Jean-Louis Nicolas

Répartition des nombres largement composés

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 41, p. 1-10.

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
19e année, 1977/78, n° 41, 10 p.

22 mai 1978

RÉPARTITION DES NOMBRES LARGEMENT COMPOSÉS

par Jean-Louis NICOLAS

Summary. - An integer n is called largely composite if $m \leqslant n \Longrightarrow d(m) \leqslant d(n)$, where $d(n)$ is the number of divisors of n. It is proved that the quantity $Q_\ell(X)$ of largely composite numbers less than X, is, for X large, between $\exp(\log X)^a$ and $\exp(\log X)^b$, with $0.2 < a < b < 0.5$.

Désignons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. RAMANUJAN [9] a appelé hautement composé un entier n vérifiant

$$m < n \Longrightarrow d(m) < d(n) .$$

Nous dirons que n est largement composé s'il vérifie

$$m \leqslant n \Longrightarrow d(m) \leqslant d(n) .$$

Désignons par $Q_h(X)$ (resp. $Q_\ell(X)$) le nombre de nombres hautement (resp. largement) composés $\leqslant X$. On sait qu'il existe (cf. [2] et [7]) deux nombres réels c et c' vérifiant $1,125 \leqslant c < c'$ tels que, pour X assez grand, on ait :

$$(\log X)^c \leqslant Q_h(X) \leqslant (\log X)^{c'} ,$$

et on conjecture que

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log Q_h(X)}{\log\log X} = \frac{\log 30}{\log 16} = 1,227 .$$

Nous allons démontrer que $Q_\ell(X)$ est beaucoup plus grand que $Q_h(X)$.

THÉORÈME. - Il existe deux nombres réels a et b vérifiant $0,2 < a < b < 0,5$ tels que, pour X assez grand, on ait

$$\exp(\log X)^a \leqslant Q_\ell(X) \leqslant \exp(\log X)^b .$$

On peut conjecturer que

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log\log Q_\ell(X)}{\log\log X} = 1 - \frac{\log 30}{2\log 16} = 0,387 .$$

La démonstration de ce théorème repose sur les propriétés des nombres hautement composés supérieurs que nous rappelons au § 1, sur un theorème de Selberg (concernant les nombres premiers dans l'intervalle x, $x + x^\tau$) que nous redémontrons au § 2. La minoration de $Q_\ell(X)$ fait l'objet du § 3. La majoration de $Q_\ell(X)$, donnée au § 4, utilise les méthodes de la majoration de $Q_h(X)$ dans [7].

1. Nombres hautement composés supérieurs.

On dit que N est hautement composé supérieur, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier M, on ait

$$\frac{d(M)}{M^\varepsilon} \leqslant \frac{d(N)}{N^\varepsilon} .$$

Un tel nombre est hautement composé :

$$M < N \Longrightarrow d(M) \leqslant (\frac{M}{N})^{\varepsilon} d(N) < d(N) .$$

<u>Propriétés</u> (cf. [9], § 32-34, [6], [7]): Etant donné ε, $0 < \varepsilon < 1$, il existe un nombre hautement composé supérieur associé à ε dont la décomposition en facteurs premiers $N_{\varepsilon} = \prod_{\lambda} \lambda^{a_{\lambda}}$ est donnée par

(1) $$a_{\lambda} = 1/(\lambda^{\varepsilon} - 1)] = \text{partie entière de } 1/(\lambda^{\varepsilon} - 1)$$

(En effet, pour maximiser le produit $\prod_{\lambda}((a_{\lambda} + 1)/\lambda^{\varepsilon a_{\lambda}})$, on maximise chacun des facteurs).

On attache à N les nombres

(2) $$x = 2^{1/\varepsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2} = (1 + 1/k)^{1/\varepsilon} .$$

On a alors :

(3) $$(x_{k+1} < \lambda < x_k) \Longrightarrow (a_{\lambda} = k) \Longrightarrow (x_{k+1} \leqslant \lambda \leqslant x_k) ,$$

(4) $$\log N \sim x .$$

Soit p_1 le plus grand nombre premier divisant N , et P_1 le nombre premier suivant p_1 . On a $p_1 \leqslant x \leqslant P_1$, et le nombre hautement composé supérieur suivant N est inférieur ou égal à NP_1 .

