47, 1943, fasc. 6, p. 87-105.
- [Tij] TIJDeman (R.). - Of the equation of Catalan. - Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 197-209.
- [Tur] TURAN (P.). - On a theorem of Hardy and Ramanujan, J. London math. Soc., t. 9, 1934, p. 274-276.
- [Wri] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.
-