On a également

$$\lambda \leqslant x_k \Longleftrightarrow \varepsilon \leqslant \frac{\log(1 + 1/k)}{\log \lambda} .$$

Il est commode de poser, pour $k \geqslant 1$

$$F_k = \{\frac{\log(1 + 1/k)}{\log \lambda} , \quad \lambda \text{ premier}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_k = \cup_{j \geqslant k} F_j .$$

On définit

(5) $$\varepsilon_k^{+} = \inf_{\alpha \geqslant \varepsilon, \alpha \in \mathfrak{F}_k} \alpha \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^{-} = \sup_{\alpha \leqslant \varepsilon, \alpha \in \mathfrak{F}_k} \alpha .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et N_{ε} un nombre maximisant $d(N)/N^{\varepsilon}$. On définit, pour M entier, le <u>bénéfice</u> de M (bén M) par rapport à N et ε par

(6) $$\text{bén } M = \log \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}} - \log \frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} = \log \frac{d(N)}{d(M)} - \varepsilon \log \frac{N}{M} .$$

D'après la définition des nombres hautement composés supérieurs, on a toujours bén $M \geqslant 0$ et, si $M = \prod_{\lambda} \lambda^{b_{\lambda}}$, on a

(7) $$\text{bén } M = \sum_{\lambda \text{ premier}} \text{bén}_{\lambda} M$$

avec

$$\text{bén}_{\lambda}(M) = \log \frac{a_{\lambda} + 1}{b_{\lambda} + 1} - \varepsilon(a_{\lambda} - b_{\lambda}) \log \lambda .$$

On a, pour tout λ premier, $\text{bén}_{\lambda} M \geqslant 0$, d'après (1).

Compte tenu de ce que, pour $b_{\lambda} \geqslant a_{\lambda}$,

$$\frac{b_\lambda + 1}{a_\lambda + 1} \leqslant \left(\frac{a_\lambda + 2}{a_\lambda + 1}\right)^{b_\lambda - a_\lambda} ,$$

on a

(8) $$\text{bén}_\lambda\, M \geqslant (b_\lambda - a_\lambda)\left(\varepsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}\right)\right)$$
$$\geqslant (b_\lambda - a_\lambda) \log \lambda(\varepsilon - \varepsilon^-_{a_\lambda+1}) .$$

On a de même, pour $b_\lambda \leqslant a_\lambda$,

(9) $$\text{bén}_\lambda\, M \geqslant (a_\lambda - b_\lambda) \log \lambda(\varepsilon^+_{a_\lambda} - \varepsilon) .$$

LEMME 1. - <u>Soit</u> $\eta > 0$ <u>fixé. Pour tout</u> $x \in [\xi , 2\xi]$, <u>excepté pour un ensemble de mesure</u> $O(\xi^{1-\eta})$, <u>le nombre hautement composé supérieur</u> N , <u>associé par</u> (1) <u>à</u> $\varepsilon = (\log 2/\log x)$, <u>vérifie la relation, où</u> n' <u>désigne le nombre hautement composé suivant</u> N ,

(10) $$\frac{n'}{N} \geqslant 1 + \frac{1}{(\log N)^{\theta+2\eta}} , \text{ avec } \theta = \frac{\log 3/2}{\log 2} = 0{,}585 .$$

<u>Démonstration</u>. - Ce lemme généralise le théorème 8 de [6] (p. 174). Pour $\xi \leqslant x \leqslant 2\xi$, on a $(\log 2/\log \xi) \geqslant \varepsilon \geqslant (\log 2/\log 2\xi)$. Considérons les éléments $\alpha \in F_k$, $\alpha \geqslant (\log 2/\log 2\xi)$. On a

$$\alpha = \frac{\log(1 + 1/k)}{\log \lambda} \geqslant \frac{\log 2}{\log 2\xi} \Longleftrightarrow \lambda \leqslant (2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2} .$$

Il y en a au plus $(2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2}$, et, pour $k \geqslant (\log 2\xi)/(\log 2)^2$, il n'y en a pas. Posons

$$A_\xi = \{\alpha \in \mathfrak{F}_2 ;\ \frac{\log 2}{\log \xi} \geqslant \alpha \geqslant \frac{\log 2}{\log 2\xi}\} .$$

On a

$$\text{Card } A_\xi \leqslant \sum_{k=2}^{((\log 2\xi)/(\log 2)^2)} (2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2} = O(\xi^\theta) .$$

Autour de chacun de ces $\alpha \in A_\xi$, on met une zone interdite $(\alpha - \ell , \alpha + \ell)$, avec $\ell = \xi^{-\theta-2\eta}$. La mesure de la réunion

$$Z_{\xi,\ell} = \bigcup_{\alpha\in A_\xi} (\alpha - \ell , \alpha + \ell)$$

est donc $O(\xi^{-2\eta})$.

L'image de $Z_{\xi,\ell}$ dans l'intervalle $[\xi , 2\xi]$ par l'application $\alpha \longmapsto 2^{1/\alpha}$ aura une mesure $O(\xi^{1-2\eta} \log^2 \xi) = O(\xi^{1-\eta})$. Choisissons x en dehors de cette image. On aura alors $\varepsilon = (\log 2/\log x) \notin Z_{\xi,\ell}$, ce qui implique, d'après [5],

$$\varepsilon^+_2 - \varepsilon \geqslant \ell \quad \text{et} \quad \varepsilon - \varepsilon^-_2 \geqslant \ell .$$

Posons maintenant $n' = (r/s)N$ avec $(r , s) = 1$, et considérons le bénéfice de n' par rapport à N et ε . On a l'une des trois éventualités :

1° r a un diviseur premier λ vérifiant $a_\lambda \geqslant 1$: on aura, d'après [9]

$$\text{bén } n' \geqslant (\log \lambda)(\varepsilon - \varepsilon^-_2) \geqslant \ell \log 2 ;$$

2° s a un diviseur premier μ vérifiant $a_\mu \geqslant 2$: on aura, d'après [10],

$$\text{bén } n' \geqslant (\log \mu)(\varepsilon_2^+ - \varepsilon) \geqslant \ell \log 2 \ ;$$

3° n' s'écrit

$$n' = \frac{P_1 P_2 \cdots P_k}{p_1 p_2 \cdots p_j} N \ ,$$

où P_1 , P_2 , ... , P_k ne divisent pas N , et p_1 , p_2 , ... , p_j divisent N avec l'exposant 1 . Cela donne

$$\log \frac{d(n')}{d(N)} = (k - j) \log 2 \geqslant \log 2 \ , \text{ puisque } d(n') > d(N) \ .$$

Dans les trois cas, on aura, par (6),

$$\varepsilon \log \frac{n'}{N} = \log \frac{d(n')}{d(N)} + \text{bén } n' \geqslant \ell \log 2 \ .$$

C'est-à-dire

$$\frac{n'}{N} - 1 \geqslant \log \frac{n'}{N} \geqslant \ell \log x = \frac{\log x}{\xi^{\theta+2\eta}} > \frac{\log x}{x^{\theta+2\eta}} \ .$$

Et, comme, par (4), $x \sim \log N$, cela achève la démonstration.

Remarque. - En utilisant le résultat de Fel'dmann [3], il existe deux constantes c et $\varkappa$ telles que l'on ait

$$|v\theta - u| \geqslant \frac{c}{v^{\varkappa}} \ , \text{ pour } u \ , v \in \mathbb{Z} \ .$$

On peut remplacer dans (10) θ par $\varkappa\theta/(\varkappa + 2)$. Il suffit pour cela de remplacer dans la définition de A_ξ , $\mathfrak{T}_2$ par $\mathfrak{T}_3$ et dans les deux premières éventualités de considérer $a_\lambda \geqslant 2$, puis $a_\mu \geqslant 3$. M. WALDSCHMIDT m'a communiqué pour $\varkappa$ la valeur 2^{60} .

2. Un résultat de A. SELBERG.

LEMME 2 (cf. [11]). - Soit $\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p$ la fonction de Tchebychev [Čebyšev]. Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, et pour tout $T \leqslant x^{5/6} e^{-(\log x)^\delta}$ (avec $2/3 < \delta < 1$), on a, pour $\mu < \delta - 2/3$,

$$\frac{1}{x} \int_x^{2x} |\psi(y + \frac{y}{T}) - \psi(y) - \frac{y}{T}|^2 \, dy = O(\frac{x^2}{T^2} e^{-(\log x)^\mu}) \ .$$

Démonstration. - Désignons par $N(\sigma , t)$ le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de la fonction ζ de Riemann, vérifiant $\sigma \leqslant \beta < 1$ et $|\gamma| < t$. La démonstration du lemme 2 repose sur les résultats suivants, où σ vérifie $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$,

(11) $$N(\sigma , t) = O(t^{(12/5)(1-\sigma)} \log^9 t) \quad \text{(cf. [5] et [6])},$$

(12) $$N(\sigma , t) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0 \text{ et } \sigma \geqslant 1 - \eta(t) \ ,$$

avec

$$\eta(t) = c(\log \log |t|)^{-1/3} (\log |t|)^{-2/3} \quad \text{(cf. [1], p. 423)},$$

(13) $$N(0 , t + 1) - N(0 , t) = O(\log t) \quad \text{(cf. [1], p. 163)},$$

(14) $$\frac{1}{2} N(0 , t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + O(\log t) \quad \text{(cf. [1], p. 166)},$$

et la formile explicite valable pour $t \leqslant x$ (cf. [8], p. 232)

(15) $$\psi(x) - x = - \sum_{|\gamma|<t} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\frac{x}{t} \log^2 x) .$$

On a alors, pour $x \leqslant y \leqslant 2x$ et $T \geqslant 1$,

$$\psi(y + \frac{y}{T}) - \psi(y) - \frac{y}{T} = - \sum_{|\gamma|<t} \frac{e^{\delta\rho} - 1}{\rho} y^\rho + O(\frac{x}{t} \log^2 x) ,$$

avec $\delta = \log(1 + (1/T)) \leqslant 1/T$. Compte tenu de ce que $|A + B|^2 \leqslant 2(|A|^2 + |B|^2)$, et en évaluant $\int_x^{2x} y^\rho y^{\bar\rho'} dy$, il vient, en posant

$$I = \frac{1}{x} \int_x^{2x} |\psi(y + \frac{y}{T}) - \psi(y) - \frac{y}{T}|^2 dy ,$$

$$I = O(\sum_{|\gamma|<t} \sum_{|\gamma'|<t} (\frac{e^{\delta\rho} - 1}{\rho})(\frac{e^{\delta\bar\rho'} - 1}{\bar\rho'}) \frac{2^{\rho+\bar\rho'+1} - 1}{1 + \rho + \bar\rho'} x^{\rho+\bar\rho'}) + O(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x) .$$

Comme la fonction $(e^z - 1)/z$ est bornée pour $0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1$, on a

$$I = O(\sum_{|\gamma|<t} \sum_{|\gamma'|<t} \frac{1}{T^2} \frac{x^{\beta+\beta'}}{1 + |\gamma - \gamma'|}) + O(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x) .$$

De l'inégalité $x^{\beta+\beta'} \leqslant \frac{1}{2}(x^{2\beta} + x^{2\beta'})$, on déduit

$$I = O(\frac{1}{T^2} \sum_{|\gamma|<t} x^{2\beta} \sum_{|\gamma'|<t} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|}) + O(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x) .$$

On a ensuite, en utilisant (13),

$$\sum_{-t<\gamma'<t} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|} < \sum_{n=1}^{2t} \sum_{n-1\leqslant|\gamma-\gamma'|\leqslant n} \frac{1}{n} = O(\sum_{n=1}^{2t} \frac{\log t}{n}) = O(\log^2 t) .$$

Il vient alors, puisque $t \leqslant x$,

$$I = O(\frac{x^2 \log^2 x}{T^2} \sum_{|\gamma|<t} x^{2\beta-2}) + O(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x) .$$

Evaluons maintenant, en intégrant par parties l'intégrale de Stieltjès :

$$S = \sum_{|\gamma|<t} x^{2\beta-2} = - \int_0^1 x^{2\sigma-2} d_\sigma N(\sigma , t)$$
$$= x^{-2} N(0 , t) + \int_0^1 2(\log x)x^{2\sigma-2} N(\sigma , t) d\sigma ,$$

et en utilisant (14), (12) et (11), on obtient :

$$S = O(\frac{t \log t}{x^2}) + \int_0^{1-\eta(t)} 2(\log x) \log^9 t\, e^{(2\log x-(12/5)\log t)(\sigma-1)} d\sigma .$$

On choisit alors $t = x^{5/6} e^{-(1/2)(\log x)^\delta}$, cela donne :

$$S = O(\frac{\log x}{x}) + O((\log x)^{10-\delta}(e^{-\eta(t)(6/5)(\log x)^\delta} - e^{-(6/5)(\log x)^\delta}) .$$

D'après (12),

$$\eta(t) \geqslant \frac{c}{(\log x)^{2/3} (\log \log x)^{1/3}} ,$$

on a donc, pour $\mu < \delta - (2/3)$,

$$S = O(e^{-(\log x)^\mu}) .$$

Comme $T \leqslant x^{5/6} e^{-(\log x)^\delta}$, cela entraine $T^2/t^2 \leqslant e^{-(\log x)^\delta}$, et l'on obtient, pour tout $\mu < \delta - 2/3$,

$$I = O\left(\frac{x^2}{T^2} e^{-(\log x)^{\mu}}\right) .$$

LEMME 3. - Posons $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$. Soit τ vérifiant $1/6 < \tau < 1$, et μ vérifiant $0 < \mu < 1/3$. Pour tout $x \in [\xi , \xi']$, avec $\xi' = \xi + \xi/\log \xi$, excepté pour un ensemble de mesure $O(\xi\, e^{-(\log\xi)^{\mu}})$, on a :

$$|\pi(x + x^{\tau}) - \pi(x) - \frac{x^{\tau}}{\log x}| < \frac{4\, x^{\tau}}{\log^2 x} , \tag{16}$$

et

$$|\pi(x) - \pi(x - x^{\tau}) - \frac{x^{\tau}}{\log x}| < \frac{4\, x^{\tau}}{\log^2 x} . \tag{17}$$

Démonstration. - Si x ne vérifie pas la relation (16), on en déduit que, pour x assez grand, on a

$$|\psi(x + x^{\tau}) - \psi(x) - x^{\tau}| \geq \frac{3\, x^{\tau}}{\log x} . \tag{18}$$

D'après le lemme 2, on a, en choisissant $T = \xi^{1-\tau}$,

$$\int_{\xi}^{\xi'} |\psi(y + \frac{y}{T}) - \psi(y) - \frac{y}{T}|^2 \, dy = O\left(\frac{\xi^3}{T^2} e^{-(\log\xi)^{\mu}}\right) ,$$

ce qui entraîne que la relation

$$\psi(y + \xi^{\tau-1}\, y) - \psi(y) - \xi^{\tau-1}\, y < \frac{y^{\tau}}{\log y}$$

est vérifiée pour $y \in [\xi , \xi']$, excepté sur un ensemble E de mesure $O(\xi\, e^{-(\log\xi)^{\mu}})$, pour tout $\mu < 1/3$. Si $y \notin E$, on a, puisque ψ est une fonction croissante,

$$\begin{aligned}\psi(y + y^{\tau}) - \psi(y) - y^{\tau} &\leq \psi(y + \xi^{\tau-1}\, y) - \psi(y) - \xi^{\tau-1}\, y + (\xi^{\tau-1}\, y - y^{\tau}) \\ &\leq \frac{y^{\tau}}{\log y} + y^{\tau}\left(\frac{y}{\xi} - 1\right) \leq \frac{y^{\tau}}{\log y} + y^{\tau}\left(\frac{\xi'}{\xi} - 1\right) \leq \frac{3\, y^{\tau}}{\log y} .\end{aligned}$$

On aura de même, en choisissant $T = \xi'^{(1-\tau)}$,

$$\psi(y + \xi'^{(\tau-1)}\, y) - \psi(y) - \xi'^{(\tau-1)}\, y > - \frac{y^{\tau}}{\log y} ,$$

excepté sur un ensemble E' de mesure $O(\xi\, e^{-(\log\xi)^{\mu}})$. Si $y \notin E'$, on a

$$\begin{aligned}\psi(y + y^{\tau}) - \psi(y) - y^{\tau} &\geq \psi(y + \xi'^{(\tau-1)}\, y) - \psi(y) - \xi'^{(\tau-1)}\, y + (\xi'^{(\tau-1)}\, y - y^{\tau}) \\ &\geq - \frac{y^{\tau}}{\log y} + y^{\tau}\left(\frac{y}{\xi'} - 1\right) \geq - \frac{3\, y^{\tau}}{\log y} .\end{aligned}$$

Ce qui montre que la relation (18) ne peut être vérifiée que sur l'ensemble $E \cup E'$ de mesure $m_1 = O(\xi\, e^{-(\log\xi)^{\mu}})$.

Pour la relation (17), on démontre de même qu'elle est vérifiée, excepté sur un ensemble de mesure $m_2 = O(\xi\, e^{-(\log\xi)^{\mu}})$ en majorant comme au lemme 2 l'intégrale

$$\frac{1}{x}\int_{x}^{2x} |\psi(y) - \psi(y - \frac{y}{T}) - \frac{y}{T}|^2 \, dy .$$

Les relations (16) et (17) sont donc simultanément vérifiées sauf sur un ensemble de mesure au plus $m_1 + m_2$.

3. Minoration de $Q_\ell(X)$.

Soit τ vérifiant $1/6 < \tau < 1$ et $\eta > 0$. Entre $(1/2)\log X$ et $(3/4)\log X$, choisissons un x vérifiant (16), (17) et (10). Appelons p_k et P_k les nombres premiers entourant x

$$\ldots p_k < \ldots < p_2 < p_1 \leqslant x < P_1 < P_2 < \ldots < P_k < \ldots$$

Choisissons $K = [x^\tau/(2\log x)]$, de telle sorte que $P_K \leqslant x + x^\tau$ et $p_k \geqslant x - x^\tau$. Soit maintenant $m \leqslant K$, et

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant K .$$

On considère

$$n_{(i)} = N \frac{P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m}}{p_1 p_2 \ldots p_m} ,$$

où N est le nombre hautement composé supérieur associé à $\varepsilon = (\log 2/\log x)$. D'après (2) et (3), p_1 , p_2 , ... , p_m divisent N avec l'exposant 1 et P_1 , P_2 , ... , P_K ne divisent pas N . On a donc $d(n_{(i)}) = d(N)$, et

(19) $$\log n_{(i)} - \log N \leqslant m \log(x + x^\tau) - m \log(x - x^\tau) \leqslant \frac{3K}{x^{1-\tau}} \leqslant 3\, x^{2\tau-1} ,$$

pour x assez grand. Comme $\log N \sim x$, on aura $n_{(i)} < n'$, si l'on a, d'après (10),

(20) $$3\, x^{2\tau-1} \leqslant \frac{1}{2} x^{-\theta-2\eta} ,$$

et ces nombres $n_{(i)}$ seront largemant composés. Il y en a $2^K - 1$. En choisissant $\tau = (1 - \theta - 3\eta)/2$, on obtient

$$Q_\ell(X) \geqslant 2^K - 1 = 2^{[x^\tau/2\log x]} - 1 \geqslant e^{(\log X)^a} ,$$

pour X assez grand et pour tout $a < (1 - \theta)/2 = 0,20752$.

4. Majoration de $Q_\ell(X)$.

LEMME 4. - Soit N et N' deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Si ε est associé à N , on pose $x = 2^{1/\varepsilon}$. Il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout nombre largement composé n compris entre N et N' , on ait $\operatorname{b\acute{e}n} n \leqslant x^{-\gamma}$. D'autre part, pour tout λ premier, les valuations λ-adiques de n et N vérifient $|v_\lambda(n) - v_\lambda(N)| \leqslant 1$.

La démonstration est la même que celle du théorème 1 (p. 120) et de la proposition 3 (p. 123) de [7], la distinction entre "largement" et "hautement" n'intervenant pas ici.

Soit maintenant, avec les notations du § 1, λ un nombre premier . On a, d'après (7) et (2),

$$\text{bén}\ \lambda N = \log \frac{a_\lambda + 1}{a_\lambda + 2} + \varepsilon \log \lambda = \varepsilon \log \frac{\lambda}{x_{a_\lambda+1}} ,$$

et, si $a_\mu \geqslant 1$,

$$\text{bén}\ \frac{N}{\mu} = \log \frac{a_\mu + 1}{a_\mu} - \varepsilon \log \mu = \varepsilon \log \frac{x_{a_\mu}}{\mu} .$$

Si λ divise N avec l'exposant $a_\lambda = k - 1$, et n avec l'exposant k , on a

$$\text{bén}\ n \geqslant \varepsilon \log \frac{\lambda}{x_k} ,$$

et d'après le lemme 4, si n est largement composé, on doit avoir

$$\varepsilon \log \frac{\lambda}{x_k} \leqslant x^{-\gamma} ,$$

soit

$$\lambda - x_k \leqslant c_1(\log x)x_k\ x^{-\gamma} . \tag{21}$$

Si maintenant les nombres premiers $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_h$ divisent N avec l'exposant $k - 1$, et n avec l'exposant k , on a

$$\text{bén}\ n \geqslant \sum_{i=1}^{h} \varepsilon \log \frac{\lambda_i}{x_k} \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{h} \frac{\lambda_i - x_k}{\lambda_i} \geqslant \frac{\varepsilon}{\lambda_h} \sum_{i=1}^{h} 2(i - 1) = \frac{\varepsilon}{\lambda_h} (h^2 - h) .$$

Si n est largement composé, on a, d'après (3) et (21), $\lambda_h \sim x_k$ et bén $n \leqslant x^{-\gamma}$, ce qui donne

$$h \leqslant c_2 \sqrt{(\log x)x_k\ x^{-\gamma}} .$$

Le nombre de choix possibles pour un tel système de nombres $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_h$ est donc au plus

$$(c_1(\log x)x_k\ x^{-\gamma})^{c_2\sqrt{(\log x)x_k x^{-\gamma}}} = \exp(x^{\frac{1}{2}(\frac{\log(1+1/k)}{\log 2} - \gamma + \eta)}) ,$$

pour tout $\eta > 0$. On obtient la même majoration pour le nombre de choix possibles pour un système de nombres premiers $\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_h$ divisant N avec l'exposant k et n avec l'exposant $k - 1$.

On définit ensuite K par

$$\frac{\log(1 + 1/(K + 1))}{\log 2} \leqslant \frac{1 - \gamma}{2} < \frac{\log(1 + 1/K)}{\log 2} .$$

Le nombre de façon de choisir n' largement composé entre N et N' sera, d'après le lemme 4, majoré par

$$3^{\pi(x_{K+1})} \prod_{k=1}^{K} \exp(2\ c_3\ x^{\frac{1}{2}(\frac{\log(1+(1/k))}{\log 2} - \gamma + \eta)}) \leqslant e^{(\log N)^{(((1-\gamma)/2)+2\eta)}} ,$$

pour tout $\eta > 0$ et N assez grand, en utilisant (4).

Comme, d'après RAMANUJAN, il y a $O((\log X)/(\log\log X))$ nombres hautement composés supérieurs $N \leqslant X$, il existe donc $b < 1/2$ tel qu'il y ait au plus $e^{(\log X)^b}$ nombres largement composés $\leqslant X$, pour X assez grand.

5. Conjecture.

Sous les deux hypothèses très fortes formulées à la fin de [7], la conjecture de Cramer sur le n-ième nombre premier p_n

$$p_{n+1} - p_n = O(\log^2 p_n) ,$$

et l'inégalité vérifiée, pour tout $\eta > 0$,

$$|u \log \frac{3}{2} + v \log \frac{5}{4} + w \log 2| > \frac{1}{K(\eta)|uv|^{1+\eta}} , \quad \forall\ u , v , w \in \underset{\sim}{Z} ,$$

on peut choisir dans le lemme 4, pour tout $\eta > 0$,

$$\gamma = \frac{1}{4}\left(\frac{\log 3/2 + \log 5/4}{\log 2}\right) - \eta = \frac{\log 15/8}{\log 16} - \eta ,$$

et dans le lemme 1, on peut, dans (10), remplacer θ par $((\log 15/8)/(\log 16)) + \eta$. A partir de ces valeurs, les mêmes calculs donnent la conjecture citée dans le théorème.

6. Un problème de P. ERDÖS.

La méthode de minoration de $Q_\ell(X)$ permet de répondre à une question de P. ERDÖS: Soit $h(n)$ le plus petit entier tel que $d(n + h(n)) > d(n)$. Montrer que la quantité $(1/X) \sum_{n\leq X} h(n)$ n'est pas bornée.

Dans la construction du § 3, on a, par (10), (19) et (20),

$$h(n_{(i)}) = n' - n_{(i)} \geqslant \frac{N}{4\ x^{\theta+2\eta}}$$

en choisissant toujours $\tau = (1 - \theta - 3\eta)/2$. Il vient ensuite

$$\frac{1}{n'} \sum_{n\leq n'} h(n) \geqslant \frac{N}{4\ n' x^{\theta+2\eta}}\ 2^{[x^\tau/2\log x]}$$

qui n'est pas borné.

Enfin, on peut se demander si, entre deux nombres hautement composés consécutifs assez grands il existe toujours un nombre largement composé.

RÉFÉRENCES

[1] ELLISON (W. J.) et MENDÈS FRANCE (M.). - Les nombres premiers. - Paris, Hermann, 1975 (Act. scient. et ind., 1366 ; Publi. Inst. math. Univ. Nancago, 9).

[2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers, J. London math. Soc., t. 19, 1944, p. 130-134.

[3] FEL'DMANN (N. I.). - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers, Math. USSR-Sbornik, t. 6, 1968, p. 393-406 ; [in Russian] Mat. Sbornik, t. 77 (119), 1968, p. 423-436.

[4] HUXLEY (M. N.). - The distribution of prime numbers : Large sieves and zero-density theorems. - Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).

[5] HUXLEY (M. N.). - On the difference between consecutive primes, Inventiones Math., t. 15, 1972, p. 164-170.

[6] NICOLAS (J.-L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "highly composite numbers", Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.

[7] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Canad. J. of Math., t. 23, 1971, p. 116-130.

[8] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 41).

[9] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1914, p. 347-409 ; and Collected papers, p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.

[10] SELBERG (A.). - On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes, Arch. math. Naturvid., t. 47, 1943, fasc. 6, p. 87-105.

(Texte reçu le 5 juin 1978)

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
U. E. R. des Sciences
123 rue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX